Raisonnement mathématique (RM1) : retour sur l'exercice 1 de la feuille n°3

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E symétrique et transitive.

Que penser du raisonnement ?

Raisonnement faux

" $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$ (car $\mathcal{R}$ est symétrique)

or $(x \mathcal{R} y)$ et $(y \mathcal{R} x) \Rightarrow x \mathcal{R} x$ (car $\mathcal{R}$ est transitive)

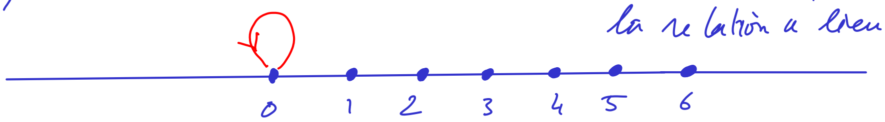
donc $\mathcal{R}$ est réflexive ".

Problème : si $x \in E$ et s'il n'y aucun élément $y \in E$ tel que $x \mathcal{R} y$, on ne peut pas démarrer le raisonnement.

(problème d'initialisation du raisonnement)

Exemple $E = \mathbb{N}$, $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x = -y$

le seul couple pour lequel la relation a lieu est $(0,0)$



Complément sur les relations binaires : une relation $\mathcal{R}$ est totale si

$\forall (x,y) \in E \times E$, on a soit $(x \mathcal{R} y) \vee (y \mathcal{R} x)$
$\boxed{\text{ou}}$

Retour aux suites (Fin du RM1)

Théorème "de la limite monotone"

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle croissante. Alors on a l'alternative :

(alternative : choix entre deux options, chacune des deux exclut l'autre).

- Soit la suite est majorée, alors elle converge
- Soit la suite n'est pas majorée, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

(Version analogue si $(u_n) \searrow$, minorée ou non minorée)

Preuve Soit $(u_n)_n$ croissante. Soit $U = \{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \}$.

$\boxed{U \neq \emptyset}$

- Soit U est majoré $\Leftrightarrow$ (u_n) est majorée

Alors U admet une borne supérieure $\ell \in \mathbb{R}$.

Définition de " $\ell = \sup U$ " :

- ℓ majore U : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell}$
- ℓ : plus petit majorant de U : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $u_n > \ell - \varepsilon$

On en déduit

$\boxed{\forall \varepsilon > 0}$, $\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}}$ tel que $\underline{\ell - \varepsilon < u_{n_0}} \leq \ell$

$(u_n)_n$ est croissante $\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow \underline{u_{n_0} \leq u_n} \leq \ell$

$\Rightarrow \underline{\ell - \varepsilon < u_{n_0}} \leq u_n \leq \ell$.

$\Rightarrow \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$

$\Leftrightarrow \boxed{|u_n - \ell| < \varepsilon}$

Donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell}$

• Soit U non majoré $\Leftrightarrow$ $(u_n)_n$ est non majorée

$\neg \left[\exists A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq A\right]$

$\Leftrightarrow \left[\forall A \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, \quad u_n > A\right]$

Donc $\left[\begin{array}{l} \forall A \in \mathbb{R}, \text{ je choisis } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_{n_0} > A. \\ \text{alors } \forall n \in \mathbb{N}, \ \underbrace{n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq u_{n_0}}_{\text{suite croissante}} > A \end{array}\right]$

C'est à dire $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

Exemples : a) dernier exercice dans le devoir.

b) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ $\quad u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (série harmonique)

Cette suite est strictement croissante : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} > u_n$

Cette suite n'est pas majorée (Nicole Oresme, XIII ème siècle)

donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$ d'après le théorème.

Preuve Evaluons u_n pour $n = 2^p$

$u_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $\quad u_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

$$u_{2^3} = u_8 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$$
$$= 1 + \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{k} \right)$$

$$u_8 > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}$$

$$u_{2^p} = 1 + \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{k} \right)$$

$$2^{j-1}+1 \leq k \leq 2^j$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{2^{j-1}+1} \geq \boxed{\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2^j}}$$

$$\geq 1 + \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{2^j} \right)$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{p} \frac{2^j - 2^{j-1}}{2^j}$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{p} \frac{2^{j-1}}{2^j} = 1 + \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{2} = 1 + \frac{p}{2}$$

(exercice : écrire $u_{16} = u_{2^4}$)

$$U = \{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \} \supset \underbrace{\{ u_{2^p} \mid p \in \mathbb{N} \}}_{\text{non majoré}} \quad \text{car} \quad u_{2^p} \geq 1 + \frac{p}{2}$$

Donc U n'est pas majoré.

