Sur la feuille d'exercices n° 6

Exercice 5 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in [a,b] \iff \boxed{|x-a| + |x-b| = |b-a|}$

$\begin{cases} |x| = x & \text{si } x \geq 0 \\ |x| = -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Distinguer les cas

	$\lvert x-a\rvert$	$\lvert x-b\rvert$	$\lvert x-a\rvert + \lvert x-b\rvert$	$\lvert b-a\rvert$
a) $\boxed{x < a \leq b}$	$a-x$	$b-x$	$\boxed{a+b-2x}$	$\boxed{b-a}$
b) $\boxed{a \leq x \leq b}$	$x-a$	$b-x$	$\cancel{x}-a+b-\cancel{x} = \boxed{b-a}$	$\boxed{b-a}$
c) $\boxed{a \leq b < x}$	$x-a$	$x-b$	$x-a+x-b = \boxed{2x-a-b}$	$\boxed{b-a}$

égalité ? : $a+\cancel{b}-2x \overset{?}{=} \cancel{b}-a \iff 2a = 2x \iff \boxed{x=a}$ impossible

On a toujours égalité :

égalité ? : $2x - \cancel{a} - b \overset{?}{=} b - \cancel{a} \iff 2x = 2b \iff \underline{x=b}$ impossible

On a divisé en trois cas : $x < a$, $a \leq x \leq b$, $b < x$

$\mathbb{R} =]-\infty, a[\cup [a,b] \cup]b, +\infty[$

On aurait pu raisonner en distinguant $\mathbb{R} =]-\infty, a] \cup]a,b[\cup [b, +\infty[$

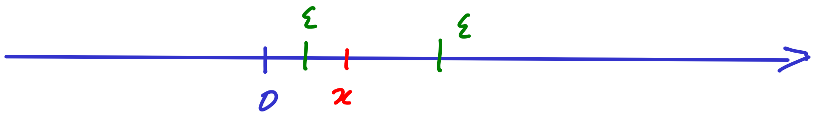
Conclusion : $x \in [a,b] \iff \boxed{|x-a| + |x-b| = |b-a|} = b-a$

Sur les bornes supérieures et inférieures

Exercice 8 Soit $x \in \mathbb{R}$ vérifiant : $[\forall \varepsilon > 0, \; x < \varepsilon]$

Alors $\boxed{x \leq 0}$.

Preuve : par l'absurde : je suppose $\begin{cases} \boxed{\forall \varepsilon > 0, \; x < \varepsilon} \\ \text{et } x > 0 \iff \neg [x \leq 0] \end{cases}$



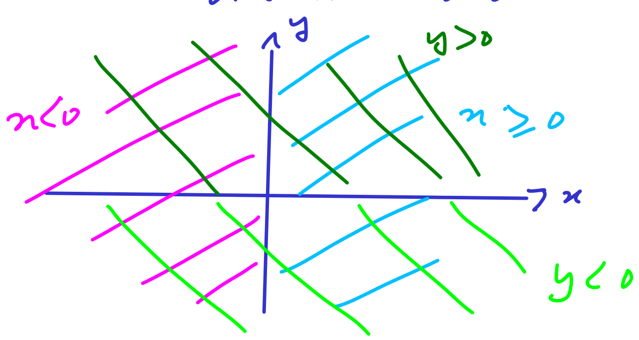
Si on choisit $\varepsilon = \frac{x}{2}$, on a : $\varepsilon = \frac{x}{2} > 0$

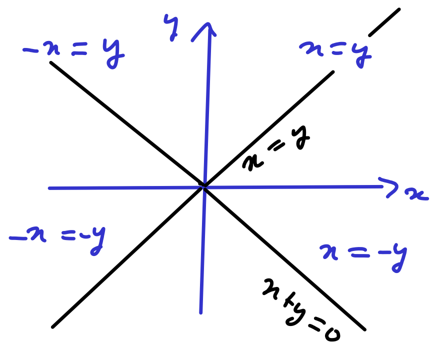
et $\underline{0 < \varepsilon = \frac{x}{2} < x}$ contredit l'hypothèse.

