Exercices sur $\mathbb{R}$: (Feuille n° 8)

En vue de faire un devoir pour la semaine prochaine.

Exercice (2) Résoudre des inéquations

1. et 6. déjà faits

2. $\boxed{x < -|x-1|} \iff \boxed{x + |x-1| < 0}$

Distinguer les cas où $x-1 \geq 0$ et $x-1 \leq 0$

$\left(\Rightarrow \begin{array}{l} x \geq 1 \\ |x-1| = x-1 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{l} x \leq 1 \\ \Rightarrow \end{array} |x-1| = 1-x\right)$

Deux méthodes

1) Discussion cas par cas

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\lvert x-1\rvert$		$1-x$	0	$x-1$	
$x+\lvert x-1\rvert$		1	1	$2x-1$	
$x+\lvert x-1\rvert<0$		$\emptyset$		$x<\frac{1}{2}$	

$2x-1<0 \iff x<\frac{1}{2}$

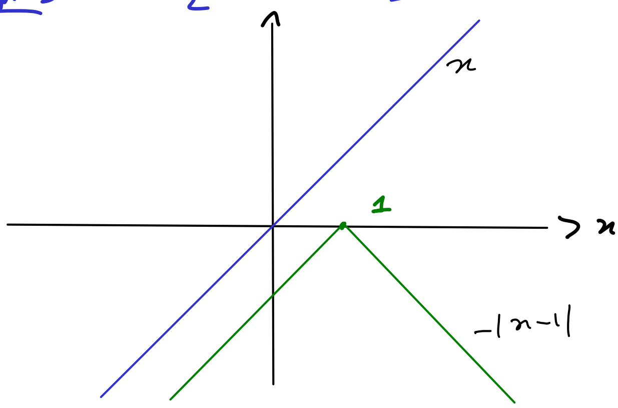
Synthèse $S = \left(\emptyset \underset{\text{"et"}}{\cap}]-\infty,1]\right) \underset{\text{"ou"}}{\cup} \left(]-\infty,\tfrac{1}{2}[\underset{\text{"et"}}{\cap} [1,+\infty[\right)$

S : ensemble des solutions

$S = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ Pas de solution

2) graphes de $[x \mapsto x]$ et $g : [x \mapsto -|x-1|]$

$\boxed{x < -|x-1|}$



On voit ici qu'il n'y a pas de solution.

$\begin{cases} g(x) = x-1 \text{ si } x \leq 1 \\ g(x) = 1-x \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

5. $x^2 < \left|x - \frac{1}{4}\right|$

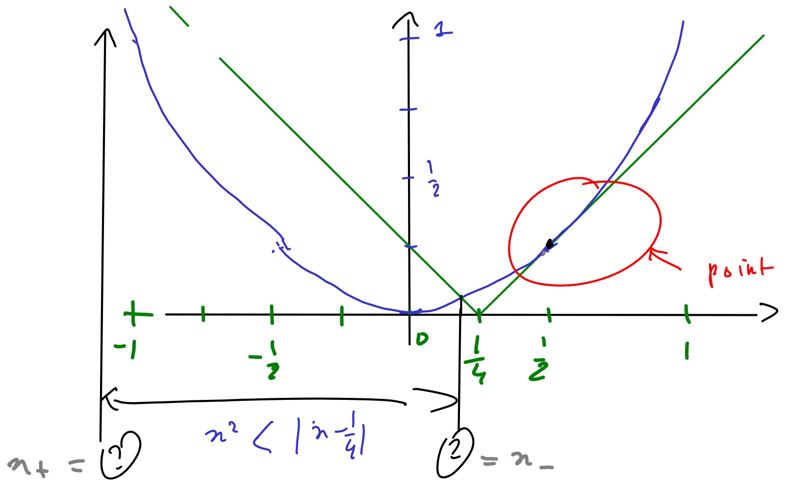
$a < b \ (<0) \iff a^2 > b^2$

$(0<) \ a < b \iff a^2 < b^2$

Par une étude des deux fonctions en jeu.

$f : [x \mapsto x^2]$, $g : \left[x \mapsto \left|x - \frac{1}{4}\right|\right]$

$\begin{cases} g(x) = x - \frac{1}{4} & \text{si } x \leq \frac{1}{4} \\ g(x) = \frac{1}{4} - x & \text{si } x \geq \frac{1}{4} \end{cases}$



$x^2 < |x - \frac{1}{4}|$

graphe bleu sous le vert

point à regarder en détail

Vérifier des conjectures: Conjecture faite à partir du dessin

- Si $\boxed{x \geqslant \frac{1}{4}, \quad x^2 \geqslant |x-\frac{1}{4}|}$ → pas de solution ?

