https://webusers.imj-prg.fr/~frederic.helein/cours.html

Exercices : feuilles n° 2

Ex 1 On a utilisé : $[A \Rightarrow B] = [(\neg A) \vee B]$

Ex 2 $P(x)$: proposition qui porte sur une variable libre $x \in X$

Hypothèse $\exists x_0 \in X$ t.q. $P(x_0)$ vraie

Question (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

(i) $\forall x \in X, (P(x) \Rightarrow x = x_0)$

(ii) $\forall (x,y) \in X \times X, (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons que (i) est vrai, montrons (ii)

Je prends $(x,y) X \times X$ tels que $P(x) \wedge P(y)$

Alors (i) entraîne $(x = x_0) \wedge (y = x_0) \Rightarrow x = x_0 = y$

Donc (ii) est vraie.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons que (ii) est vrai, montrons (i)

On a besoin de l'hypothèse : $\exists x_0 \in X$, $P(x_0)$ est vrai

Je prends $x \in X$ tel que $P(x)$ soit vrai

Hypothèse : $x_0 \in X$ et $P(x_0)$ est vrai $] \; (P(x) \wedge P(x_0)) \underset{ii}{\Rightarrow} x = x_0$

Donc (i) est vraie.

Commentaire : deux façons de dire qu'il y a unicité de $x \in X$ tel que $P(x)$ soit vrai.

Morale : pour montrer qu'un problème a une unique solution, il suffit d'utiliser (ii) : montrer que si x et y sont deux solutions, alors $x = y$.

Rappel Contraposée de $[P \Rightarrow Q]$ est $[\neg Q \Rightarrow \neg P]$

Ces deux implications sont toujours équivalentes

Exercice 3 E, F : deux ensembles, $f : E \to F$ une application.

Déf (Rappel) Une application $f : E \to F$ est une loi qui associe à tout élément $x \in E$ un unique élément $y \in F$. On note $\boxed{y = f(x)}$

1) $A \subset E$ $\qquad A \subseteq f^{-1}(f(A))$

$f(A)$: image de A par f $= \{ y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x) \}$

$= \boxed{\{ f(x) \mid x \in A \}}$

Soit $B \subset F$ $\quad f^{-1}(B) = \{x \in E \mid \exists y \in B,\ f(x) = y\} \subset E$

(image inverse de B par f) $= \boxed{\{x \in E \mid f(x) \in B\}}$

Soit $x \in f^{-1}(f(A)) \iff \boxed{f(x) \in f(A)}$

$x \in A \iff \boxed{x \in A} \implies f(x) \in f(A)$

La ligne du dessous entraîne celle du dessus.

$[\forall x \in E,\ (x \in A) \implies (x \in f^{-1}(f(A)))]$

$\iff \boxed{A \subset f^{-1}(f(A))}$

Remarque Montrer $A \boxed{\subset} B$ revient à montrer $\forall x,\ x \in A \boxed{\implies} x \in B$

2) Montrer que, si f est injective, on a l'inclusion $\boxed{f^{-1}(f(A)) \subset A.}$

Rappel f est injective si $\forall y \in F$, y a au plus un antécédent par f (unicité de l'antécédent s'il antécédent)

Traduction : $\forall x_1, x_2 \in X,\ f(x_1) = f(x_2) = y$
(cf. Ex 2). $\implies x_1 = x_2$

Rappel : $x \in f^{-1}(f(A)) \iff f(x) \in f(A)$

Soit $\boxed{x \in f^{-1}(f(A))} \iff \boxed{f(x) \in f(A)}$

$\iff [\exists x_0 \in A,\ f(x) = f(x_0)]$

Rappel : $f(A) = \{f(x_0) \mid x_0 \in A\}$

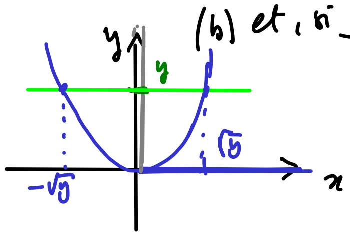
(f injective) $\implies \exists x_0 \in A,\ x = x_0 \implies \boxed{x \in A.}$