Contradiction

Exercice 11 Équations sur deux inconnues $x, y \in \mathbb{R}$:

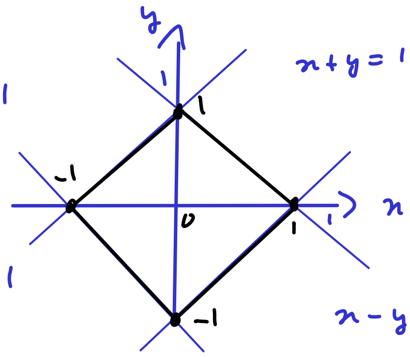
1. $|x| = |y|$ Regarder les cas $x \geq 0$, $x < 0$; $y \geq 0$, $y < 0$ et toutes les combinaisons.





2. $|x| + |y| = 1$

$y = 1+x \iff -x+y=1$



$x+y=1 \iff y = 1-x$

Normalement on obtient un vrai carré

$y=-1-x \iff -x-y=1$

$x-y=1 \iff y=-1+x$

Suite : à vous de jouer.

Ex 12 Inéquations avec une inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $x < |x-1| \iff \boxed{|x-1| - x} > 0$

signe de cette fonction ?

On se ramène à l'étude d'une fonction $f(x) = |x-1| - x$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\|x-1\|$	$1-x$	0	$x-1$
$\|x-1\| - x$	$1-2x$	-1	-1

$|x-1| - x$ toujours < 0.

Seul cas qui reste : $[x < 1] \wedge [1 - 2x > 0]$

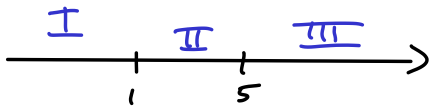
$\iff (x<1) \wedge [\frac{1}{2} > x] \iff [x < \frac{1}{2}]$

(car $\frac{1}{2} < 1$)

Solutions $]-\infty, \frac{1}{2}[$

....

5. $|x-5| < |x-1|$ Distinguer



Même principe

Autre méthode : $|x-5| < |x-1| \iff (x-5)^2 < (x-1)^2$

....

Suites réelles ou complexes.

$u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\quad u_n$: terme général.

Suite extraite : si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$

Définitions Suites majorées, minorées, bornées. Pour des suites réelles

a) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suite réelle, est majorée si

$\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majoré $\quad \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$

$\iff \exists A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq A.$

Exemples (i) $u_n = (-1)^n$: $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = -1$.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$

$\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$ est majoré $\Rightarrow (u_n)_n$ est majorée

(ii) $u_n = n$, $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ non majoré $\Rightarrow (u_n)_n$ est non majorée

b) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suite réelle, est minorée si

$\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est minoré.

Exemples (i) si $u_n = (-1)^n \to$ minorée

(ii) si $u_n = n \to$ minorée par 0

c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite réelle, si elle est <u>majorée</u> et <u>bornée</u>

<u>Critères</u> (a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $\iff$ $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>majorée</u>

$\iff \exists M>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\leq M.$

<u>Preuve</u> : facile

On ne <u>peut pas</u> parler de suites complexes <u>majorée</u> ou <u>minorée</u>

mais:

<u>Def</u> $(u_n)_n$, suite complexe, est <u>bornée</u> si $(\mathrm{Re}(u_n))_n$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_n$ sont <u>bornés toutes les deux</u>.

$\iff \exists M>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\leq M$

(b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite réelle, alors

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée ssi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée à partir <u>d'un certain rang</u>.

minorée / bornée — minorée / bornée

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>majorée</u> à partir du rang $n_0\in\mathbb{N}$ si

$\{u_n \mid n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0\}$ est majoré.

$\iff \left[\exists A\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow u_n\leq A\right]$

<u>Preuve</u> $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée $\underset{\text{simple}}{\Rightarrow}$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée à partir de n_0.

