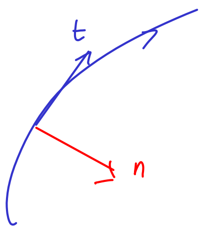
Retour sur la dernière séance : $\gamma = u \circ \sigma$

u : paramétrisation normale.
σ : abscisse curviligne

$$\ddot{\gamma}(t) = \frac{d^2\gamma}{dt^2}(t) = \underbrace{(k \circ \sigma)}_{\text{courbure : quantité géométrique}}(\dot{\sigma})^2 \underbrace{n(\sigma)}_{\text{composante normale.}} + \underbrace{\ddot{\sigma}\; t(\sigma)}_{\text{moins intéressant sur le plan géométrique}}$$

$\longrightarrow$ pas d'information sur la forme de la courbe



Fonctions de plusieurs variables "différentiables". Calcul différentiel

Définition Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, $a \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^p$. On dit que f est différentiable en a si $\exists A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ tel

$U \ni a \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{\|f(x) - f(a) - A(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$$

$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in U \setminus \{a\}, \|x-a\| < \alpha \Rightarrow \dfrac{\|f(x) - f(a) - A(x-a)\|}{\|x-a\|} < \varepsilon$

$\iff \quad f(x) = f(a) + A(x-a) + o(\|x-a\|)$

Propriété : si A existe, il est unique. On note $\boxed{A = df_a} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$

df_a : différentielle de f en a.

$$f(x) = f(a) + \underbrace{df_a}_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)} \underbrace{(x-a)}_{\mathbb{R}^n} + o(\|x-a\|)$$

Définition a) Si $\forall a \in U$, df_a existe, f est différentiable sur U.

b) Si c'est le cas, $df : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est la différentielle de f.
$\quad x \longmapsto df_x$

c) Si c'est le cas, si $df \in \mathcal{C}^0(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p))$ On dit que f est $\mathcal{C}^1$.

On peut réitérer : $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}^p) \iff df \in \mathcal{C}^1(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p))$ etc.

‖ Matrice de df_a dans une base de $\mathbb{R}^n$ (ici : la base canonique)
= Matrice jacobienne (Jacobi)

$f = (f^1, \dots, f^p)$

$$Jf_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(a) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^p}{\partial x^1}(a) & \cdots & \frac{\partial f^p}{\partial x^n}(a) \end{pmatrix}$$

n lignes
p colonnes.

$\frac{\partial f^j}{\partial x^i}$: dérivées partielles. $\left(f\ \mathcal{C}^1 \iff \forall i, j,\ \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})\right)$

Notation : si je prends comme fonction sur $U \to \mathbb{R}^p$ $(p=1)$

Fonctions coordonnées
$$\left\{ \begin{array}{l} x^j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad \xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \longmapsto \xi^j \end{array} \right.$$

$x^j \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
(et même $\mathcal{C}^\infty$)

$$dx^j_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\xi \longmapsto \xi^j$$

(De façon générale, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est linéaire : $f(x) = Ax$, A : matrice, $df_a = f$.)

Mais $d(dx^j) = 0$

car $[a \longmapsto dx^j_a]$ est constante.

Je note $\underline{\boxed{dx^j}} = dx^j_a$, $\forall a \in \mathbb{R}^n$

Point important $(dx^1, \dots, dx^n)$: base de $(\mathbb{R}^n)^*$.

Conséquence : pour $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$ quelconque.

$(e_1, \dots, e_p)$: base de $\mathbb{R}^p$

$$dF_a = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(a)\, e_j\, dx^i = \sum_{j=1}^p \Big(\underbrace{df^j_a}_{\in (\mathbb{R}^n)^*} \Big) e_j$$
$$= \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(a)\, dx^i \right) e_j$$

Exemple $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$df_a \in (\mathbb{R}^2)^*$
(dx^1, dx^2) : base de $(\mathbb{R}^2)^*$
donc $df_a = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2$

Si $\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^i}(a) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(a)\, e_j}_{\in \mathbb{R}^p}$, alors
$$\boxed{df_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)\, dx^i}$$

Règles de calcul (Lemmes).

Composition de deux fonctions différentiables.

Thm | Soit $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ ouverts, $f \in C^1(V, \mathbb{R}^p)$, $g \in C^1(U, V)$.

$$\begin{array}{ccccc} \subset \mathbb{R}^m & & \subset \mathbb{R}^n & & \\ U & \xrightarrow{g} & V & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^p \end{array}$$

$$U \xrightarrow{f \circ g} \mathbb{R}^p$$

Alors $f \circ g \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$ et : $\forall a \in U$

$$\boxed{d(f\circ g)_a = df_{g(a)} \circ dg_a}$$

composition $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \circ \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

généralisation de $(f\circ g)' = (f' \circ g)\, g'$

produit dans $\mathbb{R}$

Traductions

a) Matrices jacobiennes : $J(f\circ g)_a = Jf_{g(a)} \cdot Jg_a$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial (f^1 \circ g)}{\partial x^1}(a) & \cdots & \frac{\partial (f^1 \circ g)}{\partial x^m}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial (f^p \circ g)}{\partial x^1}(a) & \cdots & \frac{\partial (f^p \circ g)}{\partial x^m}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y^1}(g(a)) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial y^n}(g(a)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^p}{\partial y^1}(g(a)) & \cdots & \frac{\partial f^p}{\partial y^n}(g(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial x^1}(a) & \cdots & \frac{\partial g^n}{\partial x^1}(a) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g^m}{\partial x^1}(a) & \cdots & \frac{\partial g^m}{\partial x^n}(a) \end{pmatrix}$$

m colonnes, p lignes — n colonnes, p lignes — m colonnes, n lignes.

