RM1 Exercices (feuille 2) n° 5, 8 et 9, à rendre ce soir, avant 20h sur moodle (ce sera noté).

Différentes méthodes de démonstration :
- directe $A \Rightarrow B$
- récurrence P_n | P_0, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$
- contraposée $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$
- absurde. $[(A \wedge (\neg B))$ est impossible$]$

Exemple de récurrence : calcul des coefficients binomiaux :

C_n^k ou $\binom{n}{k}$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^k \, b^{n-k}}$$

Formule du binôme

Triangle de Pascal

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}} \\ C_0^0 = C_1^0 = C_2^0 = \dots = C_n^0 = \dots = 1 \\ C_n^k = 0 \text{ si } k > n. \end{array} \right.$$

$C_1^1 = C_0^0 + \cancel{C_0^1} = 1$

$C_0^0 = 1$

$C_1^0 = 1$ $\quad C_1^1 = 1$

$C_2^0 = 1$ $\quad C_2^1 = 2$ $\quad C_2^2 = 1$

$C_3^0 = 1$ $\quad C_3^1 = 3$ $\quad C_3^2 = 3$ $\quad C_3^3 = 1$

etc.

Formule "directe" $\quad C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ $\quad$ § démontre par récurrence

On va le montrer par récurrence.

Comment ?

Difficulté : formuler la bonne propriété P_n

P_n : $\forall k \in \mathbb{Z}$,
$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{si } k < 0, & C_n^k = 0 \\ \text{si } 0 \leq k \leq n, & C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} \\ \text{si } n < k, & C_n^k = 0 \end{array}}$$

Définition par récurrence

n \ k	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	
0	0	0	1	0	0	0				P_0
1	0	0	1	1	0	0				
2	0	0	1	2	1	0	0			
	0	0	1	3	3	1	0	0		P_3
	0	0	1	4	6	4	1	0	0	
	0	0	1	5	10	10	5	1	0	

$P_4 \Leftrightarrow$?

P_0 : $C_0^k = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $C_0^0 = 1$ $\quad$ Initialisation

$\underline{P_n \Rightarrow P_{n+1}}$ Hérédité

- Si $k<0$, $C_n^{k-1}=0$, $C_n^k=0$ $\Rightarrow$ $C_{n+1}^k = C_n^{k-1}+C_n^k = 0$
- Si $k=0$, $\left|\begin{array}{l} C_n^{k-1} = C_n^{-1} = 0 \\ C_n^k = C_n^0 = 1 \end{array}\right.$ et $\dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n!}{1\cdot n!} = 1$

$C_{n+1}^0 = C_n^{-1}+C_n^0 = 0 + C_n^0 = 1$

Donc $C_n^{k-1}+C_n^0 = 1$

- Si $1 \leq k \leq n$

$P_n \Rightarrow$ $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $C_n^{k+1} = \dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$

$$\underline{C_{n+1}^{k+1} \overset{\text{déf.}}{=} C_n^k + C_n^{k+1}} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{\cancel{k}+1+n-\cancel{k}}{(n-k)(k+1)}\right) = \boxed{\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}}$$

- Si $n<k$, on obtient $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1} = 0+0=0$

Conclusion : $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Exercice 10 (Récurrence) $a,b \in \mathbb{R}$

Hypothèse : $a>0$ et $a+b>0$.

$\boxed{P(n) : (a+b)^n \geq a^n + n a^{n-1} b}$

1. (Expérimentation pour le feeling) Vérifier $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$.

$P(0)$: $\left.\begin{array}{l} (a+b)^0 = 1 \\ a^0 + 0\cdot a^{-1} b = 1 + \dfrac{0\cdot b}{a} = 1 \end{array}\right]$ $(a+b)^0=1 \geq 1 = a^0 + 0\cdot a^{-1}b$

$P(1)$: $\left.\begin{array}{l} (a+b)^1 = a+b \\ a^1 + 1\cdot a^0 \cdot b = a + 1\cdot b = a+b \end{array}\right]$ $a+b \leq a+b$.