$x^2 \geqslant x - \frac{1}{4} \iff x^2 - x + \frac{1}{4} \geqslant 0$?

$\Delta = 1 - \frac{4}{4} = 0$, $x^2 - x + \frac{1}{4} = (x-\frac{1}{2})^2 \geqslant 0$ Conjecture vraie

La conjecture contredit $x^2 < |x - \frac{1}{4}|$ → pas de solution si $x \geqslant \frac{1}{4}$

- Si $\boxed{x \leqslant \frac{1}{4}}$, Inéquation : $x^2 < |x-\frac{1}{4}| = \frac{1}{4} - x$

$x^2 + x - \frac{1}{4} < 0$

$\Delta = 1 + \frac{4}{4} = 2$ $\quad x_- = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$ $\quad x_+ = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$

- deux racines réelles.
- coefficient de x^2 $(=1)$ est > 0.

donc $x^2 + x - \frac{1}{4} < 0 \iff x \in \left]\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right[$

Synthèse Donc $x \in \left]\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right[\cap \left]-\infty, \frac{1}{4}\right]$

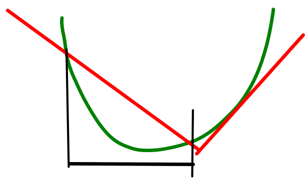
Je prétends que $\frac{-1+\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{4} \iff -2+2\sqrt{2} < 1$

$\iff 2\sqrt{2} < 3 \iff 8 < 9$ OK

Donc $\frac{-1-\sqrt{2}}{2} < \frac{-1+\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{4}$

$\Rightarrow x \in \left]\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{4}\right[$

Synthèse Solutions $= \left]\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right[\cup \emptyset = \left]\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right[$.



Morale

En pratique : 1) faire des dessins sur un brouillon → idée de la situation → conjecture

2) Distinguer les cas et faire des calculs.

Définition d'une définition convergente $(u_n)_n$ vers $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon}$$

On dit que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ

On écrit: $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell}$ ou $\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell}$

Proposition Si $(u_n)_n$ converge, alors la limite de cette suite est unique

Preuve : Supposons que ℓ et ℓ' soient des limite de $(u_n)_n$.

$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell'$: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0'(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \; n \geqslant n_0' \Rightarrow |u_n - \ell'| < \varepsilon$

$\boxed{\forall \varepsilon > 0}$, $\exists N_0 = \max(n_0, n_0')$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{n \geqslant N_0} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geqslant n_0 & \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon \\ n \geqslant n_0' & \Rightarrow |u_n - \ell'| < \varepsilon \end{cases}$$

$\boxed{\forall \varepsilon > 0}$, $\boxed{|\ell - \ell'|} = |(u_n - \ell') - (u_n - \ell)| \leqslant |u_n - \ell'| + |u_n - \ell| \boxed{< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon}$

Vu en exercice (n°8, Feuille 6) : $[\forall \varepsilon > 0, |\ell - \ell'| < \varepsilon]$
$\Leftrightarrow \quad |\ell - \ell'| \leqslant 0$

Donc $|\ell - \ell'| = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ell = \ell'}$

Proposition Soit $(u_n)_n$ une suite qui converge vers ℓ.
Soit $(u_{\varphi(n)})_n$ une sous-suite extraite. Alors $(u_{\varphi(n)})_n$ converge vers ℓ.

Preuve Hypothèse:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$

Remarque : φ est strictement croissante donc $\boxed{\varphi(n) \geqslant n, \; \forall n \in \mathbb{N}}$

[On peut le montrer par récurrence] Donc

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ (le même qu'au-dessus), $\forall n \in \mathbb{N}$,

$n \geq n_0 \Rightarrow \varphi(n) \geq n \geq n_0 \Rightarrow |u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$

On utilise le plus souvent la contraposée (énoncé équivalent, "formulé a contrario")

Contraposée de $[u_n \underset{n\to \ell}{\to} \ell] \Rightarrow [u_{\varphi(n)} \underset{n\to\ell}{\to} \ell]$

$[u_{\varphi(n)} \underset{n\to\ell}{\not\to} \ell] \Rightarrow [u_n \underset{n\to\ell}{\not\to} \ell]$

Exemple $(u_n)_n$ $u_n = (-1)^n$ Cette suite diverge

= ne converge pas.

Par l'absurde : Supposons que $(u_n)_n$ converge vers ℓ.

Alors (Proposition 2) toute sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ converge vers ℓ

$\Rightarrow$ $(u_{2n})_n$, avec $u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$, converge vers 1

$\Rightarrow$ $(u_{2n+1})_n$, avec $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$, converge vers -1.

