. Devoir à rendre à votre chargé de TD aujourd'hui.

. Contrôle en TD la première semaine de mars

. Examen terminal : samedi 13 mars, matin : à confirmer.

Continuité

Théorème (composée de deux fonctions continues)

Soit I, J deux ouverts de $\mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$.

On suppose que $\boxed{g(I) \subset J}$, on considère

$$f \circ g : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(g(x)) \end{array}$$

$$I \xrightarrow{g} g(I) \subset J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(x) \longmapsto f(g(x))$$

Soit $a \in I$, si g est continue en a et f est continue en $g(a)$ alors $f \circ g$ est continue en a

Exemple : $h(x) = e^{x^3+\sin x}$: h est continue sur $\mathbb{R}$

$h(x) = e^y$ où $y = x^3 + \sin x = g(x)$

Donc si on pose $f(y) = e^y$, $h(x) = e^y = e^{g(x)} = f(g(x))$

Justification : f et g sont continues sur $\mathbb{R}$.

Preuve d'un corollaire : Si g est continue sur I, si f est continue sur J, alors $f \circ g$ est continue sur I

$f \circ g$ est continue sur I $\Leftrightarrow$ l'image inverse d'un ouvert par $f \circ g$ est un ouvert.

Soit $O \subset \mathbb{R}$ un ouvert $\underset{f \text{ continue}}{\Longrightarrow}$ $f^{-1}(O)$ est un ouvert $\underset{g \text{ continue}}{\Longrightarrow}$ $g^{-1}(f^{-1}(O))$ est un ouvert.

Or $\boxed{g^{-1}(f^{-1}(O)) = (f \circ g)^{-1}(O)}$ (exercice)

Preuve du théorème : remplacer ouvert par voisinage de $f \circ g(a)$, de $g(a)$ ou de a.

$\forall W$ = voisinage de $f \circ g(a)$ $\underset{\substack{f \text{ continue} \\ \text{en } g(a)}}{\Longrightarrow}$ $f^{-1}(W)$ est un voisinage de $g(a)$

$\underset{\substack{g \text{ est continue} \\ \text{en } a}}{\Longrightarrow}$ $g^{-1}(f^{-1}(W))$ est un voisinage de a
$= (f \circ g)^{-1}(W)$

Rappel :
$f^{-1}(W) = \{y \in J \mid f(y) \in W\}$

Théorème Soit I : intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Alors

$[f$ continue en $a]$ $\Leftrightarrow$ $[\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite à valeur dans I, si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)]$

Exemple $\begin{cases} f(x) = \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ f(0) = 0 \end{cases}$ f n'est pas continue en 0

Pourquoi ? $u_n = \dfrac{1}{\pi n + \frac{\pi}{2}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

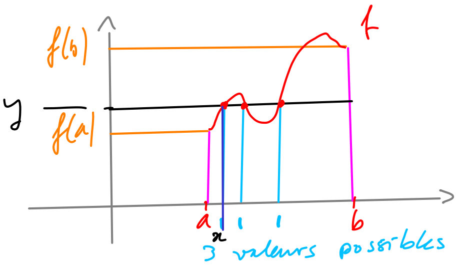
$f(u_n) = \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$: cette suite ne converge pas.

Donc f n'est pas continue en 0.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Supposons que f est continue sur $[a,b]$. Alors $\forall y \in \mathbb{R}$,
si y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors $\exists x \in [a,b]$, $f(x) = y$

Preuve



On supposera $f(a) < f(b)$

Intuition : ça marche parce que la courbe est continue.

Préliminaire 3 cas :
$f(a) < f(b) \to$ celui que l'on va considérer. $\to$ On suppose $f(a) < y < f(b)$
$f(a) = f(b) \to$ rien à montrer $[f(a), f(b)] = \{f(a)\}$
$f(b) < f(a) \to$ analogue au premier cas.

On considère $\boxed{I = \{x \in [a,b];\ \forall t \in [a,x],\ f(t) \leq y\}}$

- $I \neq \emptyset$ car $a \in I$ $\quad(\forall t \in [a,a] = \{a\},\ f(t) = f(a) \leq y)$
- I est majoré par b.

$\Rightarrow I$ admet une borne supérieure $c = \sup I$. ("première valeur de $x \in [a,b]$ en laquelle le graphe rencontre la droite horizontale d'ordonnée y")

$c = \sup I \iff \begin{cases} (i) & c \text{ majore } I \\ (ii) & \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite qui prend ses valeurs dans } I \\ & \text{telle que } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c \end{cases}$

($(\Rightarrow)$ $\forall \varepsilon > 0$, $c - \varepsilon$ ne majore pas $I \Rightarrow \exists x \in I$, $c - \varepsilon < x$
Je peux prendre : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists x \in I$, $c - \frac{1}{n} < x$
Je nomme $u_n = x$
alors $c - \frac{1}{n} < u_n \leq c \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$)

Soit (u_n) : suite à valeur dans I, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$

- $u_n \in I \Rightarrow f(u_n) \leq y$ comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$
comme f est continue, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(c)$