<u>Réciproque</u> Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée à partir de n_0.

$$\{u_n \mid n\in\mathbb{N}\} = \underbrace{\{u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}\}}_{\text{ensemble fini, donc majoré.}} \cup \underbrace{\{u_n \mid n\geq n_0\}}_{\text{majoré}}$$

$$\begin{cases} \exists A_0 \text{ t.q. } \forall n\in\{0,1,\dots,n_0-1\}, & u_n\leq A_0 \\ \exists A_1 \text{ t.q. } \forall n\geq n_0, & u_n\leq A_1 \end{cases}$$

Dans tous les cas $u_n\leq \max(A_0,A_1)$

<u>Définition</u> (suites croissantes, ...) Dans $\mathbb{R}$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

a) (u_n) est <u>croissante</u> si $\forall n, n' \in \mathbb{N}, \quad n \leqslant n' \Rightarrow u_n \leqslant u_{n'}$

a+) (u_n) est strictement <u>croissante</u> si $\forall n, n' \in \mathbb{N}, \quad n < n' \Rightarrow u_n < u_{n'}$

b) (u_n) est décroissante si ——— $\leqslant$ ——— $\Rightarrow u_n \geqslant u_{n'}$

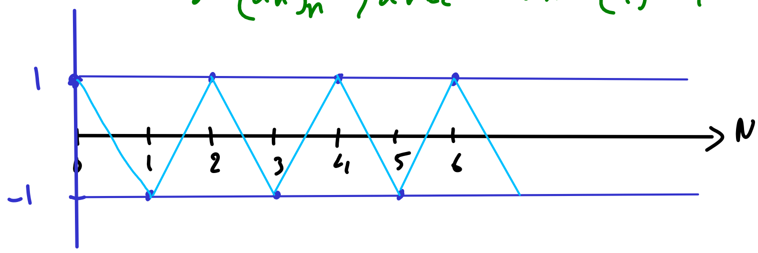
b+) (u_n) est strictement ——— si ——— $<$ ——— $\Rightarrow u_n > u_{n'}$

c) (u_n) est monotone si [elle est croissante] ou [elle est décroissante]

c') strictement … strictement … strictement

Mise en garde : • $(u_n)_n$, avec $u_n = n$, est strictement croissante

• $(u_n)_n$, avec $u_n = (-1)^n$:



suite <u>non monotone</u>

<u>Caractérisations</u> (i) $(u_n)_n$ est croissante $\Leftrightarrow \forall n, \quad u_n \leqslant u_{n+1}$

(preuve par récurrence)

(ii) $(u_n)_n$ strictement croissante $\Leftrightarrow \forall n, \quad u_n < u_{n+1}$

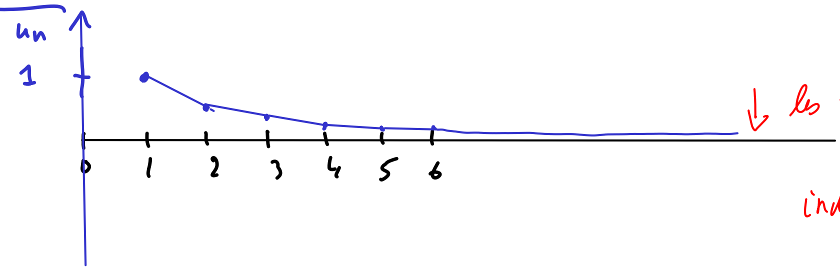
(iii) si $u_n > 0$, (u_n) croissante $\Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$

<u>Définition</u> Soit $u = (u_n)_n$, $v = (v_n)_n$, des suites à valeurs complexes, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

- la somme est la suite $(u_n + v_n)_n = u + v$
- le produit des deux suites est $(u_n v_n)_n = uv$
- on peut considérer $(\lambda u_n + \mu v_n)_n = \lambda u + \mu v$.

<u>Définition importante</u> : suite convergente.

<u>Idée</u> : $u_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$



les valeurs prises par u_n s'approchent indéfiniment de 0.

Ici u_n tend vers 0 à l'infini.

Déf Soit $(u_n)_n$ (à valeur complexe). On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un complexe $\ell\in\mathbb{C}$ si :

$$\boxed{\forall \varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow |u_n-\ell|<\varepsilon}$$

Attention, l'infini n'est pas un nombre, c'est un concept qui résume l'idée que n est autorisé à dépasser n'importe quelle borne.

Comment lire cette définition?