$P(2)$: $\left.\begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \\ a^2 + 2a^1 b = a^2+2ab \end{array}\right]$ $b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+2ab+b^2 \geq a^2+2ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq a^2+2ab$

2. Montrer $P(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\rightarrow$ Par récurrence.

Initialisation : déjà fait $P(0)$ vrai.

Hérédité ? $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ si $n \in \mathbb{N}$

Je suppose $P(n)$: $(a+b)^n \geq a^n + n a^{n-1} b$

Je veux montrer $P(n+1)$:

$$\boxed{(a+b)^{n+1}} = (a+b)^n \underline{(a+b)}$$

Hypothèses : $a>0$, $a+b>0$

$$\underset{P(n)}{\geq} (a^n + n a^{n-1} b)(a+b)$$

$$= a^{n+1} + \underbrace{a^n b} + n \underbrace{a^n b} + n a^{n-1} b^2$$

$$= a^{n+1} + (n+1) a^n b + \underbrace{n a^{n-1} b^2}_{\geq 0}$$

$a>0 \Rightarrow a^{n-1}>0$

$P(n+1)$. $$\geq \boxed{a^{n+1} + (n+1) a^n b}$$

Détails : $(a+b)^{n+1} \underset{\text{de } P(n)}{\overset{\text{Conséquence}}{\geq}} \underbrace{a^{n+1} + (n+1) a^n b}_{A} + \underbrace{n a^{n-1} b^2}_{B}$

$B = n a^{n-1} b^2 \geq 0$ car $a>0$

$B \geq 0 \Rightarrow A + B \geq A$

$\geq A = a^{n+1} + (n+1) a^n b$

Conséquence de $a>0$

Variante : Montrer que $(a+b)^{n+1} > a^{n+1} + (n+1) a^n b$ si $n \geq 2$

Exercice 11 : P_n : $n^2 > n+4$.

1. Est-ce que P_n est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$?

Non : ça ne marche pas pour $n=0$, ni $n=1$, ni pour pour $n=2$

n	0	1	2	3
n^2	0	1	4	9
$n+4$	4	5	6	7

Mais P_3 est vrai : $9 > 7$

2. $\boxed{P_n \Rightarrow P_{n+1}}$ est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$

Supposons P_0 vrai, P_1 : $n^2 = 1^2 = (1+0)^2 = 0^2 + 2 \times 1 \times 0 + 0^2 = 0^2 + 1$

$1+4$

$$1^2 = 0^2 + 1 \underset{P_0}{>} 0 + 4 + 1 = 1 + 4 \quad P_1$$

Cas général : Je suppose P_n : $\boxed{n^2 > n+4}$

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \underset{P_n}{>} n + 4 + 2n + 1 = (n+1) + 4 + 2n$$

$$\geq (n+1) + 4 \quad (P_{n+1})$$

$(n+1)^2 \geq (n+1) + 4 + 2n$

$2n \geq 0$

$(n+1)^2 + \cancel{2n} \geq (n+1) + 4 + \cancel{2n}$) CQFD

3. Donner un entier n_0 tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq n_0 \Rightarrow P_{n_0})$ $\quad \boxed{n_0 = 3}$

Pourquoi ? $\boxed{P_3 \text{ est vrai}}$ initialisation

$\boxed{P_n \Rightarrow P_{n+1}}$ est vrai, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ vrai, $\forall n \geq 3$

Hérédité.

Donc P_n vrai, $\forall n \geq 3$ par récurrence

Exercice 12 Récurrence forte Montrer : • $P(0)$: initialisation

• $P(0) \wedge P(1) \wedge \dots \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)$
Hérédité

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: suite réelle

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n \end{cases}$$

Montrer $u_n \leq 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Initialisation $u_0 = 1$, $2^0 = 1$ et $1 \leq 1$ donc $u_0 \leq 2^0$

Hérédité Supposons $P(0)$, $P(1)$, ..., $P(n)$

$$\boxed{u_{n+1}} = u_0 + u_1 + \dots + u_n \boxed{\leq} 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n$$
$$= 1 + 2 + \dots + 2^n = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1} - 1 \leq \boxed{2^{n+1}}$$

$-1 < 0$

Formule (Somme géométrique) $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ $q \neq 1$