$(u_n)_n$ croissante, non majorée $\Rightarrow$ $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

c) $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

Encore une suite croissante : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} > u_n$

Cette suite majorée.

Remarque : si $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} \Leftrightarrow k^2 > k(k-1)$
$\Leftrightarrow k > k-1$

$\Rightarrow$ si $n \geq 2$, $u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)}$$

$$\Rightarrow u_n < 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} \right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n} \right)$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{n}$$

$$= 2 - \frac{1}{n}.$$

Donc $u_n < 2 - \frac{1}{n} < 2$

(u_n) est majorée et croissante. Donc elle converge (sa limite vaut $\frac{\pi^2}{4}$)
(fait appel à des notions très élaborées)

Un corollaire du théorème de la limite monotone.

Théorème Soit $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ deux suites réelles.

Supposons que : (i) (u_n) est croissante

(ii) (v_n) est décroissante

(iii) $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$

alors les deux suites convergent vers la même limite.

Preuve Rappel : toute suite convergente est bornée.

(iii) Soit $\boxed{d_n = u_n - v_n}$; $\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$ donc $(d_n)_n$ est bornée.

$\exists M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|d_n| \leq M \iff -M \leq d_n \leq M$

Donc $-M \leq u_n - v_n \leq M$

$v_n - M \leq u_n \leq v_n + M$

- Toute suite décroissante (v_n) est majorée : $v_0 \geq v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_n \dots$ par v_0.
- de même, toute croissante (u_n) est minorée par u_0.

Donc $u_n \leq v_n + M \leq v_0 + M$

$\Rightarrow (u_n)$ est majorée. Comme $(u_n)_n$ est croissante, $(u_n)_n$ converge.

Soit $\boxed{\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n}$

- $v_n = (v_n - u_n) + u_n = \underset{\to \ell}{u_n} - \underset{\to 0}{d_n}$

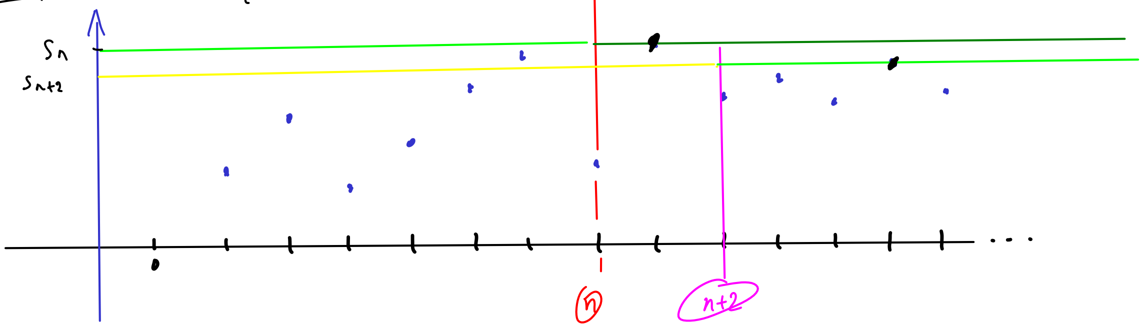
donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n} = \lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} d_n = \ell - 0 = \boxed{\ell}.$

Théorème de Bolzano-Weierstrass De toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Attention $(-1)^n$ est bornée, mais non convergente.

Plus mathématique : Soit $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite réelle bornée. Alors $\exists\, \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante $(\varphi(n+1) > \varphi(n))$ telle que $\exists\, \ell \in \mathbb{R}$, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell}$

Preuve $U_n = \{ u_k \mid k > n \}$



$s_n = \sup U_n$: $\boxed{\forall k > n, \quad u_k \leq s_n}$.

Existence de s_n : $U_n \neq \emptyset$ ($u_{n+1} \in U_n$) et U_n est majoré
(parce la suite est majorée) $\Rightarrow$ $\sup U_n$ existe

$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in U_n, \quad x > s_n - \varepsilon}$

Les ensembles U_n "rétrécissent" : $U_{n+1} \subset U_n$

$\Rightarrow$ $s_{n+1} = \sup U_{n+1} \leq \sup U_n = s_n$.

