Sous-variétés : propriété satisfaite par un sous-ensemble $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ locale.

Déf 1 localement un graphe "localement" = "$\forall M_0 \in \mathcal{S}$,

Déf 2 localement une fibre d'une submersion $\exists U_{M_0}$: voisinage de M_0 tel que..."

Déf 3 localement l'image du sous-espace par un difféomorphisme.
$\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ (redressement)

Déf 4 localement l'image d'un plongement.

$\forall M_0 \in \mathcal{S}, \exists U_{M_0}, \exists u \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^p)$

u : plongement, tel que $\boxed{\mathcal{S} \cap U_{M_0} = u(\Omega)}$ (image de u).

Définition Plongement Une application $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ (Ω : ouvert $\subset \mathbb{R}^p$)
est un plongement de classe $\mathcal{C}^k$ si

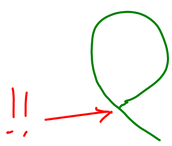
1) u est une immersion de classe $\mathcal{C}^k$.

et 2) u est un homéomorphisme entre Ω et $u(\Omega)$, muni de la topologie induite par $u(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$.

2) $\Rightarrow$ u est injective. Exemple ($p=1$)

2) $\Leftrightarrow$ $\forall (t_k)_k$ suite à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, si $\lim_{k\to+\infty} u(t_k)$ existe et est dans $u(\Omega)$
alors $(t_k)_k$ converge également et $\lim_{k\to+\infty} u(t_k) = u(\lim_{k\to+\infty} t_k)$

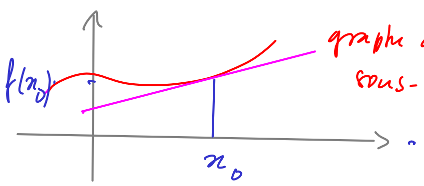
Evite :



(image d'un intervalle ouvert)
Immersion injective, mais pas un plongement.
pas un plongement.

Sous-espace tangent à une sous-variété $\mathcal{S}$ en un point $M \in \mathcal{S}$.

- Notion affine : Exemple $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$



graphe de f = sous-variété de dimension 1.

droite affine tangente : graphe de
$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

- Notion vectorielle (dans l'exemple précédent : droite $\{(x, f'(x_0)x) ; x \in \mathbb{R}\}$: droite vectorielle tangente.

Définition Soit $\mathcal{S}$ une sous-variété $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$. Soit $M \in \mathcal{S}$.

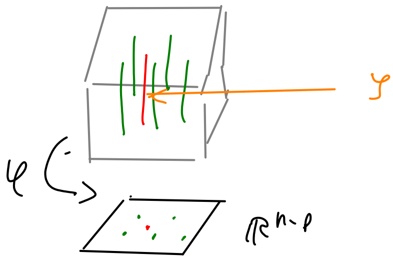
Le sous-espace (vectoriel) tangent à $\mathcal{S}$ en M est :

1) si, localement, $\mathcal{S} \simeq$ graphe de $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{n-p}$, si $x_0 \in \Omega$ tel que $g(x_0) = M$

$$T_M \mathcal{S} := \{ (x, dg_{x_0}(x)) ; x \in \mathbb{R}^p \} \subset \mathbb{R}^n .$$

2) Si, localement, $\mathcal{S} \simeq$ fibre d'une submersion : $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-p}$

$$T_M \mathcal{S} = \operatorname{Ker} d\varphi_M$$



3) Si, localement, $\mathcal{S} \simeq \phi^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$ où $\Phi : U \to \Phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ difféo.

$$T_M \mathcal{S} = (d\Phi_M)^{-1} (\mathbb{R}^p \times \{0\})$$

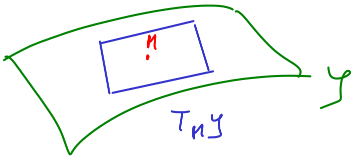
4) (Paramétrisation) Si, localement, $\mathcal{S} \simeq u(\Omega)$, $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ plongement.

$$T_M \mathcal{S} = \operatorname{Im}(du_x)$$ où $u(x) = M$.

