Limites : suites convergentes

Déf $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon}$$

Théorèmes
- Unicité de la limite, si elle existe
- Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors $\forall (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$

Contraposée très utile:

Exercice 1, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{3n+1} = \dfrac{2}{3}$

- $u_n = \sqrt{n^2-1} - n$: $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Quantité conjuguée : $u_n = \dfrac{(\sqrt{n^2-1}-n)(\sqrt{n^2-1}+n)}{\sqrt{n^2-1}+n} = \dfrac{\cancel{n^2}-1-\cancel{n^2}}{n+\sqrt{n^2-1}} = \dfrac{-1}{n+\sqrt{n^2-1}}$

$\Rightarrow |u_n| = \dfrac{1}{n+\sqrt{n^2-1}} \leq \boxed{\dfrac{1}{n} < \varepsilon}$ si $\boxed{n > \dfrac{1}{\varepsilon}}$

car $n + \sqrt{n^2-1} \geq n$ (si $n \geq 1$)

on va aux calculs les plus simples qui permettent de contrôler $|u_n|$

Conclusion : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ (il suffit de prendre $\boxed{n_0 > \max(1, \frac{1}{\varepsilon})}$),

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ $\Rightarrow n \geq 1 \Rightarrow |u_n| \leq \dfrac{1}{n}$

$\Rightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \varepsilon$

$|u_n| < \varepsilon$

(cours) **Définition** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

a) On dit que $\boxed{u_n \text{ tend vers } +\infty}$ et on écrit $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$ si

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A}$$

b) On dit que $\boxed{u_n \text{ tend vers } -\infty}$ et on écrit $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$ si

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq A}$$

⚠ Les suite qui tendent vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ sont divergentes

---

Exercice 1 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n-1}-n = -\infty$: $u_n = \sqrt{n-1}-n$ défini si $n \geq 1$.

Montrer que : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt{n-1}-n \leq A.$

Comment procéder : on minore $\underbrace{\sqrt{n-1}}_{\text{embêtant}} \underbrace{-n}_{\text{bon.}}$

$n=1$	2	3	4	5	...
$-n=-1$	-2	-3	-4	-5	...

parce que $\sqrt{n-1} > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n-1} = +\infty$

Qui l'emporte entre $\sqrt{n-1}$ et $-n$? c'est $-n$

$$\sqrt{n-1}-n = \frac{(\sqrt{n-1}-n)(\sqrt{n-1}+n)}{\sqrt{n-1}+n} = \frac{n-1-n^2}{\sqrt{n-1}+n} = \frac{-n^2+n-1}{n+\sqrt{n-1}}$$

$$= \frac{-\frac{n^2}{n}+\frac{n}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}+\sqrt{\frac{n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}} = \boxed{\frac{-n+1\left(-\frac{1}{n}\right)}{1+\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}}}$$

terme dominant

expression compliquée

Supposons $\boxed{n \geq 1} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{n} < 0$

$$u_n = \sqrt{n-1}-n \leq \frac{-n}{1+\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}} + \frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}}$$

Si $\alpha, \beta > 0$, $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{\beta}$

$$1 \leq 1+\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} \leq 1+1=2$$

$$1 \geq \frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}} \geq \frac{1}{2}$$

$0 \leq \frac{1}{n}-\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$

$$u_n \leq \frac{-n}{2} + 1 = 1 - \frac{n}{2}$$

Je choisis n_0 tel que $1-\frac{n_0}{2} \leq A \Leftrightarrow 2(1-A) \leq n_0$

Synthèse : $\forall \varepsilon > 0$, je choisis $n_0 \geq 2-2A$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow n \geq 2-2A \Rightarrow \boxed{u_n \leq A}$

Bonne nouvelle : on n'est pas toujours obligé de faire tous les calculs.
Des théorèmes sont là pour nous aider.

Thm $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n\to+\infty}(u_n-\ell)=0 \iff \lim_{n\to+\infty}|u_n-\ell|=0$

Preuve : exercice (utiliser la définition de la limite)

Thm Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ deux suites complexes.

a) Si $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell}$ alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda\ell}$

signifie que : " $(u_n)_n$ converge et sa limite est ℓ "

Preuve : exercice.

b) Si $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_1}$ et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell_2}$ alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = \ell_1+\ell_2}$

c) Si $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_1}$ et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell_2}$ alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell_1\ell_2}$

d) Si $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell}$ et si $\boxed{\ell \neq 0}$

alors $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang $(\exists n_0, \forall n \geq n_0, u_n \neq 0)$

et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}}$

Preuve b) Hypothèses:

$\forall \varepsilon>0, \exists n_1(\varepsilon), \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_1(\varepsilon) \Rightarrow |u_n-\ell_1|<\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0, \exists n_2(\varepsilon), \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_2(\varepsilon) \Rightarrow |v_n-\ell_2|<\varepsilon$

je dois "taper" sur $|u_n+v_n-(\ell_1-\ell_2)|$ ...

$$\boxed{|u_n+v_n-\ell_1-\ell_2| = |(u_n-\ell_1)+(v_n-\ell_2)| \underset{\text{inégalité triangulaire}}{\leq} |u_n-\ell_1|+|v_n-\ell_2|}$$

$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

à condition que $\begin{cases} n\geq n_1(\varepsilon) \\ n\geq n_2(\varepsilon)\end{cases}$

Soit $n_0(\varepsilon) = \max(n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon))$,

$\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0 \Rightarrow \begin{cases} n\geq n_1 \Rightarrow |u_n-\ell_1|<\varepsilon \\ n\geq n_2 \Rightarrow |v_n-\ell_2|<\varepsilon \end{cases} \Rightarrow |u_n+v_n-\ell_1-\ell_2| < 2\varepsilon$

c) (Produit de deux suites)

