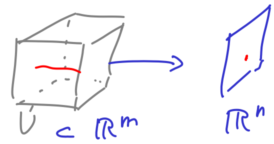
Théorème d'inversion

Corollaire : théorème du rang constant

Définitions ($k \geq 1$)

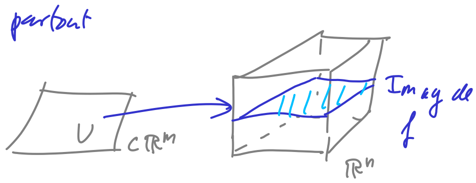
1) Soit $U \subset \mathbb{R}^m$, $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n)$, $m \geq n$ (intéressant si $m > n$)

f est une submersion $\mathcal{C}^k$ si $\mathrm{rg}(f) = n$ partout.



2) Soit $U \subset \mathbb{R}^m$, $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n)$, $m \leq n$ (intéressant si $m < n$)

f est une immersion $\mathcal{C}^k$ si $\mathrm{rg}(f) = m$ partout



Corollaires du théorème du rang constant

1) Si f est une submersion, on peut factoriser :

$$f \circ \Phi(t^1, \dots, t^n, \underbrace{t^{n+1}, \dots, t^m}_{\text{termes tronqués}}) = (t^1, \dots, t^n)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^m \supset U_{x_0} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^n \\
\mathbb{R}^m \supset U' \arrow[u, "\Phi"] \arrow[ur, "f \circ \Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

$$(t^1, \dots, t^n, t^{n+1}, \dots, t^m) \mapsto (t^1, \dots, t^n)$$

2) Si f est une immersion, on peut factoriser :

$$\Psi \circ f(t^1, \dots, t^m) = (t^1, \dots, t^m, 0, \dots, 0)$$

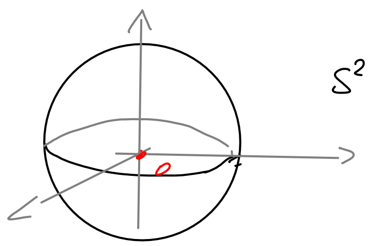
$$\begin{tikzcd}
U_{x_0} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\Psi \circ f"'] & V_{x_0} \arrow[d, "\Psi"] \\
& \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

$$(t^1, \dots, t^m) \mapsto (t^1, \dots, t^m, 0, \dots, 0)$$

Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Exemple la sphère unité de $\mathbb{R}^3$:

$$S^2 = \{ M \in \mathbb{R}^3 \ ; \ d(M, O) = 1 \}$$

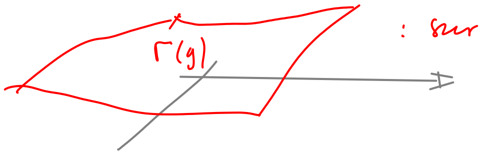


$S^2 \subset \mathbb{R}^3$

$d(M, O)$ = distance euclidienne

Exemple Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

graphe : $\Gamma(g) = \{ (x^1, x^2, g(x^1, x^2)) \ ; \ (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \} \subset \mathbb{R}^3$



: surface.

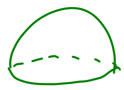
Remarque : S^2 n'est pas le graphe d'une fonction.

Mais il est possible de représenter des parties de S^2 par des graphes.

$$S^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$

$$S^2_+ = S^2 \cap \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty[\qquad (z \geq 0)$$

(hémisphère "nord")



Si $\left| \begin{array}{l} \bar{B}^2(0,1) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 \leq 1 \} \quad \text{(boule unité fermée)} \\ g \in \mathcal{C}^\infty(\bar{B}(0,1), \mathbb{R}) \ , \quad g(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{array} \right.$

alors $\Gamma(g) = S^2_+$

On peut construire une représentation analogue autour de chaque point.

$$S^2_{West} = \{ (x,y,z) \in S^2 \ ; \ y \geq 0 \} \subset S^2$$

$$= \{ (x, g(x,z), z) \ ; \ (x,z) \in \bar{B}^2(0,1) \}.$$

à nouveau un graphe.

Définition Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n}$ $(p \leq n)$

"graphe local" | $\mathcal{S}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p, de classe $\mathcal{C}^k$ si
$\forall M_0 \in \mathcal{S}$, $\exists U_{M_0}$: ouvert $\subset \mathbb{R}^n$, contenant M_0 tel que
$\mathcal{S} \cap U_{M_0}$ soit le graphe d'une fonction de p variables, de classe $\mathcal{C}^k$.

