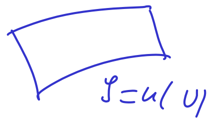
Calcul différentiel extérieur

$\Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$

$\Omega^1(U),\quad \Omega^2(U)$

Plongement d'une surface dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté $u : U \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto u(x)$ $\quad (U \subset \mathbb{R}^2)$



Repère : $e_1, e_2, e_3 : U \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ (au moins $\mathcal{C}^1$)

$$\begin{cases} \forall a,b,\quad \langle e_a, e_b \rangle = \delta_{ab} \begin{cases} = 1 & \text{si } a = b \\ = 0 & \text{si } a \neq b \end{cases} \\ \forall x \in U,\quad (e_1(x), e_2(x)) : \text{base orthonormée directe de } T_{u(x)}\Sigma \end{cases}$$

$\omega^a_b = \langle de_b, e_a \rangle \in \Omega^1(U)$, $\quad \boxed{de_b = \omega^a_b\, e_a.}$

$\alpha^a = \langle du, e_a \rangle \quad (\alpha^3 = 0)$ $\quad \boxed{du = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2}$

Deux relations

$$\boxed{\begin{cases} \omega^3_1 = h_{11}\alpha^1 + h_{12}\alpha^2 \\ \omega^3_2 = h_{21}\alpha^1 + h_{22}\alpha^2 \end{cases}}$$

$(B = h_{ij}\,\alpha^i \otimes \alpha^j)$

$K = \det(h)$ = courbure de Gauss

Relations de structure de (Élie) Cartan

$(d(df) = 0$ lemme de Schwarz$) \Rightarrow \begin{cases} d\alpha^1 + \omega^1_2 \wedge \alpha^2 = 0 \\ d\alpha^2 + \omega^2_1 \wedge \alpha^1 = 0 \end{cases}$ et $d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b = 0$

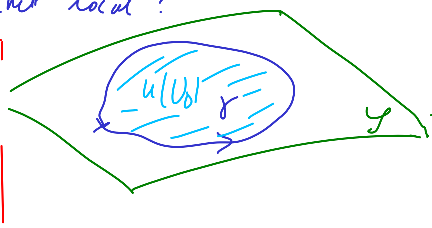
$$\Downarrow$$

$$\boxed{d\omega^1_2 = \omega^3_1 \wedge \omega^3_2 = K\,\alpha^1 \wedge \alpha^2}$$

On a vu le théorème de Gauss-Bonnet local :

Erratum !

$$\boxed{\int_0^L \underset{\substack{\uparrow \\ \text{courbure géodésique}}}{K_g(s)}\,ds = 2\pi - \int_{U_0} K\,\alpha^1 \wedge \alpha^2}$$



$= u(\Omega)$

$U_0 \subset U \subset \mathbb{R}^2$ tel $u(U_0)$ = domaine bordé par γ

Cas où Σ est un plan : $\int_0^L K_g(s)\,ds = 2\pi$

"Theorema Egregium" de Gauss : K peut se calculer directement à partir de $g = \underbrace{g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j}_{\text{dépend de } \frac{\partial u}{\partial x^i}}$ (sans connaître B, donc sans connaître les courbures principales, qui dépendent de $u, \frac{\partial u}{\partial x^i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}$)

Une preuve : $g_{ij} \longrightarrow$ un choix de $\begin{cases} \alpha^1 = \alpha^1_i \, dx^i \\ \alpha^2 = \alpha^2_i \, dx^i \end{cases}$ ou $\begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{pmatrix}$

tel que $\left| g_{ij} = \delta_{kl} \, \alpha^k \otimes \alpha^l \right.$

$$\iff \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = {}^tA \, A.$$

Stratégie : calculer K en fonction de A ou de (α^1, α^2).

