Exercices RM1

A propos de l'exercice 12 (Récurrence forte)

On a utilisé : si $u \in \mathbb{C}$, $u \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$ (somme géométrique)

$$\boxed{1 + u + u^2 + u^3 + \dots + u^n = \sum_{k=0}^{n} u^k = \frac{1-u^{n+1}}{1-u}}$$

Preuve $(1-u)(1+u+u^2+\dots+u^n)$

$$= 1 + u + u^2 + \dots + u^n - u\cdot 1 - u\cdot u - u\cdot u^2 - u\cdot u^{n-1} - u\cdot u^n$$

$$= 1 + \cancel{u} + \cancel{u^2} + \dots + \cancel{u^n} - \cancel{u} - \cancel{u^2} - \cancel{u^n} - u^{n+1}$$

$$= 1 - u^{n+1}.$$

Définition

Si $p, n \in \mathbb{N}$

$p \mid n$

("p divise n")

("p est un diviseur de n")

si $\boxed{\exists q \in \mathbb{N},\ n = pq.}$

Exercice 13 Raisonnement par contraposée

1. Soient $k, n \in \mathbb{N}$. Ecrire la contraposée de :

"Si $k > n$, alors k ne divise pas n"

$$[k > n] \Rightarrow \neg [k \mid n]$$

C'est : $[k \mid n] \Rightarrow [k \leq n]$

2. Montrer par contraposée :

$$\boxed{\forall k, n \in \mathbb{N}^*,\ \boxed{[k > n] \Rightarrow \neg [k \mid n]}}$$

Cela revient à montrer la contraposée :

$$\forall k, n \in \mathbb{N}^*,\ \boxed{[k \mid n] \Rightarrow k \leq n}$$

Au travail, supposons : $k \mid n \underset{\text{déf.}}{\Leftrightarrow} \exists q \in \mathbb{N}^*,\ n = qk$

$\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N}^*,\ k = \frac{n}{q}$

$q \in \mathbb{N}^* \Rightarrow q \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{q} \leq 1 \Rightarrow \frac{n}{q} \leq n \Leftrightarrow k \leq n.$

Exercice 14 (utilisation du raisonnement par l'absurde)

But : montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers

Rappel | **Nombres premiers** : $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$

Un entier $p \geq 2$ qui admet exactement deux diviseurs : 1 et p

(1 n'est pas premier, il n'a qu'un seul diviseur)

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Montrer qu'il admet un diviseur premier.

Intuitivement : - soit k est premier, alors il admet lui-même comme diviseur premier
- soit k n'est pas premier, alors il admet un diviseur premier $< k$

Idée : attraper le plus petit des diviseurs

$E = \{ \text{diviseurs de } k \geq 2 \} \subset ([2, k] \cap \mathbb{N})$

$E \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

$E \neq \emptyset$ car $k \in E$

E est minorée car $\forall j \in E$, $j \geq 2$

Théorème du cours : E admet une borne inférieure $\boxed{p = \inf E}$

admettons : comme $E \subset \mathbb{Z}$, et comme $\inf E$ existe,
$p = \inf E = \min E$

Qu'est-ce que ça veut dire : E admet un plus petit élément

C'est à dire : $p = \inf E$ satisfait $\boxed{\begin{array}{l} p \text{ minore } E \\ p \in E \end{array}}$

On a trouvé $2 \leq p \leq k$, $\boxed{p \mid k}$, il faut montrer qu'il est premier.

Absurde : supposons que p n'est pas premier :

$\exists q \in \mathbb{N}$, $q \neq 1$, $\boxed{q \neq p}$, $q \mid p$ or $p \mid k$ $\Rightarrow q \mid k \Leftrightarrow \boxed{q \in E}$

$\Downarrow$

$q \mid p \Rightarrow \boxed{q < p = \min E}$

$q \in E$ et q est $<$ que le plus petit des éléments de E

Impossible

Conclusion $\boxed{p \text{ est premier}}$ (obtenu par l'absurde)

2. Soit $p_1, \ldots, p_n$ n nombres entiers, tous distincts deux à deux,

Soit $N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. Montrer $\boxed{\forall i = 1, \ldots, n, \ \neg [p_i \mid N]}$

("p_i ne divise pas N")

Observation : $\boxed{N - 1 = p_1 \cdots p_n}$: on voit que : $\forall i = 1, \ldots, n$, $[p_i \mid N]$

Raisonnement par l'absurde : supposons

$\neg [\forall i = 1,\dots,n, \neg [p_i \mid N]] = [\exists i = 1,\dots,n, p_i \mid N]$

Comme p_i divise $N-1$ (toujours vrai) $\overset{1.}{\Rightarrow}$ p_i divise $N-(N-1) = 1$ $\Rightarrow$ $p_i \leq 1$ Impossible car $p_i \geq 2$.

Conclusion : aucun des p_i ne divise $N = p_1 \cdots p_n + 1$.

3. $\boxed{\text{Il existe une infinité de nombres premiers}}$.

Par l'absurde et par la récurrence : On montre par récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$: [il existe au moins n nombres entiers $p_1, \dots, p_n$ tous distincts deux à deux

$P(1)$: $p_1 = 2$ est premier. Initialisation : ok.

$P(2)$: $p_1 = 2$ et $p_2 = 3$ sont premiers.

Hérédité $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ par l'absurde

Supposons $P(n)$ est vrai et $P(n+1)$ est faux.

$p_1, \dots, p_n$: n nombres premiers ($p_1 < p_2 < \dots < p_n$ sans perte de généralité)

Supposons qu'il n'y ait pas d'autres nombre premier (c'est à dire $P(n+1)$ est faux)

Soit $N = p_1 \cdots p_n + 1$

1. "Tout entier $k \geq 2$ admet un diviseur premier"

$\Rightarrow$ N admet un diviseur premier p.

$\neg P(n+1) \Rightarrow p \in \{p_1, \dots, p_n\} \underset{\text{question 2}}{\Rightarrow}$ p ne divise pas $p_1 \cdots p_n + 1 = \boxed{N}$ Contradiction

Conclusion : $P(n+1)$ est vrai.

Exercice 15 But : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \text{ premier}, \sqrt{p} \text{ n'est pas rationnel.}}$

Exemple . $n = 4$, $\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Q}$ mais 4 n'est pas premier $4 = 2 \times 2$

. $n = 2$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ car 2 est premier. (corollaire de cet exercice)

Indications a) Admettre : $\forall p \in \mathbb{N}$, nombre premier,

$\forall x, y \in \mathbb{N}$, $[p \mid xy] \Rightarrow [p \mid x] \vee [p \mid y]$

Si p divise le produit xy, alors il divise au moins l'un des deux facteurs x et y.

b) Comment aborder l'exercice : par l'absurde.

C'est à dire : supposer

$$\neg \left[\forall p \text{ nombre premier}, \ \sqrt{p} \notin \mathbb{Q} \right]$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[\exists\, p \text{ nombre premier}, \ \sqrt{p} \in \mathbb{Q} \right]$$: point de départ à la recherche d'une contradiction

$$\Longleftrightarrow \quad \exists\, p \text{ premier}, \ \exists (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \ \sqrt{p} = \frac{n}{m}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists\, p \text{ premier}, \ \exists (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \ p = \frac{n^2}{m^2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{m^2 p = n^2}$$

à vous de réfléchir avec ces indications.