$du_x : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ linéaire.

Une base de $T_M \mathcal{S}$ est $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_p}(x) \right)$.

Intuitivement : $(M, T_M \mathcal{S})$: approximation linéaire de $\mathcal{S}$ au voisinage de $\mathcal{S}$.



Surfaces (sous-variétés de dimension 2) dans $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$: euclidien (muni de $\langle \cdot , \cdot \rangle$) et orienté.

1) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, ouvert, et $u \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un plongement.

$\Rightarrow$ $u(\Omega) = \mathcal{S}$ est une sous-variété de dimension 2 = surface plongée dans $\mathbb{R}^3$

$\rightarrow$ $\forall M \in \mathcal{S}$, $T_u \mathcal{S} = \mathrm{Vec}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}(t), \frac{\partial u}{\partial t_2}(t) \right)$ où $u(t) = M$.

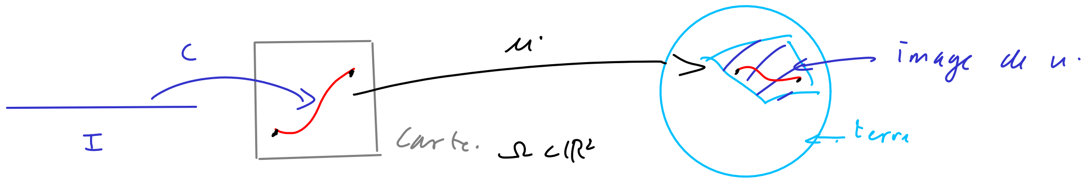
Question : mesurer la longueur d'un chemin parcouru sur $\mathcal{S}$.

Chemin défini par $\gamma \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ tel que $\gamma(s) \in \mathcal{S}$, $\forall s \in I$

$(I \subset \mathbb{R})$

Si on n'a pas γ directement, on a l'image de γ dans une carte :

$c \in \mathcal{C}^1(I, \Omega)$ telle que : $u \circ c = \gamma$



Longueur de $\gamma(I)$? en supposant que γ est une immersion

Def $L(\gamma(I)) = \int_I \left\| \frac{d\gamma}{ds}(s) \right\| ds = \int_I \sqrt{\left\langle \frac{d\gamma}{ds}(s), \frac{d\gamma}{ds}(s) \right\rangle}\, ds$

$$\left\langle \frac{d\gamma}{ds}, \frac{d\gamma}{ds} \right\rangle = \left\langle \frac{d(u\circ c)}{ds}, \frac{d(u\circ c)}{ds} \right\rangle$$

$$\frac{d(u\circ c)}{ds}(s) = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_1}(c(s))}_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\frac{dc^1}{ds}}_{\mathbb{R}} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_2}(c(s))}_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\frac{dc^2}{ds}(s)}_{\mathbb{R}} \in T_{u(c(s))}\mathcal{S}$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{d(u\circ c)}{ds}(s) \right\|^2 = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_1}(c), \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\rangle \left(\frac{dc^1}{ds}\right)^2 + \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_1}(c), \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\rangle \frac{dc^1}{ds}\frac{dc^2}{ds}$$
$$+ \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_2}(c), \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\rangle \frac{dc^2}{ds}\frac{dc^1}{ds} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2}(c) \right\|^2 \left(\frac{dc^2}{ds}\right)^2$$
$$= \sum_{i,j=1}^{2} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\rangle (c) \frac{dc^i}{ds}\frac{dc^j}{ds}$$
$$= \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(c(s)) \frac{dc^i}{ds}\frac{dc^j}{ds}$$

$\forall i,j$, $g_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^{k-1}$ si u est $\mathcal{C}^k$

Déf $(g_{ij})_{1\le i,j\le 2}$: première forme fondamentale du plongement $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$

$g_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^i}(x), \frac{\partial u}{\partial x^j}(x) \right\rangle, \quad \forall x \in \Omega$

