**Erratum** : le cours du jeudi débutera à $\boxed{18h45}$ !
(et non 18h15)

---

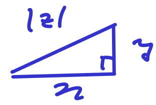
**Rappel** sur les nombres complexes : inverse d'un nombre complexe

si $z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$

$\bar{z} = x - iy \quad ; \quad |z| = \sqrt{x^2+y^2} \quad ; \quad \boxed{z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}}$ $\boxed{\text{si } z \neq 0}$

**Exemple** $z = 3+4i \qquad \bar{z} = 3-4i$

$|z|^2 = 3^2+4^2 = 25 \implies |z| = 5$




$z^{-1} = \dfrac{3-4i}{25}$

Vérifions : $(3+4i)\dfrac{(3-4i)}{25} = \dfrac{3^2-(4i)^2}{25} = 1$

---

$\boxed{\text{RM2}}$ : approfondissement des notions de base de l'analyse.

Rappels | $\mathbb{R}$ — limite $\longrightarrow$ | continuité $\longrightarrow$ compacité

ouverts, fermés
voisinages

## 1 $\mathbb{R}$ et sa topologie.

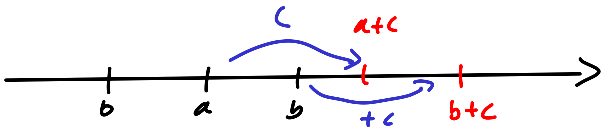
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \quad (\subset \mathbb{C})$

- $\mathbb{N}$ : addition, multiplication
- $\mathbb{Z}$ : "opposé" : "inverse pour l'addition"
- $\mathbb{Q}$ : inverse pour la multiplication. (sauf pour 0)
- $\mathbb{R}$ : propriété de borne supérieure ("complet")

$\boxed{\mathbb{R} : +, \times, \leq}$ avec compatibilité

$\leq$ : relation d'ordre

$\boxed{a \leq b \implies a + c \leq b + c}$




$$\boxed{\begin{array}{l} \begin{cases} a \leq b \\ c \geq 0 \end{cases} \implies ac \leq bc \\ \begin{cases} a \leq b \\ c \leq 0 \end{cases} \implies bc \leq ac \end{array}}$$

$\underline{\mathbb{R} \text{ est archimédien}}$ : $\forall a, b \in \mathbb{R}$, tels que $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$

Alors $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ fois}} \geq b$

$\iff n a \geq b \iff \boxed{\frac{b}{n} \leq a}$

$\underline{\text{Application}}$ : j'appelle $a = \varepsilon$ :

$\forall \varepsilon > 0$, $\forall b > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{b}{n} \leq \varepsilon$

$\underline{\text{Par exemple}}$ : $b = 1$ : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$

$\underline{\text{Corollaire}}$ : comme la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ est décroissante, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\underline{\text{Propriété}}$ $\underline{\text{Fondamentale de } \mathbb{R}}$ : $\underline{\text{borne supérieure}}$ (ou borne inférieure)

$\underline{\text{Rappel}}$ Soit $A \subset \mathbb{R}$ une $\underline{\text{partie}}$ de $\mathbb{R}$

$\underline{\text{Déf}}$ | A est $\underline{\text{majorée}}$ si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A$, $x \leq M$ | $\underline{\text{minorée}}$ : $\exists m \in \mathbb{R}$, $\forall x \in A$, $m \leq x$

alors $M$ est un $\underline{\text{majorant}}$ de $A$.

$\underline{\text{Exemple}}$ $A = [0, 1[ \cup \left\{\frac{5}{2}\right\}$ : majoré par 3, 5, 2021, 1000 000, ... en fait, par tout réel $M \geq \frac{5}{2}$


$\underline{\text{Déf}}$ Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $\ell$ est une borne supérieure de $A$ si :

(i) $\ell$ est un majorant de A : $\boxed{\forall x \in A, \quad x \leq \ell}$

(ii) il n'y a de majorant de A qui soit plus petit :

$\boxed{\forall M \in \mathbb{R}, [M \text{ majore } A] \implies [\ell \leq M]}$

$\iff \boxed{\forall M \in \mathbb{R}, \quad [M < \ell] \implies [M \text{ ne majore pas } A] \iff [\exists x \in A, \quad M < x]}$

$\underline{\text{contraposée}}$

$\iff \boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A, \quad \ell - \varepsilon < x.}$

si j'écris $M = \ell - \varepsilon$

$\underline{\text{Borne supérieure}}$ : $\underline{\text{plus petit des majorants}}$ (Borne inférieure : plus grand des minorants)

**Proposition** La borne supérieure de $A$, si elle existe, est unique.

On note $\boxed{\sup A}$ : la borne supérieure de $A$ ($\boxed{\inf A}$ : borne inférieure)

**Note** $\ell = \max A \iff \begin{cases} \ell \text{ majore } A \\ \ell \in A \end{cases} \Longrightarrow \ell = \sup A.$

n'existe pas forcément.

Exemple : $A = ]0,1[$. $\sup A = 1$, mais il n'y a pas max.

**Théorème** Soit $A \subset \mathbb{R}$. Supposons que :
(i) $A \neq \emptyset$
(ii) $A$ est majoré
Alors $A$ admet une borne supérieure

(i) $A \neq \emptyset$
(ii) $A$ est minoré
$\Rightarrow$ $A$ admet une borne inférieure.

