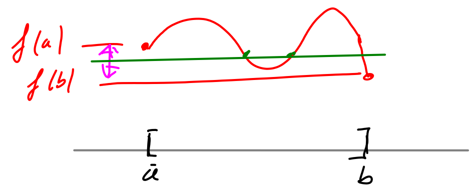
Examen terminal : samedi 13 mars, 9h - 11 h, 264E et 265E et 234C

\+ un contrôle en TD la première semaine de mars.

Théorème des valeurs intermédiaires.

Soit $[a,b]$ un intervalle (fermé borné) et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors $\forall y \in \mathbb{R}$, si y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors $\exists x \in [a,b]$, $f(x) = y$.



Corollaires 1) $\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f \text{ injective} \end{array}\right\} \Rightarrow$ f est une bijection de $[a,b]$ vers son image.

2) $\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f \text{ strictement monotone} \end{array}\right\} \Rightarrow$ même conclusion : bijection $[a,b] \to f([a,b])$

Remarque 3 hypothèses importantes :
- $[a,b]$: intervalle
- continuité de f
- injectivité ou stricte monotonie de f

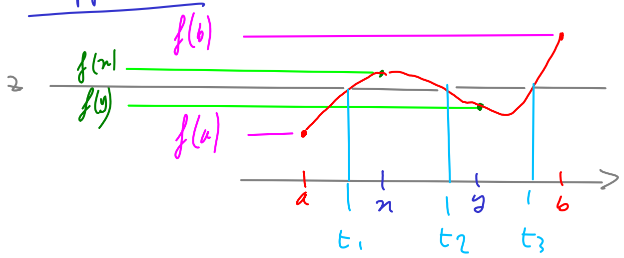
Proposition Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et si f est injective, alors f est strictement monotone. (Réciproque évidente).

Preuve Supposons $\boxed{f(a) < f(b)}$ ($f(a) = f(b)$ est impossible car f est injective)

Montrons que f est croissante.

Raisonnement par l'absurde :

supposons : $\exists x, y \in [a,b]$, $x < y$ et $f(x) > f(y)$



J'applique le TVI pour $z \in \,]f(x), f(y)[$
- sur $[a,x]$
- sur $[x,y]$
- sur $[y,b]$

$\Rightarrow$ 3 valeurs $t_1 < t_2 < t_3$ telles que $z = f(t_1) = f(t_2) = f(t_3)$

Cela contredit le fait que f est injective.

$\to$ Contradiction

Fonctions réciproques (ou inverses) d'une bijection continue sur un intervalle.

Théorème | Soit $f : [a,b] \to [\alpha, \beta]$ une bijection continue, alors

$f^{-1} : [\alpha, \beta] \to [a,b]$
$y \mapsto x$: unique valeur dans $[a,b]$ telle que $f(x) = y$

Alors f^{-1} est continue

Démonstration On utilise le fait que f est strictement monotone (résultat précédent)

Conclusion : en tout $\gamma \in [\alpha, \beta]$, f^{-1} est continue en γ

Montrer cela ? $\rightarrow$ $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall y \in [\alpha, \beta], |y - \gamma| < r \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(\gamma)| < \varepsilon}$

Traduction en introduisant $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$
$c = f^{-1}(\gamma) \Leftrightarrow \gamma = f(c)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in [a,b], |f(x) - f(c)| < r \Rightarrow |x - c| < \varepsilon$

Supposons que f est strictement croissante.
Etant donné $\varepsilon > 0$, je choisis $r = \min(\underbrace{f(c+\varepsilon) - f(c)}_{>0}, \underbrace{f(c) - f(c-\varepsilon)}_{>0})$

car f strictement croissante.

Que se passe-t-il ?
$|f(x) - f(c)| < r \Leftrightarrow f(c) - r < f(x) < f(c) + r$

$$\Rightarrow \underbrace{f(c) - \underbrace{(f(c) - f(c-\varepsilon))}}_{f(c-\varepsilon)} < f(c) - r < f(x) < f(c) + r < f(c) + \underbrace{(f(c+\varepsilon) - f(c))}$$

$f(c-\varepsilon) < f(x) < f(c+\varepsilon)$.

f strictement $\nearrow \Leftrightarrow f^{-1}$ strictement croissante

$c - \varepsilon < x < c + \varepsilon \Leftrightarrow \boxed{|x - c| < \varepsilon}$

