$u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ plongement d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Image $u(\Omega) = \mathcal{S}$: sous-variété de $\mathbb{R}^2$, de dimension 2
= surface de $\mathbb{R}^2$.

$\forall M \in \mathcal{S}$, $\exists x \in \Omega$, $u(x) = M$ et $T_M \mathcal{S} = \mathrm{Vec}\left(\frac{\partial u}{\partial x^1}(x), \frac{\partial u}{\partial x^2}(x)\right)$

(orienté par : $\left(\frac{\partial u}{\partial x^1}(x), \frac{\partial u}{\partial x^2}(x)\right)$ = base directe)

Rappel : Bases directe ou indirectes. Soit E : espace vectoriel réel de dimension n.

$\mathcal{B} = \{$ bases ordonnées $(u_1, \dots, u_n)$ de $E\}$. $\forall$ $(\underbrace{u_1, \dots, u_n}_{u}), (\underbrace{v_1, \dots, v_n}_{v}) \in \mathcal{B}$

$\exists ! P \in GL(n, \mathbb{R})$, $v_j = \sum_{i=1}^{n} P_j^i u_i \iff (v_1 \dots v_n) \begin{pmatrix} P_1^1 & \dots & P_n^1 \\ \vdots & & \\ P_1^n & \dots & P_n^n \end{pmatrix} = (u_1 \dots u_n)$

$\det P \neq 0 \Rightarrow$ Relation d'équivalence dans $\mathcal{B}$:

$u \mathcal{R} v \iff \det P > 0 \longrightarrow$ 2 classes d'équivalence

Def Une orientation de E est un choix d'une classe d'équivalence. $\mathcal{B}_+$

On dit que u est directe si $u \in \mathcal{B}_+$

1ère forme fondamentale : $g_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^i}(x), \frac{\partial u}{\partial x^j} \right\rangle$

Plusieurs notations : matricielle $g_x = \begin{pmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) \end{pmatrix}$

Forme bilinéaire (symétrique) $g_x : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(\xi, \eta) \mapsto \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(x) \xi^i \eta^j$

$g_x = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(x)\, dx^i \otimes dx^j$ $\quad (g_{12} = g_{21})$

[où, si $\ell_1, \ell_2 \in (\mathbb{R}^2)^*$, $\ell_1 \otimes \ell_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
(produit tensoriel) $\quad (\xi, \eta) \mapsto \ell_1(\xi)\, \ell_2(\eta)$

(dx^1, dx^2) : base de $(\mathbb{R}^2)^* \Rightarrow \left(dx^i \otimes dx^j\right)_{1 \le i,j \le 2}$: base de l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^2$]

Application de Gauss (étant une orientation de $\mathcal{S}$ ou de $T_M\mathcal{S}$ et une orientation de $\mathbb{R}^3$)

$n : \Omega \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$

$$n = \frac{\frac{\partial u}{\partial x^1} \times \frac{\partial u}{\partial x^2}}{\left\| \frac{\partial u}{\partial x^1} \times \frac{\partial u}{\partial x^2} \right\|}$$

2ème <u>forme fondamentale</u> : $B_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(x), n(x) \right\rangle$

$$B_x \simeq \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \simeq \sum_{i,j=1}^{2} B_{ij}(x)\, dx^i \otimes dx^j$$

le signe somme $\sum_{i,j=1}^{2}$ est sous-entendu car chaque indice apparaît 2 fois : une fois en haut, une fois en bas (convention d'Einstein) $\longrightarrow = \boxed{B_{ij}(x)\, dx^i \otimes dx^j}$

<u>Changement</u> de paramétrisation de Σ (paramétrisation = plongement dont l'image est Σ)

$$u \longrightarrow u \circ \varphi$$

généralisation de la loi
$f \mapsto f\circ\varphi$

$$\begin{cases} B_{ij}(x) \longrightarrow (B_{kl}\circ\varphi)(t)\, \frac{\partial \varphi^k}{\partial t^i}(t)\, \frac{\partial \varphi^l}{\partial t^j}(t) \\ g_{ij}(x) \longrightarrow (g_{kl}\circ\varphi)(t)\, \frac{\partial \varphi^k}{\partial t^i}(t)\, \frac{\partial \varphi^l}{\partial t^j}(t) \end{cases}$$

$\Downarrow$

<u>"Pull-back" ou "tiré en arrière"</u> = généralisation de $f \longmapsto f\circ\varphi$

$\Omega_1 \subset \mathbb{R}^m$
$\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$

$\varphi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ application $\mathcal{C}^1$. (pas un difféomorphisme en général)