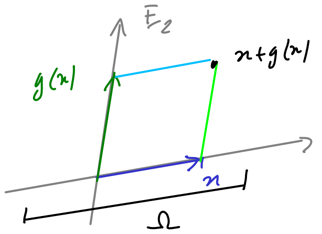
Définition (graphe) Soit $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ deux sous-espaces vectoriels.

$\dim E_1 = p$, $\dim E_2 = n - p$, $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^n$

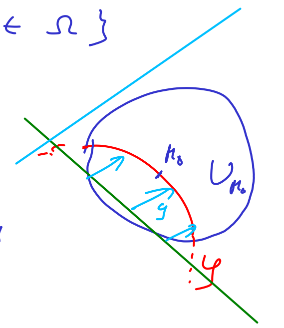
Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, Σ est un graphe $\mathcal{C}^k$ au-dessus de E_1 si :

$\exists\ \Omega$ ouvert $\subset E_1$, $\exists\ g \in \mathcal{C}^k(E_1, E_2)$ telle que

$$\Sigma = \{ x + g(x) \ ; \ x \in \Omega \}$$



$$\simeq \{ (x, g(x)) \in E_1 \times E_2 \ ; \ x \in \Omega \}$$



a) Remarque Si $\mathcal{S} \cap U_{M_0} = \{ x + g(x) \ ; \ x \in \Omega \}$

Soit $F : U_{M_0} \longrightarrow E_2 \simeq \mathbb{R}^{n-p}$

$M = x + y \longmapsto y - g(x)$

$\simeq (x, y)$

$g \in \mathcal{C}^k(\underset{E_1}{\Omega \cap}, E_2)$

$x \in E_1$, $y \in E_2$

Alors $\mathcal{S} \cap U_{M_0} = \{ M \in U_{M_0} \ ; \ F(M) = 0 \} \leftarrow$ fibre

et F est une submersion ($\mathrm{rg}\, F = n - p$ partout)

$$JF = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) \simeq \left(-Jg \ , \ Id_{n-p} \right)$$

Définition 2 (Sous-variété : localement, fibre d'une submersion)

$\mathcal{S} \in \mathbb{R}^n$ est une sous-variété $\mathcal{C}^k$ de dimension p si

$\forall M_0 \in \mathcal{S}$, $\exists\ U_{M_0}$: voisinage ouvert de M_0 dans $\mathbb{R}^n$

$\exists\ F \in \mathcal{C}^k(V_{M_0}, \mathbb{R}^{n-p})$: submersion telle que

$$\mathcal{S} \cap U_{M_0} = \{ M \in U_{M_0} \ ; \ F(M) = 0 \}$$

Exemple S^2 : $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$M = (x^1, x^2, x^3) \longmapsto (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$

F est $\mathcal{C}^\infty$ est une submersion :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial F}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial F}{\partial x^3} dx^3 = 2 (x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3)$$

Deux méthodes de calcul : (i) $\dfrac{\partial F}{\partial x^1} = \dfrac{\partial [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]}{\partial x^1} = 2x^1$

(ii) $d[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2] = 2x^1 dx^1 + 2x^2 dx^2 + 2x^3 dx^3$

Matriciellement $\quad dF_x = \begin{pmatrix} 2x^1 & 2x^2 & 2x^3 \end{pmatrix} \neq 0$

car $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

$\Rightarrow \ rg(dF_x) = 1 = \dim \mathbb{R} = \dim$ (espace d'arrivée de F)

Donc c'est une submersion.

Intérêt : S^2 : fibre d'une submersion globale.

dans $(\mathbb{R}^3)^*$ $\quad \boxed{df_x = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x)\, dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\, dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}\, dx^3} \longrightarrow df_x(u)$? $\quad u \in \mathbb{R}^3$

$dx^1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u \mapsto u^1$ $\quad$, $dx^2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u \mapsto u_2$.

$$df_x(u) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x)\, dx^1(u) + \frac{\partial f}{\partial x^2}\, dx^2(u) + \frac{\partial f}{\partial x^3}\, dx^3(u)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x^1}(x)\, u^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x)\, u^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}(x)\, u^3 .$$

Exercice : On a vu sous-variété au sens Déf 1 ("graphe")

$\Rightarrow$ ——— ——— Déf 2 ("fibre de submersion")

Montrer la réciproque.

b) Remarque $\quad \mathcal{S} \cap U_{x_0} = \{ x + g(x) \ ; \ x \in \Omega \subset E_1 \}$

