Rappels : ① examen terminal début mars.

On espère : un partiel (3ème semaine de février)

devoir : à faire pour la semaine prochaine.

② Cours magistraux : à distance uniquement.

TD : tous en salle

③ Cours du lundi avancé d'un quart d'heure : 8h15 – 9h45

④ Mini-poly sur le moodle

Déjà vus : voisinage d'un point, ouvert, fermé dans $\mathbb{R}$.

$\bigcup$ ouverts = ouvert $\qquad$ $\bigcap$ fermés = fermé

$\bigcap_{\text{finie}}$ ouverts = ouverts $\qquad$ $\bigcup_{\text{finie}}$ fermé = fermé

mais $\boxed{\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \underbrace{]-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}[}_{\text{pas ouvert.}} = \{0\}}$ nombre infini $\qquad$ $\boxed{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \underbrace{[\tfrac{1}{n}, 1]}_{\text{fermés.}} = \underbrace{]0,1]}}$

– ni un ouvert (pas un voisinage de 1)
– ni un fermé

$\mathbb{R} \setminus]0,1] = \underbrace{]-\infty, 0]}_{\text{pas ouvert car ça n'est un voisinage de 0.}} \cup]1, +\infty[$

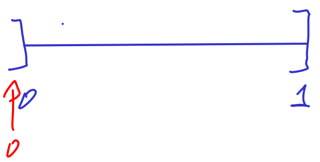
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [\tfrac{1}{n}, 1] = \{1\} \cup [\tfrac{1}{2}, 1] \cup [\tfrac{1}{3}, 1] \cup [\tfrac{1}{4}, 1] \cup \ldots$

Définition Soit $A \subset \mathbb{R}$ quelconque et $x \in \mathbb{R}$

x est adhérent à A si $\forall \varepsilon > 0$, $\boxed{]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset}$ $\quad$ $\boxed{\exists y \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A}$

$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ rencontre A

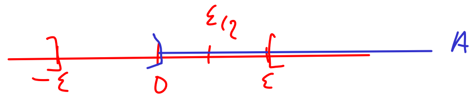
Exemple

$A =$ 

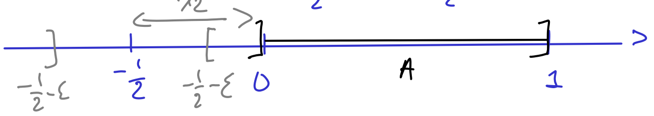
. $\forall x \in]0,1]$, x est adhérent à A car $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A$ contient x

. 0 est adhérent à $]0,1]$ mais $0 \notin]0,1]$

car $\forall \varepsilon > 0$, $\left]-\varepsilon, \varepsilon\right[$ rencontre $]0,1]$, par exemple en $\frac{\varepsilon}{2}$



• Mais $-\frac{1}{2}$ n'est pas adhérent à $]0,1]$: si $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, alors
$$\left]-\tfrac{1}{2}-\varepsilon, -\tfrac{1}{2}+\varepsilon\right[\cap]0,1] = \emptyset$$



• $\forall x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]1, +\infty\right[= \mathbb{R} \setminus [0,1]$, x n'est pas adhérent à $]0,1] = A$

Définition l'adhérence d'une partie $A \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble des points adhérents à A. On note $\overline{A}$ cet ensemble.

Exemples a) $\overline{]0,1]} = [0,1]$

$[0,1]$ fermé — b) $\overline{[0,1]} = [0,1]$

$]0,1[$ ouvert — c) $\overline{]0,1[} = [0,1]$

d) $\overline{[0,1[} = [0,1]$

toutes ces adhérences sont des intervalles fermés, donc des fermés.

