Travail à faire chez vous :

Exercice 5, à scanner, à déposer sur moodle (Je vais créer un espace pour déposer)

Exercice 9 + Exercice 8

Pour la semaine prochaine.

Programme aujourd'hui : "cours" sur la récurrence.

Exercice 4, 6, ...

Raisonnement par récurrence

Montrer "en même temps" une suite infinie dénombrable de propositions logiques. Chaque proposition est numérotée par $n \in \mathbb{N}$.

Exemple $\mathcal{P}(n)$: $1+2+3+4+\dots+n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

But : montrer que $\mathcal{P}(n)$ vrai, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Stratégie de la récurrence : deux étapes

Etape 1 : Initialisation : on montre $\boxed{\mathcal{P}(0)}$ $(n=0)$

Etape 2 : Hérédité : on montre l'implication

$$\boxed{\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)}$$

Si je suppose que $\mathcal{P}(n)$, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.

$$\boxed{\mathcal{P}(n) : \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Expérimentation (psychologique) :

$$\boxed{\mathcal{P}(0) : \sum_{k=0}^{0} k = 0 \stackrel{?}{=} \frac{0\cdot(0+1)}{2} = 0}$$

Bon

Ce n'est pas une démonstration

$\mathcal{P}(1)$: $\sum_{k=0}^{1} k = 0+1 \stackrel{?}{=} \frac{1\cdot(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Bon

$\mathcal{P}(2)$: $\sum_{k=0}^{2} k = 0+1+2 = 3 \stackrel{?}{=} \frac{2\cdot(2+1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Bon

La preuve elle-même Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ vrai - déjà fait

Hérédité Supposons $\mathcal{P}(n)$: $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$\mathcal{P}(n+1)$? $\sum_{k=0}^{n+1} k = (1+2+\dots+n) + n+1 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + n+1$

$\boxed{\stackrel{\text{par } \mathcal{P}(n)}{=}} \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = (n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right) = \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)}{2}$$

Donc $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Récurrence terminée.

Principe : j'ai montré $\begin{cases} \mathcal{P}(0) \\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{cases}$ Donc $\boxed{\mathcal{P}(n) \text{ est vrai}, \forall n \in \mathbb{N}}$

Preuve heuristique : $\mathcal{P}(0) \Rightarrow \mathcal{P}(1) \Rightarrow \mathcal{P}(2) \Rightarrow \mathcal{P}(3) \Rightarrow$ etc.

Exercice 4 (ensembles et récurrence)

Soit $f : E \to F$ une application (E : ensemble de départ, F : ensemble d'arrivée)

$A \subset E$ et $B \subset F$

$$\boxed{f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B.}$$: sous-ensembles de F

Solution : procéder directement

Soit $y \in F$, $\boxed{y \in f(A \cap f^{-1}(B))} \Leftrightarrow \left[\exists x \in A \cap f^{-1}(B),\ y = f(x)\right]$

$\Leftrightarrow \left[\exists x \in A,\ x \in f^{-1}(B),\ y = f(x)\right]$

$\Leftrightarrow \left[\exists x \in A,\ \begin{cases} f(x) \in B \\ y = f(x) \end{cases}\right]$ permutation.

$\Leftrightarrow \left[\exists x \in A,\ \begin{cases} \boxed{y \in B} \\ y = f(x) \end{cases}\right]$ ne fait pas intervenir x.

$\Leftrightarrow \left[(y \in B) \wedge (\exists x \in A, y = f(x))\right]$

$\Leftrightarrow \left[(y \in B) \wedge (y \in f(A))\right]$

$\Leftrightarrow \boxed{y \in B \cap f(A).}$

Donc $f(A \cap f^{-1}(B)) = B \cap f(A)$..

Exercice 6 Ensembles (pas de récurrence)

Soit E un ensemble et $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite de sous-ensembles de E.

Rappel : ensemble des parties de E : $\mathcal{P}(E)$ (partition)

$\mathcal{P}(E)$ = ensemble de tous les sous-ensembles de E

(y compris : $\emptyset \subset E$, $E \subset E$)

$\boxed{X \subset E} \Leftrightarrow \boxed{X \in \mathcal{P}(E)}$

Question : si $\boxed{\mathcal{P}\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) \subseteq \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{P}(A_n)}$ (Départ)

alors $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que : $\boxed{\exists n \in \mathbb{N},\ \forall j \in \mathbb{N},\ A_j \subseteq A_n}$

Démarche : traduire calmement l'hypothèse.

Départ $\iff \forall X \subset E \; [X \in \mathcal{P}(\bigcup_{n \geq 0} A_n)] \Rightarrow [X \in \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{P}(A_n)]$

$\iff \forall X \subset \bigcup_{n \geq 0} A_n, \; [\exists n \geq 0, \; X \in \mathcal{P}(A_n)]$

$\iff [\forall X \subset (\bigcup_{j \geq 0} A_j), \; \exists n \in \mathbb{N}, \; X \subset A_n]$

Application avec : $X = \bigcup_{j \geq 0} A_j$, alors $[\exists n \in \mathbb{N}, \bigcup_{j \geq 0} A_j \subset A_n]$

$\iff \boxed{\exists n \in \mathbb{N}, \forall j \geq 0, A_j \subset A_n}$

Remarque générale

$[a \in \bigcup_{i \in I} B_i] \iff [\exists i \in I, \; a \in B_i]$

$[\bigcup_{i \in I} C_i \subset F] \iff [\forall i \in I, \; C_i \subset F]$

Dictionnaire

$[A \Rightarrow B]$	$[A \subset B]$
$[\neg A]$	$[E \setminus A]$
$\exists$	$\cup$
$\forall$	$\cap$

Idée générale

Exercice 7 (Récurrence) Montrer que :

$[\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k = (n-1) 2^{n+1} + 2]$

On nomme $\boxed{\mathcal{P}(n) : \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k = (n-1) 2^{n+1} + 2}$

Preuve Initialisation $\mathcal{P}(0)$?

gauche : $0 \cdot 2^0 = 0$

droite : $(0-1) 2^1 + 2 = -2 + 2 = 0$.

$\mathcal{P}(0)$ est vrai.

Hérédité Je suppose $\mathcal{P}(n)$, je montre $\mathcal{P}(n+1)$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k \cdot 2^k = \left(\sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k\right) + (n+1) 2^{(n+1)}$$

$$\overset{\mathcal{P}(n)}{=} \underbrace{(n-1) 2^{n+1}} + 2 + \underbrace{(n+1) 2^{(n+1)}}$$

$$= \underbrace{2^{n+1}(n-1+n+1)} + 2$$

$$= 2 \cdot n \cdot 2^{n+1} + 2 = n \, 2^{n+2} + 2$$

$$= ((n+1)-1) \, 2^{(n+1)+1} + 2$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.

(Rappel $\mathcal{P}(n)$: $\sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k = (n-1) 2^{n+1} + 2$)

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$.

Faites aussi l'exercice 8 (en plus de 5 et 9)
et envoyez-le moi. Ce sera noté !

Cours : récurrence forte (cf. Exercice 12).

Idée : Initialisation : on montre $\mathcal{P}(0)$

Hérédité :

$$\left.\begin{array}{c}\mathcal{P}(0)\\ \mathcal{P}(1)\\ \mathcal{P}(2)\\ \vdots \\ \mathcal{P}(n)\end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

(travail un peu plus compliqué)

Cette méthode permet de montrer des résultats qu'on ne saurait montrer par une récurrence simple

Exemple

$$\left.\begin{array}{c}\mathcal{P}(n-1)\\ \mathcal{P}(n)\end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

cas de récurrence forte plus simple.