$g \in \mathcal{C}^k(\Omega, E_2)$

Alors $\quad \Phi : U_{M_0} \longrightarrow \Phi(U_{x_0}) \subset \mathbb{R}^n$

$M = x + y \longmapsto x + y - g(x) = (x, y - g(x)) = (x, F(x,y))$

$\begin{pmatrix} x \in E_1 \\ y \in E_2 \end{pmatrix}$ $\qquad E_1 \oplus E_2 \simeq E_1 \times E_2$

est un difféomorphisme (exercice) $\mathcal{C}^k$ et

$$\Phi(\mathcal{S} \cap U_{M_0}) = E_1 \cap \Phi(U_{M_0})$$

$\Phi(U_{M_0})$

Définition 3 ("redressement") $\quad \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$

$\mathcal{S}$ est une sous-variété de dimension p, $\mathcal{C}^k$ si

$\forall M_0 \in \mathcal{S}$, $\exists\, U_{M_0} \subset \mathbb{R}^n$, $\exists\, \Phi \in \mathcal{C}^k(U_{M_0}, V)$ difféomorphisme,

| tels que $\Phi(\mathcal{S} \cap U_{M_0}) = \mathbb{R}^p \cap V$.

Exercice : montrer Définition 3 $\Rightarrow$ Définition 1.

c) Remarque : à partir $\mathcal{S} \cap U_{M_0} = \{ x + g(x) \; ; \; x \in \Omega \subset E_1 \}$
$g \in \mathcal{C}^k(\Omega, E_2)$

je construis | $u : \Omega \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$
(j'utilise une identification $E_1 \simeq \mathbb{R}^p$) | $t \longmapsto t + g(t) \simeq (t, g(t))$
$E_1 \oplus E_2 \simeq E_1 \times E_2$

Alors u est une immersion : $\mathrm{rg}(u) = p$ partout.

$$Jf_t = \begin{pmatrix} 1_p \\ Jg_t \end{pmatrix}$$

localement immersion

Déf. 4 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$
$\mathcal{S}$ est une sous-variété $\mathcal{C}^k$, de dimension p si
$\forall M_0 \in \mathcal{S}$, $\exists\, U_{M_0} \subset \mathbb{R}^n$, $\exists\, \omega \subset \mathbb{R}^p$
$\exists\, u \in \mathcal{C}^k(\omega, \mathbb{R}^n)$ immersion telle que
$$\mathcal{S} \cap U_{M_0} = u(\omega) = \{ u(t) \; ; \; t \in \omega \} \subset \mathbb{R}^n$$

Théorème Les définitions 1, 2, 3, 4 sont équivalentes entre elles.

Preuve : | Def 2 $\Rightarrow$ Def 1 : théorème des fonctions implicites.
Exercice | Déf 3, 4 $\Rightarrow$ Déf 1 : inversion locale ou rang constant.

Attention : ces définitions sont locales. Les équivalences marchent parce que ces définitions sont locales.

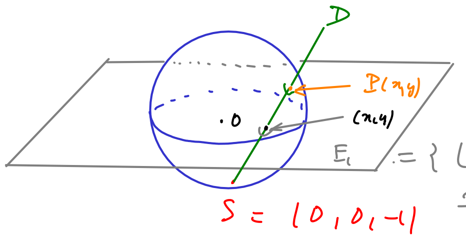
Exemple : S^2 : $\boxed{\text{globalement}}$ fibre d'une submersion
localement uniquement le graphe d'une fonction.
redressement, image d'une immersion : localement uniquement

Paramétrisation locale de S^2 :

$S^2_+ = \{ u(t) \,;\, t \in B^2(0,1) \}$ $\qquad t = (t^1, t^2)$

$u(t^1, t^2) = (t^1, t^2, \sqrt{1-(t^1)^2-(t^2)^2})$

Une autre immersion : projection stéréographique.



$E_1 := \{ (x,y,0) \,;\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \} \simeq \mathbb{R}^2$

$P : \mathbb{R}^2 \simeq E_1 \longrightarrow S^2$

$(x,y) \longmapsto$ point d'intersection de S^2 avec D

où D : droite affine passant par $S = (0,0,-1)$ et $M = (x,y,0)$

Calcul en cartésien : $N \in D \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \vec{SN} = \lambda \vec{SM}$ $\qquad \vec{SM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\iff N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda - 1 \end{pmatrix} \implies D = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda - 1 \end{pmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$D \cap S^2$: $N \in S^2 \iff (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + (\lambda - 1)^2 = 1$

$$\iff \lambda^2 (x^2+y^2) + \lambda^2 - 2\lambda + \cancel{1} = \cancel{1}$$

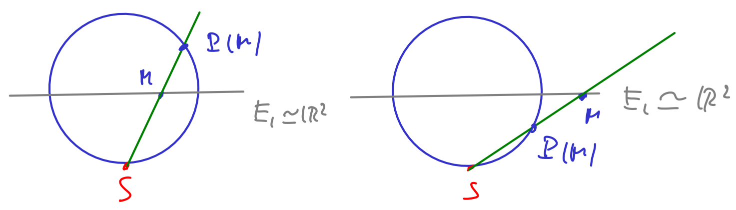
$$\iff \lambda (x^2+y^2+1) = 2 \iff \boxed{\lambda = \frac{2}{1+x^2+y^2}}$$