Présentations : a) matriciellement : $g_x = \begin{pmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) \end{pmatrix}$ matrice symétrique (défini positif)

b) **Déf** $S^2(\mathbb{R}^n) = \{$ formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^n \}$

$g : \Omega \to S^2(\mathbb{R}^n)$

$$\boxed{\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^2, \quad g_x(\xi,\eta) = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(x)\, \xi^i \eta^j}$$

c) Rappel : si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$

$df_x \in (\mathbb{R}^n)^*$

En particulier pour $x^i : \Omega \to \mathbb{R}$ (fonction coordonnée)

dx^i_x indépendant de x $\longrightarrow$ $dx^i_x = dx^i$

$(dx^1, \dots, dx^n)$: base de $(\mathbb{R}^n)^*$

Déf "Produit tensoriel" de deux applications linéaires $a, b \in (\mathbb{R}^n)^*$

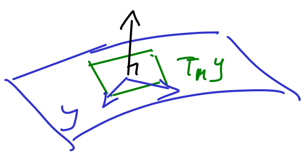
$$a \otimes b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\xi, \eta) \longmapsto a(\xi)\, b(\eta)$$

Par exemple $dx^1 \otimes dx^2 (\xi, \eta) = \xi^1 \eta^2$; $dx^2 \otimes dx^1 (\xi,\eta) = \xi^2 \eta^1$

$$\boxed{g_x = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(x)\, dx^i \otimes dx^j} \in B(\mathbb{R}^n) \text{ (formes bilinéaires)}$$

$\Rightarrow g_x(\xi,\eta) = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(x)\, dx^i \otimes dx^j (\xi,\eta) = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(x)\, \xi^i \eta^j$

2) Deuxième forme fondamentale



vecteur orthogonal à $T_x\Sigma$, de norme 1.

$u \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ (plongement) définit une orientation de $T_{u(x)}\Sigma$

$\forall x \in \Omega$: $\left(\frac{\partial u}{\partial x^1}(x), \frac{\partial u}{\partial x^2}(x)\right)$ est directe. & $\mathbb{R}^3$ est orienté

Déf Application de Gauss associée à $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$:

application $n : \Omega \to \mathbb{R}^3$ telle que :

a) $\forall x \in \Omega, \quad n(x) \perp T_{u(x)} \mathcal{S}$

b) $\forall x, \quad \|u(x)\| = 1 \qquad (u(x) \in S^2)$

c) $\forall x \in \Omega, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x), u(x) \right)$ est une base directe

Formule $\quad n(x) = \dfrac{\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \times \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)}{\left\| \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \times \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) \right\|} \qquad \times$: produit vectoriel

$$a \times b = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 b^3 - a^3 b^2 \\ a^3 b^1 - a^1 b^3 \\ a^1 b^2 - a^2 b^1 \end{pmatrix}$$

Si $u \in \mathcal{C}^k \Rightarrow n$ est $\mathcal{C}^{k-1}$.

Je suppose maintenant que u est $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 2$

Soit $\gamma \in \mathcal{C}^2(I, \mathcal{S})$, $\exists\, c \in \mathcal{C}^2(I, \Omega)$, $\boxed{\gamma = u \circ c}$

Calcul de : $\left\langle \frac{d^2\gamma}{ds^2}, n \circ c \right\rangle$? $\qquad$ effet de $\mathcal{S}$ sur la courbure de $\gamma(I)$

$\gamma = u \circ c \Rightarrow \frac{d\gamma}{ds} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x^i}(c) \frac{dc^i}{ds}(s)$

$$\Rightarrow \frac{d^2\gamma}{ds^2} = \sum_{i=1}^{2} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(c) \frac{dc^j}{ds}(s) \right) \frac{dc^i}{ds}(s) + \frac{\partial u}{\partial x^i}(c) \frac{d^2 c^i}{ds^2}(s) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\gamma}{ds^2} = \sum_{i,j=1}^{2} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} \circ c \right)}_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\frac{dc^i}{ds}(s) \frac{dc^j}{ds}(s)}_{\mathbb{R}} + \sum_{i=1}^{2} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x^i} \circ c \right)}_{\in T_{u\circ c} \mathcal{S}} \frac{d^2 c^i}{ds^2}(s)$$

$$\Rightarrow \left\langle n \circ c, \frac{d^2(u \circ c)}{ds^2} \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} \circ c, n \circ c \right\rangle \frac{dc^i}{ds} \frac{dc^j}{ds} + 0$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} (B_{ij} \circ c) \frac{dc^i}{ds} \frac{dc^j}{ds}.$$

Déf $\quad B_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(x), n(x) \right\rangle$ est la seconde forme fondamentale associée à u.