<u>Déf</u> 1) Pull-back de <u>$f \in \mathcal{C}^0(\Omega_2, \mathbb{R})$ par φ</u>

$$\boxed{\varphi^* f := f\circ\varphi}$$

2) $f \in \mathcal{C}^1(\Omega_2, \mathbb{R})$: pull-back de $df \in \mathcal{C}^0(\Omega_2, (\mathbb{R}^n)^*)$

$$\boxed{\varphi^* df := d(f\circ\varphi)}$$

Coordonnées $(t^1, \dots, t^m)$ sur $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^m$
$(x^1, \dots, x^n)$ sur $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ $\qquad (\varphi^j = x^j \circ \varphi)$

$$(\mathbb{R}^m)^* \ni \varphi^* df = d(f\circ\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial t^i}\, dt^i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\circ\varphi\right) \frac{\partial \varphi^j}{\partial t^i}\, dt^i$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\circ\varphi\right) \boxed{\frac{\partial \varphi^j}{\partial t^i}\, dt^i}$$

Remarque : si $f = x^j \Rightarrow df = dx^j$

$$\varphi^* dx^j = d(x^j \circ \varphi) = d\varphi^j = \boxed{\frac{\partial \varphi^j}{\partial t^i} dt^i}$$

$$\varphi^*\left(\frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j\right) = \varphi^* df = \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \circ \varphi\right) \varphi^* dx^j = \left(\varphi^* \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) \varphi^* dx^j$$

Exemple d'un lemme
$$\varphi^*(\lambda f + \mu g) = \lambda \varphi^* f + \lambda \varphi^* g$$
$$\varphi^*(f\, dg + h\, dk) = (\varphi^* f)(\varphi^* dg) + (\varphi^* h)(\varphi^* dk)$$

3) "Forme linéaire" sur $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$

$\alpha : \Omega_2 \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$, alors $\alpha = \alpha_i\, dx^i$ où $\forall i = 1, \dots, n$

$\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$

$$\boxed{\varphi^* \alpha := (\varphi^* \alpha_i)(\varphi^* dx^i) = (\alpha_i \circ \varphi)\, d(x^i \circ \varphi)}$$

$\alpha_i : \Omega_2 \to \mathbb{R}$

Exemple : si $\alpha = df$ où $f \in \mathcal{C}^1(\Omega_2, \mathbb{R})$ je retrouve

$$\varphi^* df = d(f \circ \varphi) = d(\varphi^* f)$$

4) Forme bilinéaire sur $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$

$$B : \Omega_2 \longrightarrow \{\text{Formes bilinéaires} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\} \simeq (\mathbb{R}^n)^* \otimes (\mathbb{R}^n)^*$$
$$x \longmapsto B_x : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

idée : étendre $f \mapsto f \circ \varphi = \varphi^* f$

$$B_x = B_{ij}(x)\, dx^i \otimes dx^j$$

$(dx^i \otimes dx^j)_{1 \le i,j \le n}$ = base de $(\mathbb{R}^n)^* \otimes (\mathbb{R}^n)^*$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi^* B = (B_{ij} \circ \varphi)\, d(x^i \circ \varphi) \otimes d(x^j \circ \varphi)}$$

$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $dx^i \otimes dx^j (\xi, \eta) = \xi^i \eta^j \Rightarrow B_x(\xi, \eta) = B_{ij}(x)\, \xi^i \eta^j$

$$(\varphi^* B)_t = (B_{ij} \circ \varphi)(t) \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial t^k} dt^k\right) \otimes \left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial t^l} dt^l\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(\varphi^* B)_t = (B_{ij} \circ \varphi)(t) \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^k} \frac{\partial \varphi^j}{\partial t^l} \underbrace{dt^k \otimes dt^l}_{}}$$

Base de $(\mathbb{R}^m)^* \otimes (\mathbb{R}^m)^*$

Retour aux formes fondamentales.

$$u \longrightarrow u\circ\varphi = \varphi^* u$$

$$g = g_{ij}\, dx^i\otimes dx^j \longrightarrow (g_{ij}\circ\varphi)\,\frac{\partial\varphi^i}{\partial t^k}\,\frac{\partial\varphi^j}{\partial t^\ell}\, dt^k\otimes dt^\ell = \varphi^* g$$

$$B = B_{ij}\, dx^i\otimes dx^j \longrightarrow \varphi^* B.$$

Rappel :

$$\underbrace{\det(\varphi^* B - \lambda\,\varphi^* g)}_{\text{polynôms}} = (\det d\varphi)^2\, \underbrace{\det(B-\lambda g)}_{\text{en } \lambda}$$

$\Rightarrow$ les racines sont les mêmes. $\longrightarrow$ courbures principales.