Donc $\ell = 1$ et $\ell = -1$ (ce qui contredit la Proposition 1 qui dit que la limite est unique)

Contradiction donc $((-1)^n)_n$ ne converge pas.

Proposition Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$

valeur absolue ou module si la suite est complexe.

Preuve : relire attentivement la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Proposition Toute suite convergente est bornée

Attention, la réciproque est fausse (penser à $(-1)^n$).

Preuve Hypothèse Soit $(u_n)_n$ et $\ell \in \mathbb{C}$, telle que

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$.

Je choisis $\varepsilon = 1$: $\boxed{\exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \boxed{|u_n - \ell| < 1}}$

Dans $\mathbb{R}$

$|u_n - \ell| < 1 \iff -1 < u_n - \ell < 1$

$\iff \underbrace{\ell - 1}_{\text{minoré}} < u_n < \underbrace{\ell + 1}_{\text{majoré}}$

Donc (u_n) est bornée à partir de n_0.

Toute suite bornée à partir d'un certain rang est bornée

$\Rightarrow (u_n)_n$ est bornée.

Dans $\mathbb{C}$

$$|u_n| = |\ell + (u_n - \ell)| \leq |\ell| + \boxed{|u_n - \ell|}$$

Inégalité triangulaire

$$< |\ell| + \boxed{1} \quad \text{si } n \geq n_0$$

Donc (u_n) est bornée à partir de $n_0 \Rightarrow (u_n)_n$ est bornée.

Exercices (feuille 7)

Exercice 1 Montrer que des suites convergent, en utilisant la définition.

(a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n-1}{3n+1} = \dfrac{2}{3}$ $\qquad u_n = \dfrac{2n-1}{3n+1}$

Par quoi commencer ? Par la fin de la phrase $\boxed{\ldots \; |u_n - \frac{2}{3}| < \varepsilon}$

On tape sur $|u_n - \frac{2}{3}|$:

$$u_n - \frac{2}{3} = \frac{2n-1}{3n+1} - \frac{2}{3} = \frac{2n-1}{3n+1} - \frac{\frac{2}{3}(3n+1)}{3n+1}$$

$$= \frac{\cancel{2n} - 1 - \cancel{2n} - \frac{2}{3}}{3n+1} = -\frac{5}{3} \, \frac{1}{3n+1}$$

$$\left|u_n - \frac{2}{3}\right| = \frac{5}{3} \, \frac{1}{3n+1}$$

A quelle condition sur n, $\dfrac{5}{3} \, \dfrac{1}{3n+1} < \varepsilon$?

Pourquoi ? Si j'ai ça, alors $|u_n - \frac{2}{3}| < \frac{5}{3} \, \frac{1}{3n+1} < \varepsilon$

$$\frac{5}{3} \, \frac{1}{3n+1} < \varepsilon \iff \frac{1}{3n+1} < \frac{3\varepsilon}{5} \iff \frac{5}{3\varepsilon} < 3n+1$$

$$\iff \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3\varepsilon} - 1\right) < n \iff n > \frac{5}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}$$

Tout cela marche $\forall \varepsilon > 0$

Je choisis $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > \frac{5}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}$ (toujours possible)

alors $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \; n \geq n_0 \Rightarrow n > \frac{5}{9\varepsilon} - \frac{1}{3} \iff \frac{5}{3} \, \frac{1}{3n+1} < \varepsilon \Rightarrow |u_n - \frac{2}{3}| < \varepsilon}$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{2}{3}$

4. $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n^2-1} - n = 0$

$(\sqrt{n^2-1} - n)^2 = \sqrt{n^2-1}^2 - 2n\sqrt{n^2-1} + n^2$
$= n^2 - 1 - 2n\underbrace{\sqrt{n^2-1}}_{\text{embêtant.}} + n^2$

Astuce : "quantité conjuguée"
multiplier par $\boxed{\sqrt{n^2-1} + n}$

$$\sqrt{n^2-1} - n = \frac{(\sqrt{n^2-1} - n)(\sqrt{n^2-1} + n)}{\sqrt{n^2-1} + n} = \frac{(\sqrt{n^2-1})^2 - n^2}{n + \sqrt{n^2-1}}$$

$$= \frac{n^2 - 1 - n^2}{n + \sqrt{n^2-1}} = \frac{-1}{n + \sqrt{n^2-1}}$$

$$\left| \sqrt{n^2-1} - n - 0 \right| = \frac{1}{n + \sqrt{n^2-1}} < \frac{1}{n} \quad \dots \text{conclure.}$$