Preuve du théorème d'inversion locale

U ouvert, $\subset \mathbb{R}^n$

$f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$, df_{x_0} est inversible $\Rightarrow \underbrace{f|_{U_{x_0}} : U_{x_0} \longrightarrow V_{f(x_0)}}_{\text{difféomorphisme}}$

si $p \geq 1$, $f\ \mathcal{C}^p \Rightarrow \underbrace{(f|_{U_{x_0}})^{-1}}_{h}\ \mathcal{C}^p$

$dh_y = (df_{f^{-1}(y)})^{-1}$

Démonstration $\forall y \in \bar{B}_{\frac{r}{2}}$

Rappel

$g_y : \bar{B}_r \longrightarrow \bar{B}_r$, $z \longmapsto y + z - f(z)$ $\rightarrow \exists!\, x \in \bar{B}_r,\ g_y(x) = x \iff f(x) = y$

$\rightarrow$ existence

$h : \bar{B}_{\frac{r}{2}} \longrightarrow h(\bar{B}_{\frac{r}{2}}) \subset \bar{B}_r$

inverse local de f : $f \circ h = Id_{\bar{B}_{\frac{r}{2}}}$

$\bar{B}_r \xleftarrow{h} \bar{B}_{\frac{r}{2}} \ni y$, g_y

Reste à montrer : b) h est continue, c) $\mathcal{C}^1$.

b) h est lipschitzienne. Rappel $\|g_y(x') - g_y(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x' - x\|$

$\forall y_1, y_2 \in \bar{B}_{\frac{r}{2}}$, $\|h(y_2) - h(y_1)\| \leq \ ? \ \ldots \ ?$

Comme h : bijection : $\begin{cases} x_1 = h(y_1) \\ x_2 = h(y_2) \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = f(x_1) \\ y_2 = f(x_2) \end{cases}$

$$\|h(y_2) - h(y_1)\| = \boxed{\|x_2 - x_1\|} = \|f(x_2) - f(x_1) + \underbrace{x_2 - f(x_2) - x_1 + f(x_1)}_{g_y(x_2) - g_y(x_1)}\|$$

$$\leq \|f(x_2) - f(x_1)\| + \|g_y(x_2) - g_y(x_1)\|$$

$$\leq \boxed{\|y_2 - y_1\| + \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\| \leq \|y_2 - y_1\|$$

$$\iff \|h(y_2) - h(y_1)\| \leq 2\|y_2 - y_1\|$$ $\rightarrow$ continuité de h

c) Calcul de la différentielle : $y_1, y_2 \in \bar{B}_{\frac{r}{2}}$, $\boxed{\begin{matrix} y_1 = f(x_1) \\ y_2 = f(x_2) \end{matrix}}$ $h = f^{-1}$

$$\frac{\|h(y_2) - h(y_1) - \boxed{(df_{f^{-1}(y_1)})^{-1}}(y_2 - y_1)\|}{\|y_2 - y_1\|}$$

Hypothèse : $dh_{y_1} = (df_{f^{-1}(y_1)})^{-1}$

$$= \frac{\| x_2 - x_1 - (df_{x_1})^{-1}(f(x_2) - f(x_1)) \|}{\| y_2 - y_1 \|}$$

(Vu précédemment : $\| x_2 - x_1 \| \leq 2 \| y_2 - y_1 \|$ $\iff$ $\frac{1}{\|y_1 - y_2\|} \leq \frac{2}{\| x_2 - x_1 \|}$)
($f^{-1} = h$ est 2-lipschitzienne)

$$\leq 2 \frac{\| (df_{x_1})^{-1} [(df_{x_1})(x_2 - x_1) + f(x_2) - f(x_1)] \|}{\| x_2 - x_1 \|}$$

$$\leq 2 \| (df_x)^{-1} \| \underbrace{\frac{\| f(x_2) - f(x_1) - df_{x_1}(x_2 - x_1) \|}{\| x_1 - x_1 \|}}$$

$\to 0$ si $\| x_2 - x_1 \| \to 0$ car f différentiable en x_1.

Conclusion $h = f^{-1}$ est différentiable et $dh_y = (df_{f^{-1}(y)})^{-1}$

$$J(df_{f^{-1}(y)})^{-1} = (\underbrace{Jf}_{\text{continue}} \circ \underbrace{f^{-1}}_{\text{opération continue}})^{-1}$$ opération continue sur $GL(n, \mathbb{R})$

(Inverse $\circ$ Jf $\circ$ f^{-1}) Donc $dh = d(f^{-1})$ est $\mathcal{C}^0$.