Pourquoi : s_n majore U_n, donc il majore U_{n+1}

comme s_{n+1} est le plus petit majorant de U_{n+1} $\Rightarrow$ $s_{n+1} \leq s_n$

Donc la suite $(s_n)_n$ est décroissante.

$(s_n)_n$ est minorée : $s_n = \sup U_n$

car $(u_n)_n$ est minorée : $\exists m \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$] $\Rightarrow$ $s_n \geq m$

Donc $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} s_n = \ell}$

Il reste à extraire une sous-suite de (u_n) qui convergera vers ℓ.

$s_n = \sup U_n \iff$ (★) $\boxed{\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, \ k > n \Rightarrow u_k \leq s_n \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists k > n, \quad s_n - \varepsilon < u_k \end{cases}}$

Construisons $\varphi(n)$ et donc $u_{\varphi(n)}$. avec : $\boxed{s_{\varphi(n)} - \frac{1}{n} < u_{\varphi(n+1)} < s_{\varphi(n)}}$

- $\varphi(0) = 0$
- passer de $\varphi(n)$ à $\varphi(n+1)$

$\varphi(n) \to U_{\varphi(n)} \to s_{\varphi(n)} = \sup U_{\varphi(n)}$.

J'utilise (★) avec $s_{\varphi(n)}$ et $\varepsilon = \frac{1}{n}$,

$\exists k > \varphi(n)$, $\quad s_{\varphi(n)} - \frac{1}{n} < u_k \leq s_{\varphi(n)}$

Je pose $k = \varphi(n+1)$ Alors $\boxed{\varphi(n+1) > \varphi(n)}$ et

$$\underbrace{S_{\varphi(n)} - \frac{1}{n}} < u_{\varphi(n+1)} \leq \underbrace{S_{\varphi(n)}}.$$

Théorème des gendarmes $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \ell \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} S_{\varphi(n)} = \ell \\ \text{donc } \lim\limits_{n \to +\infty} S_{\varphi(n)} - \frac{1}{n} = \ell. \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)} = \ell}$$

Le théorème de Bolzano-Weierstrass est vrai aussi pour les suites dans $\mathbb{C}$. (corollaire du théorème dans $\mathbb{R}$)

Exercice 11 Soit $x \in]0, +\infty[$ (u_n).

$$\left| \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{x}{u_n}\right) \end{array} \right.$$

[$\Rightarrow u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ se montre par récurrence]

1) $u_n \geq \sqrt{x}$, $\forall n \geq 1$ Si $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{x}{u_{n-1}}\right)$

$\boxed{u_n \geq \sqrt{x}} \iff \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{x}{u_{n-1}}\right) \geq \sqrt{x}$ $\times 2u_{n-1}$

$\iff (u_{n-1})^2 + x \geq 2\sqrt{x}\, u_{n-1}$

$\iff (u_{n-1})^2 - 2\sqrt{x}\, u_{n-1} + x \geq 0$

$\iff (u_{n-1} - \sqrt{x})^2 \geq 0$ Toujours vrai.

2) (u_n) est décroissante.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{x}{u_n}\right) - u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{u_n} - u_n\right)$$

Utilisons le fait que $u_n \geq \sqrt{x} \iff \underbrace{\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}} \iff \underbrace{-u_n \leq -\sqrt{x}}$

Donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{u_n} - u_n\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{x} - \sqrt{x}) = 0$

$\Rightarrow u_{n+1} \leq u_n.$

Conclusion $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell \geq \sqrt{x}$ (suite convergente)

3) Calculer ℓ ? $\boxed{u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{x}{u_n}\right)}$

Théorème sur les limites $(+, \times, \div)$ $x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 0$

$\Rightarrow \ell > 0$

$\Rightarrow \ell \neq 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{u_n} = \frac{x}{\ell}$$

etc.. $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{x}{u_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{x}{\ell}\right)$

$\displaystyle \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$

$$\boxed{\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{x}{\ell}\right)} \Leftrightarrow \ell^2 = x$$

Donc $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{x}$

<u>Complément</u> Si (u_n) est une suite <u>croissante</u>, <u>majorée</u> par M alors elle converge et $\boxed{\displaystyle \lim_{n\to+\infty} u_n \leq M}$

<u>Suites équivalentes</u> : si $(u_n)_n$ et (v_n) sont non nulles à partir d'un certain rang, $(u_n)_n \sim (v_n)_n \Leftrightarrow \displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$