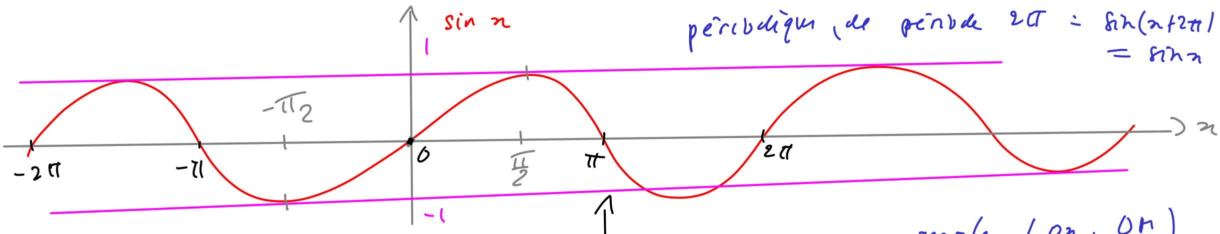
Applications 1) $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto \ln x$

On admet que cette fonction est continue, strictement monotone et que $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$

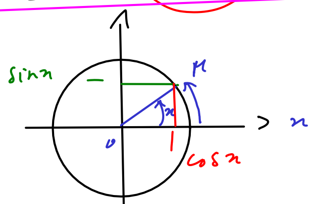
Alors • f est une bijection
• $f^{-1} : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est continue
$f^{-1}(y) = e^y$

(Remarque : on peut définir $\ln$ par $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$)

2) On admet que $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (sinus) est continue
Son image est $[-1, 1]$



périodique de période 2π : $\sin(x+2\pi) = \sin x$



x = angle (Ox, OM) = longueur de l'arc de cercle.

$f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$, $x \longmapsto \sin x$ est continue sur un intervalle, strictement monotone $\Rightarrow$ f est une bijection (corollaire du TVI)

Fonction inverse : $\text{Arc}\sin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $s \mapsto x$ tel que $[\sin x = s] \iff [x = \text{Arc}\sin s]$

elle est continue

Même chose avec cosinus $g : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$, $x \longmapsto \cos x$. g est strictement décroissante, continue $\to$ g bijection : $[0,\pi] \to [-1,1]$

$g^{-1} = \text{Arc}\cos : [-1,1] \to [0,\pi]$, $c \mapsto x$ tel que $(\cos x = c)$

Arccos est continue

Compacité

Définition Soit $K \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$. On dit que K est compact (ou K a la propriété de Bolzano-Weierstrass) si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur dans K, on peut extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge et telle que

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} \in K$$

Attention : on ne prétend pas que $(u_n)_n$ converge..

Théorème Soit $K \subset \mathbb{R}$. Alors

$$[K \text{ compact}] \iff [K \text{ est fermé et borné}]$$

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Preuve $\boxed{\Rightarrow}$ simple à montrer par la contraposée :

K n'est pas (fermé et borné) $\Rightarrow$ K n'est pas compact.

$\Updownarrow$

K n'est pas fermé ou K n'est pas borné $\Rightarrow$ K n'est pas compact

$\Leftarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} [K \text{ n'est pas fermé} \Rightarrow K \text{ n'est pas compact}] \quad (a) \\ \underline{\text{et}}\ [K \text{ n'est pas borné} \Rightarrow K \text{ n'est pas compact}] \quad (b) \end{array} \right.$

(a) K n'est pas fermé $\Leftrightarrow$ K n'est pas <u>séquentiellement fermé</u>

$\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \exists (u_n)_n \text{ suite à valeur dans } K \\ \text{qui converge vers } \ell \notin K. \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ contredire Bolzano-Weierstrass

(b) K n'est pas borné $\Rightarrow$ on construit une suite à valeur dans K qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

$\boxed{\Leftarrow}$ K fermé, borné $\Rightarrow$ K <u>compact</u>

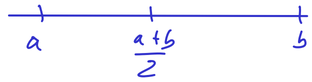
K <u>borné</u> $\Leftrightarrow$ $\exists\, a, b \in \mathbb{R},\quad K \subset [a, b]$

Soit $(u_n)_n$ à valeurs dans K $\Rightarrow$ $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \in [a, b]}$

[<u>Rappel</u> : une sous-suite de $(u_n)_n$ est une suite dont le terme général est $u_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante (donc injectif)

Exemple $\varphi(n) = 2n$, $(u_{\varphi(n)}) = (u_{2n})$]

$$[a, b] = \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \cup \left]\frac{a+b}{2}, b\right]$$



Je voie $u : \mathbb{N} \to [a, b]$

$u^{-1}([a, b]) = \mathbb{N}$ (<u>infini</u>)

$\underbrace{\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \cap \left]\frac{a+b}{2}, b\right]}\ = \emptyset$

$$\Rightarrow \mathbb{N} = u^{-1}\left(\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \cup \left]\frac{a+b}{2}, b\right]\right)$$

$$= \underbrace{u^{-1}\left(\left[a, \frac{a+b}{2}\right]\right) \cup u^{-1}\left(\left]\frac{a+b}{2}, b\right]\right)}_{\text{ces deux ensembles sont disjoints.}}$$

$\rightarrow$ au moins un des deux est <u>infini</u> (principe de tiroirs)

Je choisis un intervalle qui est infini.