Corollaires Théorème des fonctions implicites $f(x, y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ inversible $\Big|$ $y = \varphi(x)$

Préliminaire Supposons $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2$

Alors $i_1 : E_1 \to \mathbb{R}^n$
$i_2 : E_2 \to \mathbb{R}^n$ application inclusion

Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$ $U \subset \mathbb{R}^n$ $df_x \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$

Notation
$$\partial_{E_1} f_x := df_x \circ i_1 : E_1 \to \mathbb{R}^p$$
$$\partial_{E_2} f_x := df_x \circ i_2 : E_2 \to \mathbb{R}^p$$

Exemple $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$
$(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q)$

$$\partial_{E_1} f = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$
$$\partial_{E_2} f = \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial f}{\partial y^j} dy^j$$

Théorème (Fonctions implicites) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, ouvert

$\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2$

$\left(\dim E_1 = p, \ \dim E_2 = q\right)$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^q)$

$p+q = n$ $\quad E_2 \simeq \mathbb{R}^q$

Soit $a \in U$ tel que $\boxed{f(a) = 0}$. Supposons que $\boxed{\partial_{E_2} f}_a$ est $\boxed{\text{inversible}}$ $\left(\mathcal{L}(E_2, \mathbb{R}^q)\right)$

Alors $\exists\, U_a$: voisinage de a dans U,

$\exists\, \Omega$: ouvert dans E_1, $\exists\, \varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^q)$ tel que

$$\boxed{\{(x,y) \in U_a \ ; \ f(x,y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) \ ; \ x \in \Omega\}}$$

" $\{\text{Solutions } (x,y) \text{ de } f(x,y) = 0\} = \{(x, \varphi(x))\}$ "

$(x \in E_1, \ y \in E_2)$.

Démonstration Notons $a = (x_0, y_0)$, $f(x_0, y_0) = 0$

Introduisons

$$F : U \longrightarrow \mathbb{R}^{p+q}$$
$$(x,y) \longmapsto (x, f(x,y)) = (\underbrace{F^1(x,y)}_{\mathbb{R}^p}, \underbrace{F^2(x,y)}_{\mathbb{R}^q})$$

$$dF_a = \begin{pmatrix} \partial_{E_1} F^1 & \partial_{E_2} F^1 \\ \partial_{E_1} F^2 & \partial_{E_2} F^2 \end{pmatrix}(a) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline \partial_{E_1} f & \underbrace{\boxed{\partial_{E_2} f}}_{\text{inversible}} \end{array}\right)(a) \text{ est inversible.}$$

On applique le théorème d'inversion locale : $\exists\, G : V_{f(a)} \longrightarrow U_a$: inverse local de F

Calcul de $G = F^{-1}$

$\forall (x,z) \in V_{f(a)}$

$$U_a \underset{F}{\overset{G}{\rightleftarrows}} V_{f(a)} \ni (x,z)$$

$$(x,z) = F \circ G(x,z) = F(G^1(x,z), G^2(x,z))$$
$$= (G^1(x,z), f(G^1(x,z), G^2(x,z)))$$

par définition de $F(x,y) = (x, f(x,y))$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = G^1(x,z) \\ z = f(G^1(x,z), G^2(x,z)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = G^1(x,z) \\ z = f(x, G^2(x,z)) \end{cases}$$

Donc $F^{-1}(x,z) = G(x,z) = \boxed{(x, G_2(x,z))}$

Retour à l'équation $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ f(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow F(x,y) = (x, 0)$

$$\iff (x,y) = F^{-1}(x,0) = (x, G_2(x,0))$$

Solution : $\varphi(x) = G_2(x,0)$.

Théorème du rang constant.

$U \subset \mathbb{R}^m$

Déf Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$, $x \in U$, $\underbrace{\mathrm{rg}(f)(x)}_{\text{rang de } f \text{ en } x} := \underbrace{\mathrm{rg}(df_x)}_{\text{rang de } df_x} \in \mathbb{N}$

$\left(0 \leq \mathrm{rg}(f)(x) \leq \max(m,n) \right)$

Théorème Soit U ouvert $\subset \mathbb{R}^m$, $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$

Supposons que le rang de f est constant sur U, égal à $r \leq \max(m,n)$

Alors $\forall x_0 \in U$, $\exists U_{x_0}$: voisinage de x_0 dans U

$\exists V_{f(x_0)}$: —— $f(x_0)$ —— $\mathbb{R}^n$

$\exists U'$: ouvert $\subset \mathbb{R}^m$, $\exists V'$: ouvert $\subset \mathbb{R}^n$