Remarque : A n'est pas unique : on peut changer $A \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} A$

ou $\begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$ sans changer ${}^tA\,A$. où $\theta \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$

a) On part de $(\star) \begin{cases} d\alpha^1 + \omega^1_2 \wedge \alpha^2 = 0 \\ d\alpha^2 + \omega^2_1 \wedge \alpha^1 = 0 \end{cases}$: on en déduit ω^1_2 en fonction de $\alpha^1, \alpha^2, d\alpha^1, d\alpha^2$

Si $\omega^1_2 = X_1 \, dx^1 + X_2 \, dx^2$, alors

$$(\star) \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha^2_2 & -\alpha^2_1 \\ -\alpha^1_2 & \alpha^1_1 \end{pmatrix}}_{({}^tA)^{-1}} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_1 \alpha^1_2 - \partial_2 \alpha^1_1 \\ \partial_1 \alpha^2_2 - \partial_2 \alpha^2_1 \end{pmatrix} = 0$$

on résoud ce système $\longrightarrow \omega^1_2$.

$$\boxed{\omega^1_2 = -(\det A)^2 \left(\frac{d\alpha^1}{\alpha^1 \wedge \alpha^2} \alpha^1 + \frac{d\alpha^2}{\alpha^1 \wedge \alpha^2} \alpha^2 \right)}$$

(Remarque : $(\det A)^2 = \det g$)

où $\frac{d\alpha^i}{\alpha^1 \wedge \alpha^2} = b_i$ tel que $d\alpha^i = b_i \, \alpha^1 \wedge \alpha^2$. ($\alpha^1 \wedge \alpha^2$: base de $\Lambda^2 (\mathbb{R}^2)^*$)

b) $d\omega^1_2 = K \, \alpha^1 \wedge \alpha^2$ soit $\boxed{K = \frac{d\omega^1_2}{\alpha^1 \wedge \alpha^2}}$

Remarque : un choix possible pour α^1, α^2.

$$\alpha^1 = \sqrt{g_{11}} \left(dx^1 + \frac{g_{12}}{g_{11}} dx^2 \right), \quad \alpha^2 = \sqrt{\frac{\det g}{g_{11}}} \, dx^2.$$

Que se passe-t-il si on change $\begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde\alpha^1 \\ \tilde\alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$?

$\omega^1_2 \mapsto \tilde\omega^1_2 - d\theta$. (forme de connexion)

$\implies d\omega^1_2 \mapsto d\tilde\omega^1_2 - d(d\theta) = d\tilde\omega^1_2$ car $\boxed{d(d\theta) = 0}$

De même $\alpha^1 \wedge \alpha^2 \mapsto \tilde{\alpha}^1 \wedge \tilde{\alpha}^2 = \alpha^1 \wedge \alpha^2$.

Donc $\dfrac{d\,\omega_2^1}{\alpha^1 \wedge \alpha^2}$ ne change pas.

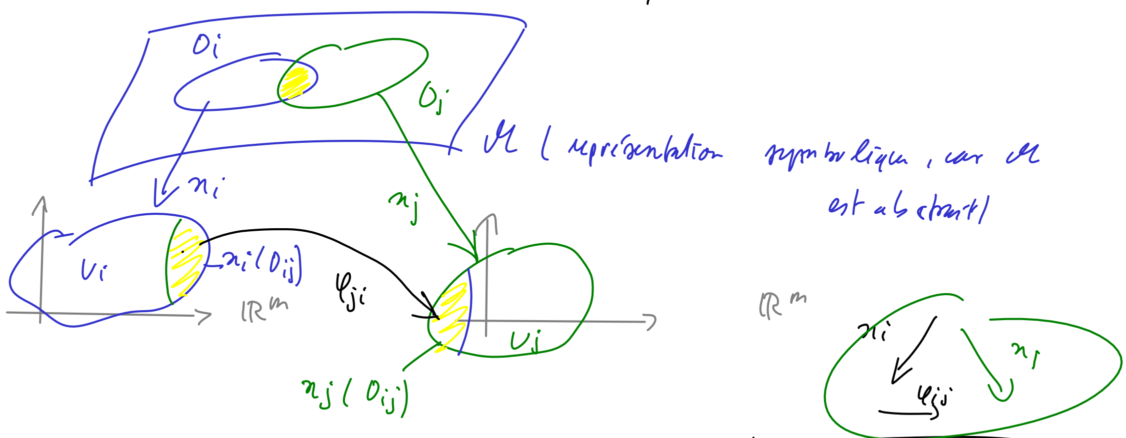
<u>Variétés différentielles</u> : espaces topologiques qui ont des propriétés similaires aux sous-variétés.