Donc $\boxed{f^{-1}(f(A)) \subset A \quad \text{si } f \text{ est injective}}$

$y = f(x) \in f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$
$\iff \exists a \in A \quad f(x) = f(a)$

Conclusion de 1. et 2. (a) On a toujours $A \subseteq f^{-1}(f(A))$
(b) et, si f est injective, $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$, donc $A = f^{-1}(f(A))$

Exemple
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$



$A = [0, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$f(A) = \{x^2 \mid x \in [0, +\infty[\} = [0, +\infty[$

$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}([0, +\infty[) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [0, +\infty[\}$
$= \mathbb{R}$ (car $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$)

Donc $A = [0, +\infty[\subset \mathbb{R} = f^{-1}(f(A))$
mais $\mathbb{R} \not\subset A$

Pourquoi ? f n'est pas injective !
si $y > 0$, $f^{-1}(\{y\}) = \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\}$. (si $y < 0$ $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$)

Attention ⚠

- $f : E \to F$ et si $B \subset F$, $f^{-1}(B)$ existe toujours
  $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.
  image inverse par f d'une partie $B \subset F$
- si $y \in F$, $f^{-1}(y)$ n'existe pas en général, sauf si $\boxed{f = \text{bijection}}$

$f^{-1} : F \to E$: application réciproque ou inverse

En revanche on peut écrire $f^{-1}(\{y\})$

Ex 3

3. $B \subset F \Rightarrow f(f^{-1}(B)) \subset B$ (toujours vrai)
4. si f est surjective, inclusion inverse

Utiliser $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$

$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} = \{y \in F \mid \exists a \in A, y = f(a)\}$

à faire chez vous, vous me scannez la réponse.

Exercice 4 $f : E \to F$, $A \subset E$, $B \subset F$

$$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B.$$

à faire chez vous.

Quelques mots sur le raisonnement par récurrence.

Permet de montrer une propriété de la forme $P(n)$, où $n \in \mathbb{N}$

ou $P(n)$ où $n \in \mathcal{N} = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq a\}$.

(par exemple $\mathcal{N} = \{2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$.)

Exemple : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x^{2n} \geq 0$ $(\mathcal{N} = \mathbb{N})$

J'introduis $P(n) : [\forall x \in \mathbb{R}, x^{2n} \geq 0]$

montrer une infinité de proposition en deux coups.

$P(0)$: $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^0 = 1 \geq 0$ ok (convention : $\forall y \in \mathbb{R}$ $y^0 = 1$)

$P(1)$: $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$

$P(2)$: $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^{2+2} = x^2 x^2 \geq 0$, etc.

Raisonnement par récurrence : deux étapes

1) Initialiser : montrer que $P(0)$ est vrai
2) Montrer que l'hérédité est vraie :

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{P(n) \Rightarrow P(n+1)}$

On ne montre pas directement que chaque $P(n)$ est vrai !

On montre l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Théorème : si on montre 1) et 2) $(P(0)$ & $[P(n) \Rightarrow P(n+1)])$

alors on a : $\boxed{P(n) \text{ vrai}, \forall n \in \mathbb{N}}$

Retour à l'exemple $P(n) : [\forall x \in \mathbb{R}, x^{2n} \geq 0]$

Etape 1 $P(0)$ marche $1 \geqslant 0$

Etape 2 Supposons $P(n)$, montrons $P(n+1)$

Supposons $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^{2n} \geqslant 0$, prenons $x \in \mathbb{R}$, $x^{2(n+1)}$

alors $x^{2(n+1)} = x^{2n+2} = \underbrace{x^{2n}}_{\geqslant 0 \text{ par } P(n)} \underbrace{x^2}_{} \text{ toujours } \geqslant 0 \quad \geqslant 0$

donc $P(n+1)$ vrai

Ce type de raisonnement est puissant !

Exercice 7 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$

Propriété $P(n)$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$

Stratégie : montrer (1) $P(0)$ est vrai

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$