$\exists \underbrace{\Phi : U' \to U_{x_0}}_{\text{difféomorphism}}$, $\exists \underbrace{\Psi : V_{f(x_0)} \to V'}_{\text{difféo.}}$

tels que $\forall (t^1, \dots, t^m) \in U' \subset \mathbb{R}^m$,

$$\boxed{\Psi \circ f \circ \Phi = (t^1, \dots, t^r, 0, \dots, 0)}$$

$\boxed{x_0 \in U}$

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{R}^m \supset U \supset & U_{x_0} & \xrightarrow{f} & V_{f(x_0)} & \subset \mathbb{R}^n \\
& \Phi \uparrow & & \downarrow \Psi & \\
& U' & \xrightarrow{\Psi \circ f \circ \Phi} & V' & \\
& (t^1, \dots, t^m) & \longmapsto & (t^1, \dots, t^r, 0, \dots, 0) &
\end{array}$$

Démonstration a) Utilisation de : $\mathrm{rg} f \geq r$ ($\to$ construction de Φ)

Jf_{x_0} contient un mineur extrait de taille $r \times r$ non nul

Sans perte de généralité (je remplace f par $P_1 \circ f \circ P_2$, où $P_1 \in GL(\mathbb{R}^n)$, $P_2 \in GL(\mathbb{R}^m)$: permutations des vecteurs de colonnes)

Je peux supposer que :

$$\frac{\partial(f^1,\dots,f^r)}{\partial(x^1,\dots,x^r)}(x_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^r}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^r}{\partial x^r} \end{vmatrix}(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(f^1,\dots,f^r)}{\partial(x^1,\dots,x^r)} \neq 0$$

sur un voisinage de x_0

Sans perte de généralité ce mineur est $\neq 0$ sur U.

Soit $F : U \to \mathbb{R}^m$

$x \mapsto (f^1(x), \dots, f^r(x), x^{r+1}, \dots, x^m)$

$$JF_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^r}{\partial x^r} & \frac{\partial f^1}{\partial x^{r+1}} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ \frac{\partial f^r}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^r}{\partial x^r} & \frac{\partial f^r}{\partial x^{r+1}} & \cdots & \frac{\partial f^r}{\partial x^m} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible $\to$ Je peux appliquer le théorème d'inversion locale.

$\exists\, U_{x_0} \subset \mathbb{R}^m$, $\exists\, U'$ ouvert $\subset \mathbb{R}^m$, $F : U_{x_0} \to U'$ difféomorphisme

$\Phi = F^{-1} : U' \to U_{x_0}$ difféo.

Notations | si $t = (t^1, \dots, t^m)$, | $\underline{t} = (t^1, \dots, t^r)$, $t_+ = (t^{r+1}, \dots, t^m)$ $\in \mathbb{R}^m$

$t = (\underline{t}, t_+)$

$(F^1, \dots, F^r) = \underline{F}$; $(F^{r+1}, \dots, F^m) = F_+$

$F = (\underline{F}, F_+)$

$f = (\underline{f}, f_+)$, $\underline{f} = (f^1, \dots, f^r)$, $f_+ = (f^{r+1}, \dots, f^n)$

$F(\underline{x}, x_+) = (\underline{f}(\underline{x}, x_+), x_+)$

$\Rightarrow \underline{f} \circ \Phi(\underline{t}, t_+) = \underline{t} \iff \boxed{\forall i,\ 1 \leq i \leq r,\ f^i(\Phi(t)) = t^i}$

Donc $f \circ \Phi$ a la forme

$$f \circ \Phi(t) = \begin{pmatrix} t^1 \\ \vdots \\ t^r \\ g^{r+1}(t) \\ \vdots \\ g^n(t) \end{pmatrix} \to J(f \circ \Phi)_t = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline \frac{\partial g}{\partial \underline{t}} & \frac{\partial g}{\partial t_+} \end{array}\right)$$

b) Utilisation de : $\operatorname{rg} f \leq r$. $\Rightarrow \forall i, j \begin{cases} r+1 \leq i \leq n \\ r+1 \leq j \leq m \end{cases}$, $\frac{\partial g^i}{\partial t^j} = 0$

$\frac{\partial g}{\partial t_+} = 0$

On le montre en raisonnant par l'absurde :

Supposons $\exists\ r+1 \leq i \leq n,\ r+1 \leq j \leq m,\ \frac{\partial g^i}{\partial t^j} \neq 0$

$\Rightarrow$ On extrait un mineur $(r+1)\times(r+1)$ de $J(f\circ\phi)$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ \hline \frac{\partial g^i}{\partial t^1} & \cdots & \frac{\partial g^i}{\partial t^r} & \frac{\partial g^i}{\partial t^j} \end{array}\right| \neq 0 \qquad \text{Contradiction}$$