$B_x \simeq \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}(x)$ matrice symétrique (lemme de Schwarz)

$B_x \in S^2(\mathbb{R}^2)$ (forme bilinéaire symétrique)

$$B_x = \sum_{i,j=1}^{2} B_{ij}(x)\, dx^i \otimes dx^j$$

Changement de paramétrisation ?

Supposons
- $u \in \mathcal{C}^2(\Omega_2, \mathbb{R}^3)$
- $v \in \mathcal{C}^2(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$
- $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ difféomorphisme $\mathcal{C}^2$.
- $J\varphi_t > 0$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^3 \\ t \in \Omega_1 \arrow[ur, "v"] \arrow[r, "\varphi"'] & \Omega_2 \ni x \arrow[u, "u"'] \end{tikzcd}$$

u plongement

φ difféomorphisme.

u:
$$n = \frac{\frac{\partial u}{\partial x^1} \times \frac{\partial u}{\partial x^2}}{\left\| \frac{\partial u}{\partial x^1} \times \frac{\partial u}{\partial x^2} \right\|}$$
$$g = \sum_{i,j} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^i}, \frac{\partial u}{\partial x^j} \right\rangle dx^i \otimes dx^j$$
$$B = \sum_{i,j} \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}, n \right\rangle dx^i \otimes dx^j$$

v:
$$m = \frac{\frac{\partial v}{\partial t^1} \times \frac{\partial v}{\partial t^2}}{\left\| \frac{\partial v}{\partial t^1} \times \frac{\partial v}{\partial t^2} \right\|}$$
$$h = \sum_{i,j} \left\langle \frac{\partial v}{\partial t^i}, \frac{\partial v}{\partial t^j} \right\rangle dt^i \otimes dt^j$$
$$C = \sum_{i,j} \left\langle \frac{\partial^2 v}{\partial t^i \partial t^j}, m \right\rangle dt^i \otimes dt^j$$

$$v = u \circ \varphi \implies \boxed{\frac{\partial v}{\partial t^i} = \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial x^k} \circ \varphi \right) \frac{\partial \varphi^k}{\partial t^i}} \quad (a)$$

$$(b) \implies \boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial t^i \partial t^j} = \sum_{k,\ell} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial x^\ell} \circ \varphi \right) \frac{\partial \varphi^k}{\partial t^i} \frac{\partial \varphi^\ell}{\partial t^j} + \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial x^k} \circ \varphi \right) \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial t^i \partial t^j}}$$

$$(a) \implies \frac{\partial v}{\partial t^1} \times \frac{\partial v}{\partial t^2} = \underbrace{\det(J\varphi)}_{>0} \left(\frac{\partial u}{\partial x^1} \times \frac{\partial u}{\partial x^2} \right) \circ \varphi \implies \boxed{m = n \circ \varphi} \quad \text{(gauss)}$$

$$(a) \implies h_{ij} = \left\langle \frac{\partial v}{\partial t^i}, \frac{\partial v}{\partial t^j} \right\rangle = \sum_{k,\ell} \underbrace{\left\langle \frac{\partial u}{\partial x^k}, \frac{\partial u}{\partial x^\ell} \right\rangle}_{g_{k\ell}} \circ \varphi \, \frac{\partial \varphi^k}{\partial t^i} \frac{\partial \varphi^\ell}{\partial t^j}$$

$$(c) \quad \boxed{h_{ij} = \sum_{k,\ell} (g_{k\ell} \circ \varphi) \frac{\partial \varphi^k}{\partial t^i} \frac{\partial \varphi^\ell}{\partial t^j}} \quad (u)$$