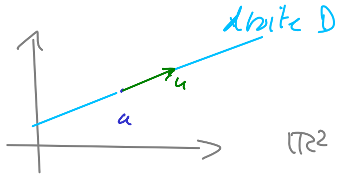
b) $$\frac{\partial (f^k \circ g)}{\partial x^i}(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^k}{\partial y^j}(g(a)) \, \frac{\partial g^j}{\partial x^i}(a).$$

Une autre notion (plus faible) : dérivée directionnelle.

Déf Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$, $a \in U$, $u \in \mathbb{R}^n$.

On dit que f admet une dérivée (directionnelle) en a, dans la direction u si

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} \text{ existe}$$



($f|_D$ est dérivable en a.)

Alors $$D_u f(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}$$

Lemme Si f est différentiable en a, alors, $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $D_u f(a)$ existe.

$\exists$ différentielle
$\Downarrow$
$\exists$ dérivée directionnelle

et $\boxed{D_u f(a) = df_a(u)}$

Réciproque fausse. Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{3x^2y - y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$

mais f n'est pas différentiable en 0. mais $\forall u \in \mathbb{R}^2$ $D_u f(0,0)$ existe

Pourquoi ? en polaire $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $\quad r \in [0,+\infty[$, $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Exercice. $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\sin 3\theta$.

$\Rightarrow D_u f(0,0) = \rho \sin 3\alpha$ où $u = \rho(\cos\alpha, \sin\alpha)$

- mais il n'y a pas de différentielle.

Raisonnement par l'absurde : si df_0 existait, alors $D_u f(0,0) = df_0(u)$

$$D_u f(0,0) = \frac{3(u^1)^2u^2 - (u^2)^3}{(u^1)^2 + (u^2)^2}$$

(homogène de degré 1)

pas linéaire du tout ! $u = (u^1, u^2)$. $\to$ contradiction

Théorème Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$, $a \in U$. Soit $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n \supset U$. Supposons que : $\forall i = 1, \dots, n$,

a) $D_{E_i} f$ existe sur un voisinage de a.

b) $x \mapsto D_{E_i} f(x)$ est continue en a.

Alors f admet une différentielle en a et :

$$\boxed{df_a = D_{E_1} f(a)\, dx^1 + \dots + D_{E_n} f(a)\, dx^n}$$

donc les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}(a) = D_{E_i} f(a)$

(déf : coefficients de $df_a = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)\, dx^i$)

Théorème (Lemme de Schwarz)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$. Supposons que df est différentiable en a.

Alors $$\boxed{\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)}{\partial x^j}(a) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)}{\partial x^i}(a).}$$

On note $\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)}{\partial x^j}$. Alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(a)$

Corollaire Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$ et $df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, est différentiable partout on note $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ ses dérivées partielles secondes (sans se préoccuper de l'ordre).

Corollaire des deux résultats précédents.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$ et $\forall i = 1, \dots, n$, $\forall a \in U$, $D_{E_i} df(a)$ existe et $\forall i = 1, \dots, n$, $D_{E_i} df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est continue

Alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$ partout et f est $\mathcal{C}^2$.

Preuve

$D_{E_i} df$ existe sur un voisinage de a et est continue en a $\Longrightarrow$ df est différentiable en a : $d(df)_a$ existe $\overset{\text{Schwarz}}{\Longrightarrow}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(a)$

Lemme de Hadamard Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$.

Soit $x_0 \in U$. Alors $\exists\, g_1, \dots, g_n \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^n)$ telles que :

$$\forall x \in U, \quad \begin{cases} f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\,(x^i - x_0^i) \\ \forall i, \quad g_i(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0). \end{cases}$$

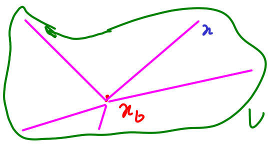
Preuve $f(x) - f(x_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[f\left((1-t)x_0 + tx\right)\right] dt$

U étoilé par rapport à x_0

$\forall x \in U, \quad [x_0, x] \subset U$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}\left((1-t)x_0 + tx\right)(x^i - x_0^i)\, dt$$

$$= \sum_{i=1}^n g_i(x)\,(x^i - x^i_0)\, dt$$



où $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}\left((1-t)x_0 + tx\right) dt$

Théorème d'inversion locale

(solution "locale" de l'équation $f(x) = y$)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$. Soit $a \in U$ tel que

$\boxed{df_a \text{ est inversible}}$ (isomorphisme $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$)

Alors $\exists\, U_a$: voisinage de a dans U
$\exists\, V_{f(a)}$: ——— $f(a)$ dans $\mathbb{R}^n$

tels que $f|_{U_a} : U_a \longrightarrow V_{f(a)}$ est un difféomorphisme

et $\boxed{d(f^{-1})_y = \left(df_{f^{-1}(y)}\right)^{-1}}$ $\forall y \in V_{f(a)}$.