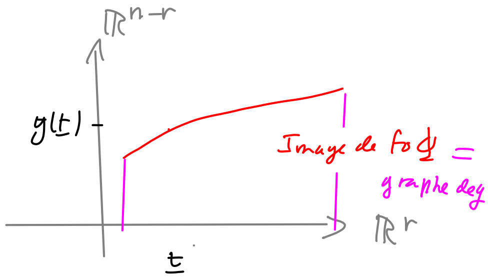
Donc $\frac{\partial g}{\partial t_+} = 0$ $\qquad J(f\circ\phi)_t = \left(\begin{array}{c|c} 1_{r\times r} & 0_{r\times(m-r)} \\ \hline \times \ \cdots \ \times & 0_{(n-r)\times(m-r)} \\ \times \ \cdots \ \times & \end{array}\right)$

$\Downarrow$

$g(t)$ ne dépend que de $\underline{t} = (t^1, \dots, t^r)$

$\Leftrightarrow\ g(t^1, \dots, t^m) = g(t^1, \dots, t^r)$

Donc $f\circ\phi(t) = \begin{pmatrix} \underline{t} \\ g(\underline{t}) \end{pmatrix}$ Image



Redresser le graphe de g : $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\left(\underline{y} = (y^1, \dots, y^r) ; y_+ = (y^{r+1}, \dots, y^n) \right)$ $\qquad y \longmapsto (\underbrace{y^1, \dots, y^r}_{\underline{y}}, y^{r+1} - g^{r+1}(\underline{y}), \dots, y^n - g^n(\underline{y}))$

$$\psi(\underline{y}, y_+) = (\underline{y}, y_+ - g(\underline{y}))$$

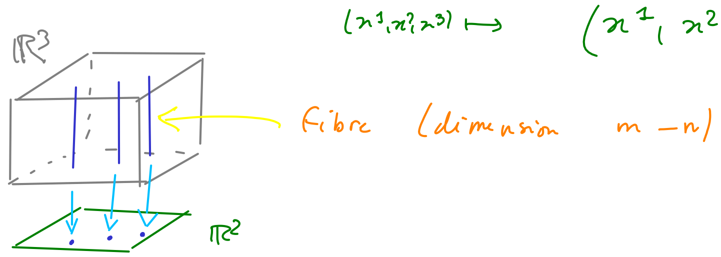
et $\psi \circ f\circ\phi(t) = (\underline{t}, g(\underline{t}) - g(\underline{t})) = (\underline{t}, 0)$.

Définition Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^m$

a) (Submersion) Si $m \geq n$ et si $\mathrm{rg}(f) = n$ partout, f est une <u>submersion</u>

Exemple : $U = \mathbb{R}^3$, $\quad f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\qquad (x^1, x^2, x^3) \longmapsto (x^1, x^2)$



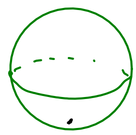
b) (Immersion) dim $m \leq n$ et si $\operatorname{rg} f = m$ partout
f est une immersion.

Exemple $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x^1, x^2) \longmapsto \frac{1}{1+(x^1)^2+(x^2)^2} \begin{pmatrix} 2x^1 \\ 2x^2 \\ 1-(x^1)^2-(x^2)^2 \end{pmatrix}$$

$Jf(x)$ est de rang 2 partout. Image $f = S^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Où $S^2 = \{ (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = \|x\|^2 = 1 \}$
est la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$



Corollaire du thm du rang constant

Théorème Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^m$, $m \leq n$.
une immersion. Alors $\forall x_0 \in U$, $\exists\, \Phi : U' \to U_{x_0}$, $\exists\, \Psi : V_{f(x_0)} \to V'$ difféomorphismes.
tels que $\Psi \circ f \circ \Phi(\underbrace{t^1, \dots, t^m}_{t}) = (\underbrace{t^1, \dots, t^m}_{t}, 0, \dots, 0)$

$$\begin{tikzcd} U \supset U_{x_0} \arrow[r, "f"] & V_{f(x_0)} \subset \mathbb{R}^n \arrow[d, "\Psi"] \\ U' \arrow[u, "\Phi"] & V' \end{tikzcd}$$

Amélioration 1) Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ $U \subset \mathbb{R}^m$ et
si $x_0 \in U$, df_{x_0} de rang m $\Longrightarrow$ $\operatorname{rg}(f) = m$ sur un voisinage de x_0
$\Longrightarrow$ f est localement une immersion.

2) En travaillant un peu plus, on peut avoir :
$\exists\, \tilde{\Psi} : V_{f(x_0)} \to V'$, $\tilde{\Psi} \circ f(t^1, \dots, t^m) = (t^1, \dots, t^m, 0, \dots, 0)$
(le Φ est caché dans $\tilde{\Psi}$)

Thm Si f est une submersion ($m \geq n$), $\exists\, \Phi : U' \to U_{x_0}$, $\exists\, \Psi : V_{f(x_0)} \to V'$, difféomorphismes
tels que $\Psi \circ f \circ \Phi(t^1, \dots, t^m) = (t^1, \dots, t^n)$