$\boxed{\text{Tout intervalle fermé est une partie fermée. Mais il y a bien d'autres fermés}}$

Exemple $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (admis)

Plus généralement : si $A \subset \mathbb{R}$. $\boxed{A \text{ dense dans}}\ \mathbb{R} \iff \boxed{\overline{A} = \mathbb{R}}$ (admis) (exercice)

$\boxed{\text{Rappel } A \subset \mathbb{R} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \text{ ssi } \forall a,b \in \mathbb{R} \text{ tels que } a<b,\ ]a,b[\cap A \neq \emptyset}$

Théorème Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors $\overline{A}$ est fermé. De plus

a) $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A pour l'inclusion :

(i) $A \subset \overline{A}$ et $\overline{A}$ est fermé

(ii) $\forall F \subset \mathbb{R}$ fermé, si $A \subset F \Rightarrow \overline{A} \subset F$

Analogue à la définition de borne supérieure de $X \subset \mathbb{R}$
$\ell = \sup X \iff$
(i) ℓ majore X
(ii) ℓ est le plus petit majorant de X

b) $\overline{A}$ = Intersection de tous les fermés qui contiennent A
$$= \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ A \subset F}} F.$$

Preuve On va juste montrer que $\overline{A}$ est fermé.

On part de la conclusion : $\overline{A}$ fermé $\underset{(\text{déf.})}{\iff}$ $\mathbb{R} \setminus \overline{A}$ ouvert $\iff \Big\{ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \overline{A}, \exists \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathbb{R} \setminus \overline{A}$

$\Longleftrightarrow \underbrace{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \overline{A}, \ \exists \varepsilon > 0, \ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap \overline{A} = \emptyset}_{\text{Il faut montrer cela.}}$

Je repars de l'hypothèse : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$

négation

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \overline{A} \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A = \emptyset$

Je dois montrer que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap \overline{A} = \emptyset$

Simple : $\forall y \in \underbrace{]x-\varepsilon, x+\varepsilon[}_{\text{ouvert donc voisinage de } y} \Longrightarrow \exists \alpha > 0, \ ]y-\alpha, y+\alpha[\subset]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$

alors $\left.\begin{array}{l} \overset{\text{plus petit}}{]y-\alpha, y+\alpha[} \subset]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\\ \text{et }]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A = \emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow]y-\alpha, y+\alpha[\cap A = \emptyset$

$\Updownarrow$

$y \in \mathbb{R} \setminus \overline{A}$

$\boxed{\begin{array}{l} X \subset Y \\ Y \cap A = \emptyset \end{array}} \Longrightarrow X \cap A = \emptyset$

Je reprends : je montre que $\mathbb{R} \setminus \overline{A}$ est un ouvert.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [x \in \mathbb{R} \setminus \overline{A}] \Longleftrightarrow [x \notin \overline{A}] \Longleftrightarrow [\exists \varepsilon > 0, \ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A = \emptyset]$

$\Rightarrow]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathbb{R} \setminus A$

Je prétends que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathbb{R} \setminus \overline{A}$

Pour cela : $\forall y \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[, \ \boxed{\exists \alpha > 0}, \ ]x-\alpha, x+\alpha[\subset]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$

car $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ est ouvert.

Donc $]y-\alpha, y+\alpha[\subset]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathbb{R} \setminus A$

$\Longleftrightarrow \ ]y-\alpha, y+\alpha[\cap A = \emptyset$

$\Longleftrightarrow \ y \notin \overline{A}$ $\qquad$ Donc $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathbb{R} \setminus \overline{A}$

Toujours $\boxed{A \subset \overline{A}} \Longleftrightarrow \boxed{\mathbb{R} \setminus \overline{A} \subset \mathbb{R} \setminus A}$

Intérieur d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition Soit $A \subset \mathbb{R}$. Son intérieur est le plus grand ouvert contenu dans A. On la note $\boxed{\mathring{A}}$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{(i)} & \mathring{A} \text{ est un ouvert}, \quad \mathring{A} \subset A \\ \text{(ii)} & \forall O \text{ ouvert}, \ O \subset A \Rightarrow O \subset \mathring{A} \end{array}}$$

parallèle avec $\overline{A}$

(i) $\overline{A}$ fermé, $A \subset \overline{A}$

(ii) $\forall F$ fermé ; $A \subset F \Rightarrow \overline{A} \subset F$

Exemple $A = [a,b]$, $\mathring{A} =]a,b[$, Exemple d'ouverts $O \subset [a,b]$: $]a, \frac{a+b}{2}[$

Exemples. Si $A =]a,b[\cup]c,d[$ $\quad \mathring{A} =]a,b[\cup]c,d[$

$\bar{A} = [a,b] \cup [c,d]$

- Si $A = [a,b] \cup]c,d[$, $\mathring{A} =]a,b[\cup]c,d[$

$\bar{A} = [a,b] \cup [c,d]$

- Si $A = \{a\}$ $\quad \mathring{A} = \emptyset$

$\bar{A} = \{a\}$.