Notons $\boxed{r^2 = x^2+y^2}$ $\qquad P(x,y) = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda - 1 \end{pmatrix}$ pour $\lambda = \dfrac{2}{1+r^2}$

$\lambda - 1 = \dfrac{1-r^2}{1+r^2}$ $\qquad$ Donc $\boxed{P(x,y) = \dfrac{1}{1+r^2} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1-r^2 \end{pmatrix} \quad \text{où } r^2 = x^2+y^2}$

Image de P : $P(\mathbb{R}^2) = S^2 \setminus \{ (0,0,-1) \}$.

Vu de profil



$r^2 \leq 1$

$P(B^2(0,1)) = S^2_+ \,,\qquad P(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B^2}(0,1)) = S^2_- \setminus \{(0,0,-1)\}$

P est une immersion $\quad P(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1-x^2-y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^1 \\ P^2 \\ P^3 \end{pmatrix}(x,y)$

$$\frac{\partial P^1}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}\right) = \frac{2}{1+r^2} - \frac{2x\,(2x)}{(1+r^2)^2}$$

$$= \frac{2\,(1+x^2+y^2-2x^2)}{(1+r^2)^2} = 2\,\frac{1-x^2+y^2}{(1+r^2)^2}$$

$$\frac{\partial P^1}{\partial y}(x,y) = \frac{-2xy}{(1+r^2)^2}, \quad \text{etc.} \quad (\text{exercice})$$

$$JP_{(x,y)} = \underbrace{\boxed{\frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}}}_{e^{2u}} \left(\boxed{\begin{matrix} 1-x^2+y^2 \\ -2xy \\ -2x \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} -2xy \\ 1+x^2-y^2 \\ -2y \end{matrix}} \right)$$

$$e_1 = e^{-2u}\frac{\partial P}{\partial x} \qquad\qquad e^{-2u}\frac{\partial P}{\partial y} = e_2$$

$$\|e_1\|^2 = (1-x^2+y^2)^2 + \underbrace{4x^2y^2} + \underbrace{4x^2}$$

$$= 1 + x^4 + y^4 \underbrace{-2x^2} + 2y^2 \underbrace{-2x^2y^2} + \underbrace{4x^2y^2} \underbrace{+4x^2}$$

$$= 1 + x^4 + y^4 + 2x^2 + 2y^2 + 2x^2y^2$$

$$= (1+x^2+y^2)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\|e_1\| = 1+r^2}$$

$$\|e_2\|^2 = (1+x^2+y^2)^2 \quad \underline{\text{idem}}$$

$$\langle e_1, e_2\rangle = (1-x^2+y^2)(-2xy) + (-2xy)(1+x^2-y^2) + (-2x)(-2y)$$

$$= -2xy\,[\,1 \cancel{-x^2} \cancel{+y^2} + 1 \cancel{+x^2} \cancel{-y^2}\,] + 4xy$$

$$= -4xy + 4xy = 0.$$

$$\left|\begin{array}{l} \left\|\dfrac{\partial P}{\partial x}\right\| = \left\|\dfrac{\partial P}{\partial y}\right\| = (1+r^2)\,e^{2u} = \dfrac{2}{(1+r^2)^2}(1+r^2) = \dfrac{2}{1+r^2} \\ \left\langle \dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y}\right\rangle = 0 \end{array}\right.$$

Donc $\boxed{\left(\dfrac{1+r^2}{2}\dfrac{\partial P}{\partial x},\ \dfrac{1+r^2}{2}\dfrac{\partial P}{\partial y}\right) : \underline{\text{système orthonormé}}\text{, donc en particulier}}$

P : Application conforme (conserve les angles).

Application : cartographie

On ne peut pas réaliser de carte plane de la terre qui respecte à la fois – les angles → projection stéréographique.
et – les aires

Mais on peut faire l'un ou l'autre

Prochaine séance : surfaces dans l'espace : sous-variétés de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$.
Notions de courbure