Résultat faux dans $\mathbb{Q}$ : $A = [0,1] \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$

$A \neq \emptyset$
$A$ est majoré
et $A$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{Q}$
$\sup_{\mathbb{Q}} A = 1.$

**Rappel** $\mathbb{Q}$ : rationnels
$= \left\{ \frac{p}{q} \ ; \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$
$\pi, \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$[0,\sqrt{2}] \subset \mathbb{R}$
$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
$\downarrow$
$[0,\sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$

**Exemple** $A = \{ x \in \mathbb{Q} \ ; \ 0 \leq x \text{ et } x^2 \leq 2 \}$
$= [0, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} \qquad \subset \mathbb{Q}$

$A \neq \emptyset$ : $1 \in A$
$A$ est majoré (par 2 par exemple) $\Rightarrow$ $A$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$

Notons $\ell = \sup A$

**Théorème** $\ell = \sup A = \sqrt{2} \iff \boxed{\ell^2 = 2}$

**Preuve** (i) Montrons $\boxed{2 \leq \ell^2}$ : vient du fait que $\ell$ majore $A$ :

$\forall x \in A, \quad x \leq \ell$

$\underbrace{\forall x \in \mathbb{Q},\quad x \geq 0 \text{ et } x^2 \leq 2}_{\forall x \in A} \Rightarrow \underset{(x \geq 0)}{x \leq \ell \Rightarrow x^2 \leq \ell^2}$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{Q},\ x \geq 0,\quad x^2 \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq \ell^2}$ conséquence du fait que $\ell$ majore $A$.

Cela entraîne $\boxed{2 \leq \ell^2}$ ; Par l'absurde ; supposons
$2 > \ell^2 \Leftrightarrow \boxed{0 < 2 - \ell^2}$

stratégie pour mettre en évidence une contradiction : construire $x = \ell + \varepsilon \in A$ $\Rightarrow x > \ell$ contradiction car $\ell$ majore $A$

Posons $x = \ell + \varepsilon$ où $\varepsilon > 0$ et je choisis $\varepsilon$ tel que $\ell + \varepsilon \in \mathbb{Q}$
je reviendrai dessus.

$x^2 = (\ell + \varepsilon)^2 = \ell^2 + 2\ell\varepsilon + \varepsilon^2 \quad \leq \underset{?}{\cdots} \leq 2.$

$x^2 \leq \ell^2 + 2 \times 2\varepsilon + \varepsilon^2 = \ell^2 + 4\varepsilon + \varepsilon^2 \underset{?}{\leq} 2$

($\ell \leq 2$ car 2 majore $A$)

Je choisis $\varepsilon$ tel que $\ell^2 + 4\varepsilon + \varepsilon^2 \leq 2$

$\Leftrightarrow \quad 4\varepsilon + \varepsilon^2 \leq \underbrace{2 - \ell^2}_{>0}.$

Possible car $2 - \ell^2 > 0$

(par exemple : $\varepsilon < 1$ et $\varepsilon < \frac{2-\ell^2}{5}$ )

Alors $(\ell+\varepsilon)^2 \leq 2$

En même $\ell + \varepsilon$ doit être dans $\mathbb{Q}$ : possible car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Donc $\ell + \varepsilon \in A \Rightarrow \ell + \varepsilon \leq \ell$ Contradiction

(ii) $\boxed{\ell^2 \leq 2}$ J'utilise le fait que $\ell$ est le plus petit des majorants de $A$.

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\quad \ell - \varepsilon < x \Rightarrow (\ell - \varepsilon)^2 < x^2 \underbrace{\leq 2}_{\text{car } x \in A}$
si $\ell - \varepsilon > 0$

Donc $\{\forall \varepsilon > 0,\ (\ell - \varepsilon)^2 < 2\} \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0,\ \ell^2 \leq 2 + \underbrace{2\ell\varepsilon - \varepsilon^2}]$

quantité que peut être choisie aussi petite que l'on veut

$\Leftrightarrow \boxed{\ell^2 \leq 2}$

Conclusion $\ell^2 = 2 \Leftrightarrow \ell = \sqrt{2}$ (car $\ell > 0$)

$$\boxed{\sup \{x \in \mathbb{Q} ;\ x \geq 0 \text{ et } x^2 \leq 2\} = \sqrt{2}}$$

Or $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ : $\sqrt{2}$ est irrationnel

$\Leftrightarrow$ Il est impossible d'écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p, q$ entiers.

Idée de la preuve : par l'absurde. On suppose :

$\exists\, p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$

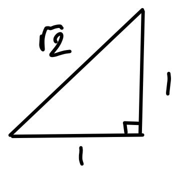
(i) travail préliminaire : on peut toujours choisir $p$ et $q$ de façon à ce que au moins un des deux soit impair.

(ii) on montre que $p^2 = 2q^2 \Rightarrow$ $p$ est pair $\Rightarrow p = 2p_1$

$\Rightarrow 4p_1^2 = 2q^2 \Rightarrow 2p_1^2 = q^2 \Rightarrow$ $q$ est pair.

Contradiction

Je peux dessiner !




mais je ne peux pas écrire $\sqrt{2}$ ... $\frac{p}{q}$

## Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

**Définition** Soit $X \subset \mathbb{R}$. On dit que $X$ est dense dans $\mathbb{R}$ si

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ tels } a < b,\ \exists\, x \in X,\ a < x < b}$$

ou :

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b \Rightarrow X \cap \left]a, b\right[ \neq \emptyset}$$

**Théorème** (a) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

(b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(b) est un corollaire de (a)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b \Rightarrow a + \sqrt{2} < b + \sqrt{2}$

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R} \Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{Q},\ a + \sqrt{2} < x < b + \sqrt{2}$

$\Rightarrow a < x - \sqrt{2} < b.$

Je dis que $x - \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ : pourquoi ? par l'absurde :

Supposons que $x - \sqrt{2}$ est rationnel,

alors $\sqrt{2} = \underbrace{x}_{\mathbb{Q}} - \underbrace{(x - \sqrt{2})}_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}$ Contradiction