Donc $f(c) \leq y$

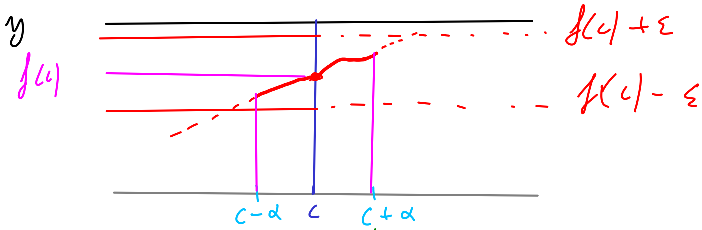
On va montrer que $f(c) = y$ par l'absurde : on suppose $\boxed{f(c) < y}$

Ainsi on suppose : $0 < y - f(c)$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\boxed{\varepsilon < y - f(c)}$

f est continue en c :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in [a,b],\ |x - c| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon \iff f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon}$$



Donc (a) $\left[\begin{array}{l} \forall x \in [a,b] \cap]c-\alpha, c+\alpha[\\ f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon < y \end{array}\right.$

on peut aller à droite de c tout en restant en dessous de y

→ contradiction le fait que $c = \sup I$

De façon plus précise : $c = \sup I \Rightarrow$ pour ce $\alpha > 0$, $c - \alpha$ n'est pas un majorant de I

Donc $\left.\begin{array}{l} \exists x \in I,\quad c - \alpha < x \\ \iff \boxed{\forall t \in [a, x],\quad f(t) \leq y} \end{array}\right]$ (b)

Récapitulatif : Soit $c + \frac{\alpha}{2} \in]c - \alpha, c + \alpha[$.

(a) $\Rightarrow \forall t \in]c - \alpha, c + \frac{\alpha}{2}] \cap [a,b]$, $f(t) \leq y$

(b) $\Rightarrow \exists x \in I \cap]c - \alpha, c + \alpha[\Rightarrow$

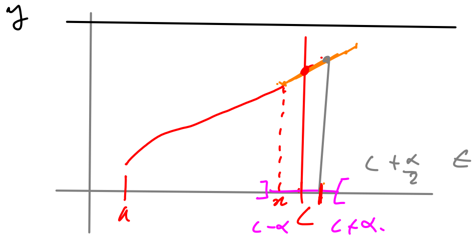
$\forall t \in [a, c - \alpha] \Rightarrow t \in [a, x] \Rightarrow f(t) < y$

(car $c - \alpha < x$) (car $x \in I$)

(a) et (b) $\Rightarrow \left[\forall t \in [a, c + \frac{\alpha}{2}],\ f(t) \leq y\right] \iff \boxed{c + \frac{\alpha}{2} \in I}$

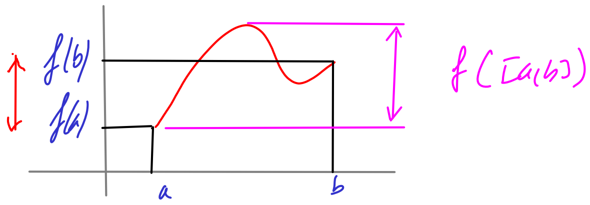
Contradiction : $\underbrace{c = \sup I}_{\text{par définition de } c} < c + \frac{\alpha}{2} \in I$ Impossible

Donc $\boxed{f(c) = y}$



Attention ! Le théorème dit que f continue $\Rightarrow f([a,b]) \supset [f(a), f(b)]$ ou $[f(b), f(a)]$

mais $f([a,b]) \neq [f(a), f(b)]$ ou $[f(b), f(a)]$ en général



Mais Théorème Soit $[a,b]$ un intervalle, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Je suppose que

(i) f est continue

(ii) f est injective

Alors f est une bijection de $[a,b]$ vers l'intervalle fermé borné par $f(a)$ et $f(b)$.

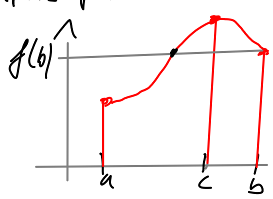
Preuve On suppose $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ car f est injective. Je suppose $f(a) < f(b)$

TVI $\Rightarrow \forall y \in [f(a), f(b)], \exists x \in [a,b], f(x) \in [f(a), f(b)]$

(f est surjectif).

a) $\forall x \in [a,b], \ f(x) \in [f(a), f(b)]$: nous le montrons par l'absurde.

Supposons : $\exists c \in [a,b], \ \boxed{f(c) > f(b)}$



J'applique le TVI sur $f|_{[a,c]}$: $f(a) < f(b) < f(c)$

$\Rightarrow \exists x \in]a,c[, \ f(x) = f(b)$

Or $x < c < b \Rightarrow x \neq b$ } contredit le fait que f est injective

Impossible.

Conclusion $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$

b) Conclusion Image de $f = [f(a), f(b)]$, f est injective.

Donc f est une bijection.

Corollaire Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone. Alors f est une bijection entre $[a,b]$ et l'intervalle de bornes $f(a)$ et $f(b)$.

Preuve f strictement monotone $\Rightarrow$ f est injective. (donc on applique le théorème précédent).