<u>Définition</u> Une variété différentielle de dimension $m \in \mathbb{N}$, de classe C^k (en général $k \geq 1$) est un espace topologique M tel qu'il existe un recouvrement de M par des ouverts $(O_i)_{i \in I}$ avec :

(a) $\forall i \in I$, $\exists\, \underbrace{x_i : O_i \to U_i}_{\text{homéomorphisme}}$ où U_i est un ouvert $\subset \mathbb{R}^m$

x_i : <u>carte locale</u>

(b) $\forall i,j \in I$, si $O_{ij} = O_i \cap O_j \neq \emptyset$



$\varphi_{ji} : x_i(O_{ij}) \to x_j(O_{ij})$ telle que $\boxed{\varphi_{ji} \circ x_i = x_j}$

φ_{ji} est forcément un homéomorphisme.

On demande que $\boxed{\varphi_{ji} \text{ soit } C^k}$

Le système $(\underset{\in M}{O_i}, \underset{\in \mathbb{R}^m}{U_i}, x_i)_{i \in I}$ est un <u>atlas</u> de la <u>variété</u>.

Exemples de variété : 1) un ouvert de $\mathbb{R}^m$.

2) Les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Soit $Y \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension $m < n$

On peut recouvrir Y par des ouverts O_i de $\mathbb{R}^n$ tels que

$O_i \cap Y$ = image d'un plongement $u_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$

U_i ouvert $\subset \mathbb{R}^m$

$x_i = u_i^{-1} : O_i \cap Y \to U_i$ carte.

Si Y est une sous-variété de classe C^k, c'est une variété de classe C^k.

3) Espace projectif réel de dimension n. $P\mathbb{R}^n = \{$ droites de $\mathbb{R}^{n+1}$ passant par l'origine $\}$

Description ? Dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on définit la relation d'équivalence

$$u \sim v \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \ v = \lambda u$$
$$\iff \mathbb{R}u = \mathbb{R}v$$

Donc $P\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}/\sim$ (classes d'équivalence).

On peut munir $P\mathbb{R}^n$ d'une structure de variété : Prenons $n = 2$.

Si $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $u = (u^0, u^1, u^2)$, je note $[u]$ la classe d'équivalence de u.

$O_0 = \{ [u] \in P\mathbb{R}^2 \mid u^0 \neq 0 \}$ $\quad O_1 = \{ [u] \in P\mathbb{R}^2 \mid u^1 \neq 0 \}$

$$x : O_0 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad [u^0, u^1, u^2] \longmapsto \left(\frac{u^1}{u^0}, \frac{u^2}{u^0} \right) = \left(x^1([u]), x^2([u]) \right)$$

bijection

$$y : O_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad [u^0, u^1, u^2] \longmapsto \left(\frac{u^0}{u^1}, \frac{u^2}{u^1} \right)$$

bijection.

$O_2 = \{ [u] \in P\mathbb{R}^2 \mid u^2 \neq 0 \}$

$$z : O_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad [u] \longmapsto \left(\frac{u^0}{u^2}, \frac{u^1}{u^2} \right)$$

$P\mathbb{R}^2 = O_0 \cup O_1 \cup O_2$

Si $[u] \in O_0 \cap O_1$,
$$y([u]) = \left(\frac{u^0}{u^1}, \frac{u^2}{u^1} \right) = \left(\frac{1}{\frac{u^1}{u^0}}, \frac{\frac{u^2}{u^0}}{\frac{u^1}{u^0}} \right)$$
$$= \left(\frac{1}{x^1}, \frac{x^2}{x^1} \right)([u]).$$

Si $\underbrace{\begin{array}{rcl}\varphi : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \\ (t^1, t^2) & \longmapsto & \left(\frac{1}{t^1}, \frac{t^2}{t^1}\right)\end{array}}_{\text{Difféomorphisme } \mathcal{C}^\infty}$. Alors $\boxed{y = \varphi \circ x.}$

etc.