Commencer par la fin:

$$\underbrace{|u_n-\ell|}_{\text{distance euclidienne entre } u_n \text{ et } \ell}<\varepsilon$$ distance petite

$$\boxed{\exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow |u_n-\ell|<\varepsilon}$$ à partir d'un certain rang

$$\boxed{\forall \varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow |u_n-\ell|<\varepsilon}$$ le tout possible pour n'importe quel $\varepsilon>0$

Exemple $u_n=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $\ell=0$ $\quad |u_n-\ell|=|\frac{1}{n}-0|=|\frac{1}{n}|=\frac{1}{n}$

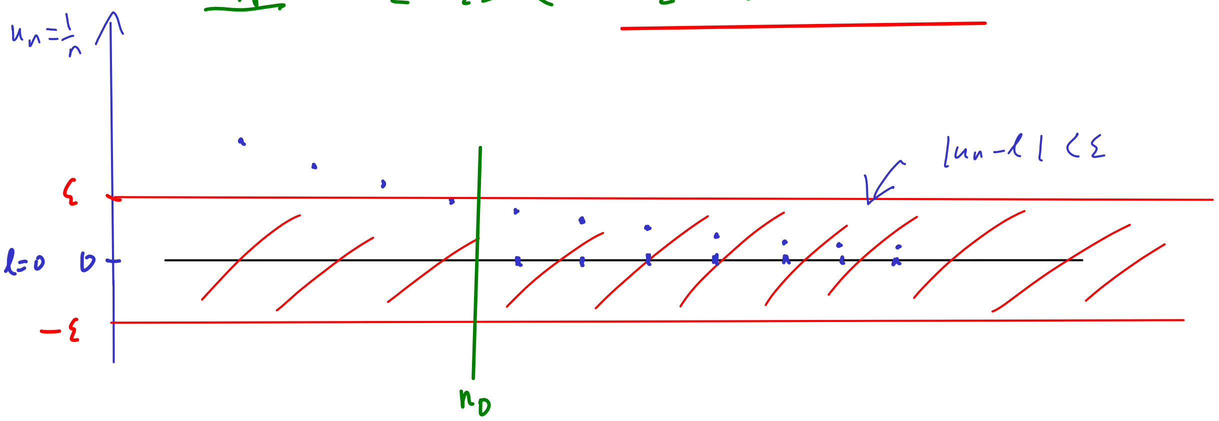
$\forall \varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon$

En effet, il suffit de prendre : $n_0=\lfloor 1/\varepsilon\rfloor+1$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq n_0 \Rightarrow n\geq \lfloor 1/\varepsilon\rfloor+1>\frac{1}{\varepsilon}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon$ ok.

Rappel $\lfloor 1/\varepsilon\rfloor\leq 1/\varepsilon<\lfloor 1/\varepsilon\rfloor+1$



Exemple $u_n = \frac{1-n}{1+n}$ Cette suite converge vers -1

Méthode de la terminale S $\left\{ u_n = \frac{\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n}+1} \right.$, dire que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0}$

et que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n}+1} = \frac{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} - 1}{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$

Méthode pour les grands : $\forall \varepsilon > 0 \ldots\ldots$ Comment on s'y prend?

Travail au brouillon : commencer par la fin:

$$\boxed{|u_n - (-1)| < \varepsilon}$$

sera possible pour tout $\varepsilon > 0$

Je calcule: $|u_n - (-1)| = |u_n + 1| = \left|\frac{1-n}{1+n} + 1\right| = \left|\frac{1 - \cancel{n} + 1 + \cancel{n}}{1+n}\right| = \frac{2}{1+n}$

Je majore $\left|\frac{2}{1+n}\right| < \ldots ? < \varepsilon$

ε m'est imposé, à quelle condition j'ai cette majoration ?

$$\frac{2}{1+n} < \varepsilon \iff \frac{2}{\varepsilon} < 1+n \iff n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$$ Toujours possible

Si $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 1$, Alors $n \geqslant n_0 \Rightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1 \iff \frac{2}{1+n} < \varepsilon$

$\iff |u_n + 1| < \varepsilon$

Bilan : $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n + 1| < \varepsilon}$

$\to n_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 1$ ——— et ça marche.