Idée 1: $|u_nv_n-\ell_1\ell_2| = |u_n(v_n-\ell_2)+(u_n-\ell_1)\ell_2|$

$\underset{\text{inégalité triangulaire}}{\leq} |u_n(v_n-\ell_2)| + |(u_n-\ell_1)\ell_2|$

Que faire ? $\leq |u_n|\,\underbrace{|v_n-\ell_2|}_{<\varepsilon} + |\ell_2|\,\underbrace{|u_n-\ell_1|}_{<\varepsilon}$

Idée 2 : utiliser le Thm : "Toute suite convergente est bornée"

$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| < C$

Donc : $\boxed{|u_n v_n - \ell_1 \ell_2| \leq C |v_n - \ell_2| + |\ell_2| \, |u_n - \ell_1|}$

$$(\dots\dots) \leq (C + |\ell_2|)\varepsilon$$

d) $\dfrac{1}{u_n}$? Pourquoi, si $\boxed{\ell \neq 0}$, $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang ?

Appliquer avec $\varepsilon = |\ell|$: $\quad \| \; \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$

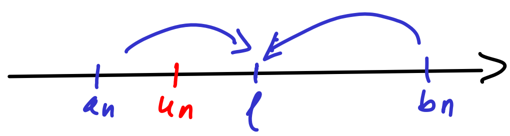
pour $\varepsilon = |\ell| > 0$, ______________ $\Rightarrow |u_n - \ell| < |\ell|$

Alors $|u_n| = |(u_n - \ell) + \ell| \geq \big| |u_n - \ell| - |\ell| \big| = |\ell| - |u_n - \ell| > |\ell| - |\ell| = 0.$

Inégalité triangulaire inverse   Car $|\ell| > |u_n - \ell|$

"Théorème des gendarmes"

Soit $\underbrace{(a_n)_n, (b_n)_n}_{\text{gendarmes}}$, $\underbrace{(u_n)_n}_{\text{voleur}}$.



Hypothèses (i) $\forall n \in \mathbb{N}$ (ou à partir d'un certain rang)

$$\boxed{a_n \leq u_n \leq b_n}$$

(ii) $\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = \ell}$ Mêmes limites !

Conclusion : $\boxed{\lim u_n = \ell}$

Preuve (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_a(\varepsilon), \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_a(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$

$\boxed{\forall \varepsilon > 0}, \exists n_b(\varepsilon), \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_b(\varepsilon) \Rightarrow |b_n - \ell| < \varepsilon$

Je prends $\boxed{n_0(\varepsilon)} = \max(n_a(\varepsilon), n_b(\varepsilon))$, alors

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{n \geq n_0(\varepsilon)} \Rightarrow \begin{cases} n \geq n_a(\varepsilon) \Rightarrow \\ n \geq n_b(\varepsilon) \Rightarrow \end{cases} \boxed{\begin{array}{l} |a_n - \ell| < \varepsilon \\ |b_n - \ell| < \varepsilon \end{array}}$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} -\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon \\ -\varepsilon < b_n - \ell < \varepsilon \end{array}}$$

Utilisons (i) $\quad \underline{a_n \leq u_n \leq b_n}$

$$\Downarrow$$

$$-\varepsilon < a_n - \ell \leq u_n - \ell \leq b_n - \ell < \varepsilon \Leftarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{|u_n - \ell| < \varepsilon}$$

Exemple : retour à l'Exercice 1 (on revisite cet exercice, sans utiliser la définition)

$u_n = \dfrac{2n-1}{3n+1}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{3}$

$u_n = \dfrac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2-\frac{1}{n}\right) = 2$

De même $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3+\frac{1}{n}\right) = 3 \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{3}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2-\frac{1}{n}\right)\dfrac{1}{3+\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2-\frac{1}{n}\right) \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3+\frac{1}{n}}$

$= 2 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

Fin de l'exercice 1 $u_n = n^2 - \underbrace{n \sin n}$, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

(rappel : utiliser la définition)

difficulté : le signe de ce terme est incontrôlé.

Point essentiel : n^2 l'emporte sur le reste.

$-1 \leq \sin \theta \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sin n \leq 1$, $\forall n$

$\Rightarrow \underline{-n \leq n \sin n} \leq n$

But. $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A$

Commencer par $u_n \geq \dots$

$u_n = n^2 - n\sin n \geq n^2 - n$

Supposons $n \geq 2 \Rightarrow n^2 = n \times n \geq 2n \Rightarrow u_n \geq 2n - n = n$

Pour A, je choisis $n_0 = \max(2, \lfloor A \rfloor + 1)$. Alors

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$n \geq n_0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} n \geq 2 \Rightarrow u_n \geq n \\ n \geq A \Rightarrow n \geq A \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \geq A.$

Exercice 4 Calculer des limites de suites

1. $u_n = 3n^2 - 2n$

Première tâche : avoir une idée du résultat.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n = -\infty$

Cas non couvert par un théorème sur les sommes de suites mais n^2 l'emporte sur n. $\longrightarrow$ Conjecture : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$? ?

But : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A$

$\longrightarrow$ minorer u_n :

$$u_n = 3n^2 - 2n = n\underbrace{(3n-2)}_{\text{rendre ce coefficient } \geq 1}$$

$$\Leftrightarrow 3n - 2 \geq 1 \Leftrightarrow 3n \geq 3 \Leftrightarrow n \geq 1$$

Je suppose que $n \geq 1$, $u_n = n(3n-2) \geq n$

Pour tout $A \in \mathbb{R}$, je prends $n_0 = \max(1, \lfloor A \rfloor + 1)$, ça marche...

à vérifier ~~vous-même~~