$$(a),(b) \implies C_{ij} = \left\langle \frac{\partial^2 v}{\partial t^i \partial t^j}, m \right\rangle = \left\langle \sum_{k,\ell} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial x^\ell} \circ \varphi \right) \frac{\partial \varphi^k}{\partial t^i} \frac{\partial \varphi^\ell}{\partial t^j} + \sum_k \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x^k} \circ \varphi \right)}_{T_x\mathcal{Y}} \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial t^i \partial t^j}, \underbrace{n \circ \varphi}_{\perp} \right\rangle$$

$$\boxed{C_{ij} = \sum_{k,l} \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial x^l} \circ \varphi, n \circ \varphi \right\rangle \frac{\partial \varphi^k}{\partial t^i} \frac{\partial \varphi^l}{\partial t^j} = \sum_{k,l} \left(B_{ij} \circ \varphi\right) \frac{\partial \varphi^k}{\partial t^i} \frac{\partial \varphi^l}{\partial t^j}}$$

Matriciellement $\quad h = (J\varphi)^t \, g \, (J\varphi) \qquad h = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \quad (u)$

$$C = (J\varphi)^t \, B \, (J\varphi) \qquad J\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial t^1} & \frac{\partial \varphi^1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \varphi^2}{\partial t^1} & \frac{\partial \varphi^2}{\partial t^2} \end{pmatrix}$$

Conséquence si $\begin{cases} P_u(x)(\lambda) = \det(B_x - \lambda g_x) = \begin{vmatrix} B_{11} - \lambda g_{11} & B_{12} - \lambda g_{12} \\ B_{21} - \lambda g_{21} & B_{22} - \lambda g_{22} \end{vmatrix} (x) \\ P_v(t)(\lambda) = \det(C_t - \lambda h_t) \end{cases}$

Alors $\quad P_v(t)(\lambda) = P_{u\circ\varphi}(\lambda) \, (\det J\varphi_t)^2$

Donc ces polynômes ont mêmes racines λ_1, λ_2 (associées à la géométrie de la surface, indépendamment du plongement utilisé).

Soit $M \in \mathcal{Y}$, $u : \Omega_2 \to \mathcal{Y}$, $u(x) = M$

Je choisis $\phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ tel que, si $u \circ \phi(t) = u(x) = M$,

$$h_t = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Il suffit de choisir (e_1, e_2) : base orthonormée de $T_M \mathcal{Y}$

exprimer la matrice A de du_x dans les base $((1,0),(0,1))$ sur $\mathbb{R}^2$
(e_1, e_2) sur $T_M \mathcal{Y}$

$\phi = A^{-1}$ et $v = u \circ \phi$)

Alors v a pour formes fondamentales en t : $h_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = dt^1 \otimes dt^1 + dt^2 \otimes dt^2$

et $C_t = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ symétrique.

Donc λ_1 et λ_2 sont racines de $\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$

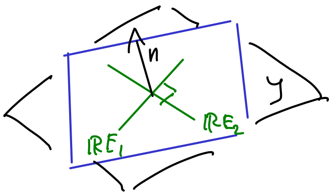
Donc λ_1 et λ_2 sont réelles (Convention $\lambda_1 \leq \lambda_2$)

Les vecteurs propres de C_t, ξ_1 et ξ_2, forment une base orthonormée.

Leurs images par $d\nu_t$: $\begin{cases} E_1 = d\nu_t(\xi_1) \\ E_2 = d\nu_t(\xi_2) \end{cases}$ forme aussi une base orthonormée de $T_n \mathcal{Y}$.

Définition λ_1 et λ_2 sont les courbures principales de la surface $\mathcal{S}$ en n.

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$. E_1 et E_2 (images des directions) ne dépendent pas de la paramétrisation utilisée : ils définissent deux directions orthogonales dans $T_n \mathcal{Y}$: directions principales.



Si $\lambda_1 = \lambda_2$: le point est dit ombilic