Remarque : valable si $U \subset E$ (Banach) $f : U \to E$, df_a : isomorphisme.
Preuve identique.

Preuve 0) Normalisation : on utilise l'hypothèse df_a inversible

$\to$ on change f en $x \longmapsto (df_a)^{-1}\left[f(a+x) - f(a)\right]$

($f \longmapsto G \circ f$ où G : affine inversible)

Alors je me ramène au cas où $\begin{cases} 0 \in U, & df_0 = 1_n \text{ (identité)}. \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) df est continue en 0 ($\Leftarrow f\ \mathcal{C}^1$)

$\exists r > 0, \quad \forall x \in B_r = B(0, r), \quad \|df_x - 1_n\| < \frac{1}{2}$

(Hadamard) $\Rightarrow$ $f(x) = A(x)\cdot x$ où $A(x) = \int_0^1 df_{tx}\, dt$

$A(0) = 1_n$

si $x \in B_r$, $\|A(x) - 1_n\| < \frac{1}{2}$

Parenthèse heuristique posons $T(x) = 1_n - A(x) = \int_0^1 (df_0 - df_{tx})\, dt$

$\|T(x)\| < \frac{1}{2}$

Equation à "résoudre" : $f(x) = A(x)\cdot x = y$

$\iff (1_n - T(x))\, x = y$

On pense à un autre problème : $(1_n - T)\, x = y$ où $T \in End(\mathbb{R}^n)$, $\|T\| < 1$

Solution : $x = \sum_{k=0}^{+\infty} T^k y = y + Ty + T^2 y + T^3 y + \dots$

$\to$ Solutions approchées :

$x = y$

$x = y + Ty$

$x = y + Ty + T^2 y = y + T(y + Ty)$

$x = y + Ty + T^2 y + T^3 y =$

$y + T(y + Ty + T^2 y)$

$= y + T(y + T(y + Ty))$

Itération.

Si $(y+T) : z \mapsto y + Tz$, alors $x = \lim_{k \to +\infty} (y+T)^k y$

Fin de l'heuristique : je vais remplacer $(y+T)$ par $z \mapsto y + z - f(z)$

$= y + z - A(z)\cdot z$

Je considère, sur $\overline{B}_r$, $g_y : \overline{B}_r \to \mathbb{R}^n$

$z \mapsto y + z - f(z)$

Idée : chercher $x = \lim_{k \to +\infty} g_y^k (y)$

Outil : théorème de point fixe de Banach ; On choisit $\boxed{y \in B_{\frac{r}{2}}}$

On va montrer que g_y applique $\overline{B}_r \to \overline{B}_r$ (espace métrique complet)

| et $\|g_y(z_2) - g_y(z_1)\| < k \|z_2 - z_1\|$ où $k < 1$

Thm de point $\Rightarrow \exists ! \, x \in \overline{B_r}, \; g_y(x) = x$

$\iff y + x - f(x) = x$

$\iff \boxed{f(x) = y}$

a) g_y applique $\overline{B_r}$ dans elle-même

$\forall z \in \overline{B_r}, \quad \|g_y(z)\| = \|y + z - f(z)\| \leq \|y\| + \|z - f(z)\|$

$\leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$ donc $g_y(z) \in \overline{B_r}$

b) g_y est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne $\forall z_1, z_2 \in \overline{B_r}$

$\|g_y(z_2) - g_y(z_1)\| = \|(\cancel{y} + z_2 - g(z_2)) - (\cancel{y} + z_1 - g(z_1))\|$

$= \|z_2 - z_1 - g(z_2) + g(z_1)\|$

$= \left\| \int_0^1 (I_n - df_{(1-t)z_1 + tz_2})(z_2 - z_1) \, dt \right\|$

$\leq \int_0^1 \underbrace{\|I_n - df_{(1-t)z_1+z_2}\|}_{\leq \frac{1}{2}} \|z_2 - z_1\| \, dt \leq \frac{\|z_1 - z_2\|}{2}$

$\Rightarrow \exists ! \, x \in \overline{B_r}, \quad f(x) = y$

Donc $\exists \quad V_0 = \overline{B}_{\frac{r}{2}}, \quad U_0 = f^{-1}(\overline{B_{\frac{r}{2}}}) \subset \overline{B_r}, \quad f^{-1} : V_0 \to U_0$

$y \mapsto x, \; f(x) = y$

2), 3) Reste à montrer que : f^{-1} est continue & $d(f^{-1})$ existe.

$\Uparrow$

f^{-1} lipschitzienne