- Devoir à rendre lundi (15 fév.) ou mardi (16 fév.) : à rendre en main propre sur papier le jour du TD.
(sauf impossibilité matérielle)

- Contrôle en TD (temps limité) la première semaine de mars
- Examen terminal : peut-être le samedi 13 mars matin (?)
à confirmer

Rappel : on a vu plusieurs définitions de :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \ell}$$

où $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$

3 définitions équivalentes

- $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$
- $\forall V$: voisinage de ℓ, $\exists U$: voisinage de a, $\forall x \in U$, $f(x) \in V$
- $\boxed{\forall V : \text{voisinage de } \ell, \ f^{-1}(V) \text{ est un voisinage } a}$.

(Rappel) Def || $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ si $\exists M \in \mathbb{R}$, $]M, +\infty[\subset V$.

Ces 3 définitions sont équivalentes

Def ("classique") de $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = +\infty}$

$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \alpha > 0, \forall x \in D, |x-a| < \alpha \Rightarrow f(x) > M$

Def $\forall V$: voisinage de $+\infty$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in D$, $|x-a| < \alpha \Rightarrow f(x) \in V$

Def $\boxed{\forall V : \text{voisinage de } +\infty, \ f^{-1}(V) \text{ est un voisinage de } a.}$

Ces 2 définitions sont équivalentes

Def ("classique") de $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D$, $x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Def $\boxed{\forall V : \text{voisinage de } \ell, \ f^{-1}(V) \text{ est un voisinage de } +\infty}$.

Théorèmes sur les opérations sur les limites:

Soit $a \in D$, si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell_2$, alors

a) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\quad \lim_{x\to a} \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda \ell_1 + \mu \ell_2$

b) $\lim_{x\to a} f(x) g(x) = \ell_1 \ell_2$

c) si $\ell_2 \neq 0$, $\quad \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$

Remarque : $\ell_2 \neq 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = \ell_2$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0, \quad |x-a| < \alpha \Rightarrow |g(x) - \ell_2| < \varepsilon$

Je prends $\varepsilon = \dfrac{|\ell_2|}{2} \boxed{>} 0$: $\boxed{\exists \alpha > 0,}$ $\quad |x-a| < \alpha \Rightarrow |g(x) - \ell_2| < \dfrac{|\ell_2|}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \ell_2 - \frac{|\ell_2|}{2} < g(x) < \ell_2 + \frac{|\ell_2|}{2}$$

si $\ell_2 > 0$, $\quad \boxed{0 <} \dfrac{\ell_2}{2} < g(x) < \dfrac{3\ell_2}{2}$

si $\ell_2 < 0$, $\quad \dfrac{3\ell_2}{2} < g(x) < \dfrac{\ell_2}{2} \boxed{< 0}$

$\Rightarrow g(x) \neq 0$

Donc $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est bien défini si $x \in]a-\alpha, a+\alpha[$ pour le $\boxed{\alpha}$.

Théorème des gendarmes pour les fonctions

Soit f, g, h trois fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}$ (D : intersection des domaines de définitions de f, g, h)

Soit $a \in \overline{D}$ (adhérent à D). On suppose que:

a) $\forall x \in D$, $\quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

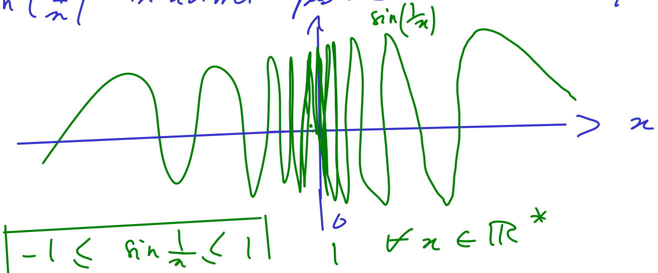
b) $\lim_{\substack{x\to a \\ x \in D}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ x\in D}} h(x) = \ell$

Conclusion g converge vers ℓ lorsque $x \to a$. : $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$.

Exemple calculer la limite de $g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ lorsque $x \to 0$, $x \neq 0$.

$D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mais $\overline{D} = \mathbb{R} \ni 0$

Problème $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite lorsque $x \to 0$



Solution : $\boxed{-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

$(\times |x|)$ $\quad \Rightarrow -|x| \leq |x| \sin\frac{1}{x} \leq |x|$

$(\times (-|x|))$ $\Rightarrow$ $|x| \geq -|x| \sin\frac{1}{x} \geq -|x|$ $x\sin\frac{1}{x} = \begin{cases} |x| \sin\frac{1}{x} \\ \text{ou} \\ -|x| \sin\frac{1}{x} \end{cases}$

Les deux donnent $\underbrace{-|x|}_{f(x)} \leq g(x) = x \sin\frac{1}{x} \leq \underbrace{|x|}_{h(x)}$.

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0} h(x) \Rightarrow \lim_{x\to 0} g(x) = 0$

Je m'y suis mal pris ! plus habile | considérer $x>0$ — $x<0$ $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow -x \leq x\sin\frac{1}{x} \leq x$ $\Rightarrow -x \geq x\sin\frac{1}{x} \geq x$

même conclusion dans les 2 cas.

Remarque utile Inégalité $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq x$

Utile pour étudier $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ (ça vaut 1).

Fonctions continues Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$.

3 définitions équivalentes

Def ("classique") f est continue en a si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D$, $|x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Def f est continue en a si $\lim_{\substack{x\to a \\ x \neq a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in D\setminus\{a\}}} f(x) = f(a)$.