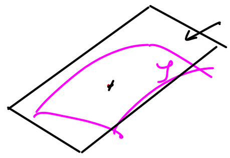
Cas où S est un graphe : soit $M_0 \in S$, on suppose que

Toujours possible: bien choisir le système de coordonnées dans $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x^1,x^2,f(x^1,x^2))\ ;\ (x^1,x^2)\in\Omega\subset\mathbb{R}^2\} \qquad f\in C^2(\Omega,\mathbb{R})$$

$M_0 = (0,0,0)$ (donc $f(0,0)=0$)

et $df_0 = \frac{\partial f}{\partial x^1}(0)\,dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}(0)\,dx^2 = 0.$



$T_{M_0}S \simeq \mathbb{R}^2\times\{0\}$

$\to$ $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$

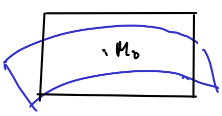
$$x=(x^1,x^2) \longmapsto (x^1,x^2,f(x^1,x^2)) = \begin{pmatrix}x^1\\x^2\\f(x^1,x^2)\end{pmatrix}$$

$$du = \begin{pmatrix}dx^1\\dx^2\\df\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}dx^1\\dx^2\\ \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial f}{\partial x^2}dx^2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\ \frac{\partial f}{\partial x^1}\end{pmatrix}}_{\frac{\partial u}{\partial x^1}} dx^1 + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\ \frac{\partial f}{\partial x^2}\end{pmatrix}}_{\frac{\partial u}{\partial x^2}} dx^2$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \frac{\partial f}{\partial x^1} & \frac{\partial f}{\partial x^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx^1\\dx^2\end{pmatrix}$$

g : $g_{11} = \left\|\frac{\partial u}{\partial x^1}\right\|^2 = 1+\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)^2$; $g_{12} = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^1}, \frac{\partial u}{\partial x^2}\right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial f}{\partial x^2}$

$g_{21} = g_{12}$; $g_{22} = 1+\left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)^2$



$$g_x = \begin{pmatrix}1+\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)^2 & \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial f}{\partial x^2}\\ \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial f}{\partial x^2} & 1+\left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)^2\end{pmatrix}$$

en $x=0$, $df_0 = 0$ $\Rightarrow$ $g_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Vecteur de Gauss ? $\quad \frac{\partial u}{\partial x^1} \times \frac{\partial u}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x^1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x^1} \\ -\frac{\partial f}{\partial x^2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{n(x) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x^1} \times \frac{\partial u}{\partial x^2}}{\| \quad - \quad \|}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|df\|^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x^1} \\ -\frac{\partial f}{\partial x^2} \\ 1 \end{pmatrix}}$$

où $\|df\|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)^2$.

en $x=0$, $n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}, n \right\rangle = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}}{\sqrt{1 + \|df\|^2}}$$

en $x=0$ $\quad B_{ij}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(0)$

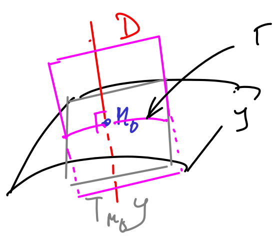
Conclusion : $\quad g = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)^2 & \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial f}{\partial x^2} & 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[x=0]{} g_0 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$

$$B = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}}{\sqrt{1 + \|df\|^2}} dx^i \otimes dx^j \qquad B_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(0)\, dx^i \otimes dx^j$$

Courbures principales en $M_0 = u(0)$: valeurs propres du Hessien de f en 0.

Interprétation géométrique $\quad$ Soit $\mathcal{S}$: surface C^2 $\quad u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ plongement
$u(\Omega) = \mathcal{S}$ $\quad$ u est C^2

$M_0 \in \mathcal{S}$



D : droite affine passant par M_0 perpendiculaire à $T_{M_0}\mathcal{S}$

$\vec{D}$: droite vectorielle associée.

Soit P un plan affine qui contient D. $\Rightarrow P \perp T_{M_0}\mathcal{S}$

$\Gamma := P \cap \mathcal{S}$ est une courbe plongée (vrai localement).