- Supposons que cela soit celui de gauche $\rightarrow$ $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$

  $[a_1, b_1] = \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$

- ——————————— droite $\rightarrow$ $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$

  $[a_1, b_1] = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$

Dans tous les cas <u>$u^{-1}([a_1, b_1])$</u> est infini

Je choisis $\varphi(0) = \min\{n \in \mathbb{N},\ u_n \in [a_1, b_1]\}$ $\leftarrow$ ensemble infini donc non vide.

<u>Je réitère</u> : Je coupe en deux $[a_1, b_1] = \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right] \cup \left]\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$

Même raisonnement : il existe au moins un des deux intervalles dont l'image inverse par u est infini.

Je l'appelle $[a_2, b_2]$

$\varphi(2) = \min \{ n \in \mathbb{N} ; \ n \geq \varphi(0), \ u_n \in [a_2, b_2] \}$.

etc. ...

On construit une suite de segments emboîtés

$[a, b] = [a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$

et $\left| \begin{array}{l} (a_n)_n \text{ est croissante} \\ (b_n)_n \text{ est décroissante.} \\ |b_n - a_n| = \frac{b-a}{2^n} \end{array} \right.$

$\underbrace{a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n.}_{}$

Théorème des gendarmes $\rightarrow$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$

2 suites adjacentes qui convergent vers une même limite ℓ

$\ell \in K$? Simple : K fermé $\Leftrightarrow$ K est séquentiellement fermé $\Rightarrow \ell \in K$

$u_{\varphi(n)} \in K$

Théorème L'image d'un compact par une fonction continue est un compact.

Preuve Soit K un compact $f : K \to \mathbb{R}$ compact

Soit $(v_n)_n$ une suite à valeur dans $f(K)$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \in f(K) \Leftrightarrow \exists x \in K, \ f(x) = v_n.$

J'appelle u_n une valeur de x telle que $f(u_n) = v_n$.

$(u_n)_n$ à valeur dans K $\underset{K \text{ compact.}}{\Longrightarrow}$ $\exists (u_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers $\ell \in K$

$\underset{f \text{ continue}}{\Longrightarrow}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_{\varphi(n)}) = \lim\limits_{n \to +\infty} v_{\varphi(n)} = f(\ell)$

Théorème Soit K un compact et $f : K \to \mathbb{R}$ continue.

Alors f est bornée et "atteint ses bornes" :

$\exists \alpha \in K, \quad f(\alpha) = \sup f(K) = \sup \{ f(x) \mid x \in K \}$

$\exists \beta \in K, \quad f(\beta) = \inf f(K)$

Démonstration d'après le théorème précédent, $f(K)$ est compact. Donc borné...

Soit $b = \sup f(K)$ (existe car $K \neq \emptyset$ et $f(K)$ est majoré).

$\underbrace{\exists (v_n) \text{ à valeur dans } f(K)}_{}$ telle que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = b}$ $= \sup f(K)$

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists u_n \in K, \ v_n = f(u_n)$. J'extrais une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de $(u_n)_n$. (K compact).

qui converge vers $\ell \in K$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$$

$\underset{f \text{ continue}}{\Longrightarrow}$ $\quad b = \lim_{n\to+\infty} v_{\varphi(n)} = \lim_{n\to+\infty} f(u_{\varphi(n)}) = f(\ell)$

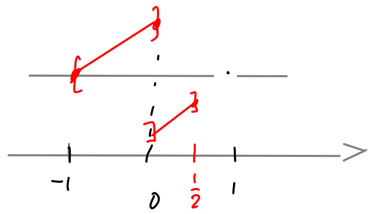
Donc $f(\ell) = \sup f(K)$ et $\ell \in K$.

Théorème Heine Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue (+ fort que continue).

Exemple de bijection non continue

$f : [-1, \frac{1}{2}) \to [-1, \frac{1}{2}]$

$$\begin{cases} f(x) = x+1 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ f(x) = x-1 & \text{si } x \in]0, \frac{1}{2}) \end{cases}$$



Plus tordu : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$

$f(x) = x+1$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Bijection, continue nulle part