Def f continue en a si, pour tout voisinage V de $f(a)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a.

Théorème Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f: O \to \mathbb{R}$ (penser $O =]a,b[$ par exemple)

Alors f est continue sur O [$\Leftrightarrow$ f est continue en chaque point $a \in O$] ssi $\boxed{\forall\, U \text{ ouvert de } \mathbb{R},\ f^{-1}(U) \text{ est un ouvert.}}$

Rappel RM1 Si $f: E \to F$ (i) Image directe de $A \subset E$
$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$
(ii) Image inverse de $B \subset F$
$\boxed{f^{-1}(B) = \{ x \in E \mid f(x) \in B \}}$

Exemple $f = \ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

Je teste : $U =]a,b[$ Qu'est-ce que $f^{-1}(U)$?

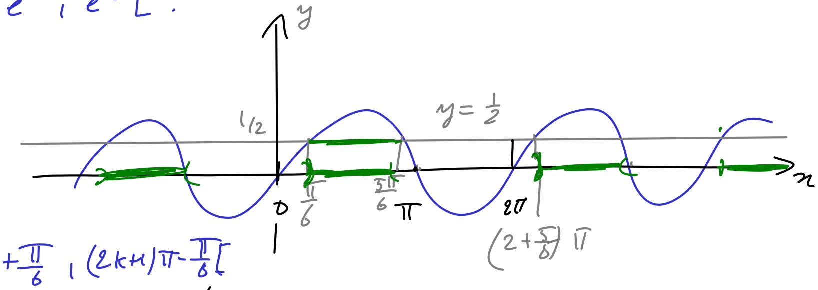
$f^{-1}(U) = \{ x \in]0,+\infty[\mid \ln x \in]a,b[\}$

$= \{x \in]0,+\infty[\mid e^a < x < e^b\}$

$=]e^a, e^b[.$

- $f = \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $U =]\frac{1}{2}, +\infty[$

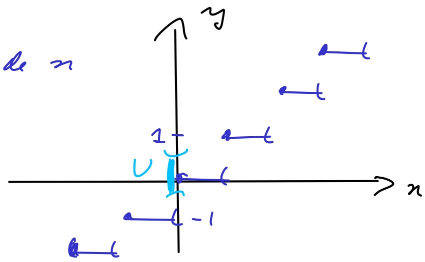


$f^{-1}(U) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi + \frac{\pi}{6}, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}[$ ouvert.

- $f(x) = E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $x \mapsto \lfloor x \rfloor$: partie entière de x

  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$



$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} E(x) = 0$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} E(x) = -1$

E n'est pas continue sur $\mathbb{Z}$, elle est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

$U =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$: ouvert. $f^{-1}(U) = f^{-1}(\{0\}) = [0,1[$

ça n'est pas ouvert.

Preuve du Théorème f continue sur $O \iff$ l'image inverse de tout ouvert est un ouvert.

$\Rightarrow$ Je suppose f continue partout sur O.

Je prends un ouvert $U \subset \mathbb{R}$ $\longrightarrow f^{-1}(U)$

$\forall a \in f^{-1}(U) \iff f(a) \in U$ mais U un ouvert.

donc U est un voisinage $f(a)$

$\underset{f \text{ continue en } a}{\Longrightarrow}$ $f^{-1}(U)$ est un voisinage de a

$\Rightarrow \exists\, \alpha > 0,\ ]a-\alpha, a+\alpha[\subset f^{-1}(U)$

ça montre que $f^{-1}(U)$ est ouvert.

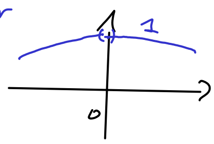
$\Leftarrow$ même type de raisonnement

Autre notion liée à la continuité et au limite : prolongement par continuité d'une fonction.

Exemple $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Fait (admis) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\to$ On a envie de définir $\bar{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\bar{f}(x) = \frac{\sin x}{x} = f(x)$ et $\bar{f}(0) = 1$



Définition Soit $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$, mais $a \notin D$

(en particulier $f(a)$ n'est pas défini a priori car $a \notin D$)

Supposons que $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x)$ existe et vaut ℓ.

Alors on définit le prolongement par continuité de f en a comme étant $\overline{f} : D \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ avec $\begin{cases} \forall x \in D, & \overline{f}(x) = f(x) \\ & \overline{f}(a) = \ell \end{cases}$

Proposition ... alors a) $\overline{f}$ est continue en a.

Preuve : $\overline{f}$ continue en $a \iff \lim_{\substack{x \to a \\ x \in D}} \overline{f}(x) = \overline{f}(a)$

b) Le prolongement, s'il existe, est unique.

Exemple $D = \mathbb{Q}$, $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$

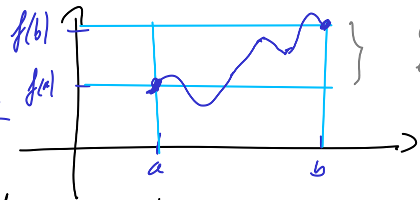
Légèrement hors programme

- $\boxed{\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}}$
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{Q}}} f(x)$ existe (et vaut a)

} il existe un unique prolongement par continuité de f :

$\overline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$

Théorème des valeurs intermédiaires f continue



Chaque valeur entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte au moins une fois

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors si $f(a) \leq f(b)$, $\forall y \in [f(a), f(b)]$, $\exists x \in [a,b]$, $f(x) = y$

si $f(b) \leq f(a)$, $\forall y \in [f(b), f(a)]$, $\exists x \in [a,b]$, $f(x) = y$

Lundi prochain : 8h – 9h30