[$P : \varphi(y) = 0$; $\mathcal{S} : f(y) = 0$ $\quad y \in \mathbb{R}^3$]
φ : application affine $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ C^2

$\mathrm{rang}\,(d\varphi_{M_0}, df_{M_0}) = 2$ $\quad (\ker df_{M_0} = \vec{T}_{M_0}\mathcal{S})$

$\Rightarrow (\varphi, f) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une submersion au voisinage de M_0)

Soit $\gamma \in \mathcal{C}^2(I, \Gamma)$ la paramétrisation normale de Γ telle $\gamma(0) = M_0$

$$\left\|\frac{d\gamma}{ds}\right\| = 1$$

$\tau(s) = \frac{d\gamma}{ds}(s)$: vecteur de norme 1.

a) $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$: paramétrisation de $\mathcal{S}$, $u(0) = M_0$.

$\rightarrow$ $n \in \mathcal{C}^1(\Omega, S^2)$: son application de Gauss

$\left\{\begin{array}{l} n(0) \perp T_{M_0}\mathcal{S} \\ D \perp T_{M_0}\mathcal{S} \end{array}\right. \Rightarrow n(0)$ base de $\vec{D}$.

b) $\forall s, \gamma(s) \in P \Rightarrow \tau(0) = \frac{d\gamma}{ds}(0) \in \vec{P}$

$\forall s, \gamma(s) \in \mathcal{S} \Rightarrow \tau(0) \in T_{M_0}\mathcal{S} \Leftrightarrow \tau(0) \perp n(0)$

Donc $(\tau(0), n(0))$: base orthonormée de $\vec{P}$

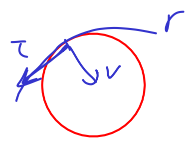
Je décide que cette base est directe, donc j'oriente ainsi P.

$\rightarrow$ Etude de $\Gamma \subset P$. À $\gamma : I \to P$, j'associe le repère (τ, ν)

$\tau : I \to S^2 \cap \vec{P} = S^1_P$ (cercle unité dans P)

$\nu : I \to S^1_P$

$\forall s \in I$, $(\tau(s), \nu(s))$: base orthonormée directe



Conséquence $\boxed{\nu(0) = n(0).}$

Courbure de Γ en $\gamma(s)$? $k(s) \in \mathbb{R}$ telle que $\frac{d^2\gamma}{ds^2}(s) = k(s)\,\nu(s)$
(algébrique)

En $s=0$ $\quad \frac{d^2\gamma}{ds^2}(0) = k(0)\, n(0)$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{d^2\gamma}{ds^2}(0), n(0) \right\rangle = k(0)$$

Si $\gamma = u \circ c$ où $c \in \mathcal{C}^2(I, \Omega)$

$$k(0) = B_{ij}(0)\,\frac{dc^i}{dt}(0)\,\frac{dc^j}{dt}(0)$$

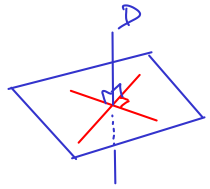
Mais $\left\|\frac{d\gamma}{ds}\right\|^2 = 1 \Leftrightarrow g_{ij}\,\frac{dc^i}{ds}\,\frac{dc^j}{ds} = 1$

Conclusion : k (courbure de $\Gamma = \mathcal{S} \cap P$ en M_0) est donnée par $B_{ij}(0)\,\frac{dc^i}{dt}(0)\,\frac{dc^j}{dt}(0)$

En réalité il existe une base (e_1, e_2) orthonormée de $T_{M_0}\Sigma$ qui correspond qui correspond à la diagonalisation de B_{ij} par rapport à g_{ij}.

pour les valeurs propres correspondante.

$\longrightarrow$ e_1 et e_2 donnent les directions principales.



Si $\frac{d\gamma}{ds}(0) = \tau(0) = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$

alors $k(0) = \varepsilon\left(\cos^2\theta\, k_1 + \sin^2\theta\, k_2\right)$ où $\varepsilon = \pm 1$

où k_1, k_2 sont les valeurs propres de B par rapport à g.

(Si le point M_0 est ombilic ($k_1 = k_2$) pas de direction principale)

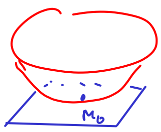
Dessin penser à $\Sigma = \{(x^1, x^2, f(x^1, x^2))\ ;\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2\}$

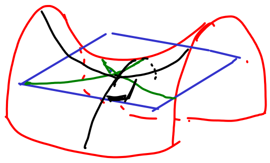
$f(0,0) = 0\ ,\ df_0 = 0$ $\qquad g_0 = (dx^1) \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2$

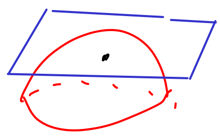
$$B_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\, dx^i \otimes dx^j$$

Dans une base de vecteurs propres $B = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ $\quad k_1 < k_2$

$0 < k_1 < k_2$ $\qquad k_1 < k_2$ $\qquad k_1 < k_2 < 0$







Point selle ou col