Pourquoi $\mathring{\{a\}} = \emptyset$? Parce que si O est un ouvert contenu dans $\{a\}$ alors $O = \emptyset$

Pourquoi ? Raisonnons par l'absurde. Supposons : $\exists\, O \subset \{a\},\ O \neq \emptyset$ alors $a \in O \Rightarrow \underbrace{\exists\, \varepsilon > 0,\ ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset \{a\}}_{\text{impossible}}$

Propositions $\forall A \subset \mathbb{R}$.

a) A fermée $\iff A = \bar{A}$

b) A ouvert $\iff A = \mathring{A}$

Liens avec les limites. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. et $A \subset \mathbb{R}$

Supposons que : $\begin{cases} \forall n, & u_n \in A \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \end{cases}$ "u_n prend ses valeurs dans A"

Peut-on dire que $\ell \in A$? Rien en général : si $A =]0,2[$

$u_n = \frac{1}{n}$, $u_n \in A$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \notin A$

Si j'en sais plus, à savoir que A est fermé, alors $\ell \in A$.

$$\boxed{\text{Proposition Soit } \boxed{A \subset \mathbb{R} \text{ fermée.}} \text{ Soit } \boxed{(u_n)_n \text{ une suite à valeur dans } A} \ (\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in A). \text{ Si } \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell}, \text{ alors } \ell \in A.}$$

Corollaire Si $(u_n)_n$ prend ses valeurs dans A et si $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell}$

Alors $\ell \in \bar{A}$.

Preuve Si $[\forall n,\ u_n \in A] \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\forall n,\ u_n \in \bar{A} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell\end{array}\right] \left\{ \bar{A} \text{ fermé} \underset{\text{proposition}}{\Longrightarrow} \ell \in \bar{A}\right.$

Preuve de la proposition Raisonnons par l'absurde. Soit $(u_n)_n$ telle que

(A fermé) $\begin{cases} \forall n, & u_n \in A \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \end{cases}$ et $\boxed{\text{je suppose que } \ell \notin A}$] Je cherche une contradiction

$\ell \notin A \iff \ell \in \mathbb{R}\setminus A$ et $\mathbb{R}\setminus A$ est un ouvert car A fermé par hypothèse

$\Rightarrow \boxed{\exists\, \varepsilon > 0,\ ]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\subset \mathbb{R}\setminus A}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$: $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$

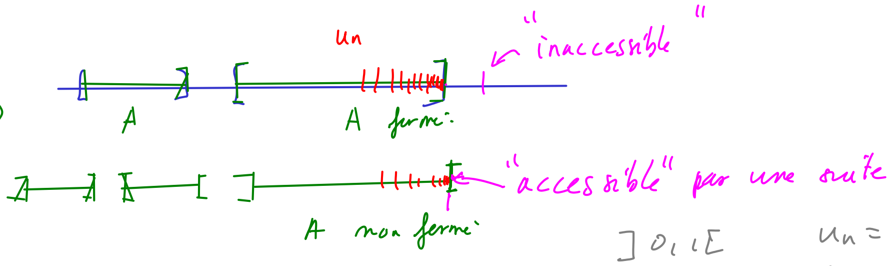
Je choisis le ε plus haut, tel que $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\cap A = \emptyset$

Contradiction (!) $u_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\cap A$ (car $u_n \in A$)

$]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\cap A = \emptyset$

Conclusion : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in A$.

2 situations



$]0,1[$

$u_n = 1 - \frac{1}{n} \in]0,1[$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 \notin]0,1[$

$1 \in [0,1] = \overline{]0,1[}$