<u>Conclusion</u> $P\mathbb{R}^2$ (plan projectif) est une variété $\mathcal{C}^\infty$ (même analytique réelle)

<u>Lien entre variétés et sous-variétés ?</u>

<u>Théorème</u> (Whitney) Toute variété (compacte ? à vérifier) admet un plongement comme sous-variété.

<u>Exemple</u> $P\mathbb{R}^2$ se plonge dans $\mathbb{R}^4$ (pas dans $\mathbb{R}^3$)

<u>Calcul différentiel sur les variétés</u> (fonctions dérivables sur une variété ou à valeur dans une variété).

<u>Espace tangent à une variété en un point</u>.

Idée : l'ensemble des "vecteurs vitesse instantanés" qui passe en un point.

$k \geqslant 1$

Soit $\mathcal{M}$ une variété $\mathcal{C}^k$, $m \in \mathcal{M}$, $\boxed{x : O \longrightarrow U \text{ une carte locale}}$ où $m \in O \subset \mathcal{M}$

$$\Gamma_m = \left\{ (I, \gamma) \; ; \; \begin{array}{l} I : \text{intervalle ouvert de } \mathbb{R}, \text{ contenant } 0 \\ \gamma : I \to \mathcal{M} \quad , \; \gamma(0) = m \\ x \circ \gamma : I \to U \text{ est } \mathcal{C}^1 \end{array} \right\}$$

<u>Remarque</u> : si on utilise une autre $y : O \longrightarrow V$, avec $y = \varphi \circ x$.
$y \circ \gamma = \varphi \circ (x \circ \gamma)$ est aussi $\mathcal{C}^1$ car φ est $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 1$

<u>Relation d'équivalence</u> $\gamma, \tilde{\gamma} \in \Gamma_m$, $\gamma \sim \tilde{\gamma} \iff \frac{d(x \circ \gamma)}{dt}(0) = \frac{d(x \circ \tilde{\gamma})}{dt}(0)$

<u>Définition</u> L'espace tangent à $\mathcal{M}$ en m est l'ensemble des classes d'équivalence dans Γ_m pour la relation $\sim$. On le note $\boxed{T_m \mathcal{M}}$

On définit $\boxed{\begin{array}{rcl} dx_\mu : T_\mu \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ [\gamma] & \longmapsto & \dfrac{d(x\circ\gamma)}{dt}(0) \end{array}}$

On pose aussi $\dfrac{d\gamma}{dt}(0) = [\gamma]$

<u>Définition</u> indépendante de la carte. Si $y : O \to V$ une autre carte

avec $\boxed{y = \varphi \circ x}$ (φ C^∞)

$x\circ\gamma : I \to U$

$\varphi : U \to V$

$$y\circ\gamma(t) = \varphi\circ(x\circ\gamma)(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d(y\circ\gamma)}{dt}(0) = d\varphi_{x(\mu)}\left(\frac{d(x\circ\gamma)}{dt}(0)\right)}$$

φ difféomorphisme

$\Rightarrow$

$d\varphi_{x(\mu)} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

isomorphisme

Donc (1) $\dfrac{d(y\circ\gamma)}{dt}(0) = \dfrac{d(y\circ\tilde{\gamma})}{dt}(0)$

$d\varphi_{x(\mu)}$ bijection

$$\Longleftrightarrow \frac{d(x\circ\gamma)}{dt}(0) = \frac{d(x\circ\tilde{\gamma})}{dt}(0)$$

Donc la relation d'équivalence ne dépend pas de la carte, donc $T_\mu\mathcal{M}$ est <u>universelle</u>.

(2) Je peux munir $T_\mu\mathcal{M}$ d'une <u>structure d'espace vectoriel de dimension m.</u> en postulant que $dx_\mu : T_\mu\mathcal{M} \to \mathbb{R}^m$, $[\gamma] = \dfrac{d\gamma}{dt}(0) \mapsto \dfrac{d(x\circ\gamma)}{dt}(0)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels

<u>Changement de carte</u> : $y = \varphi\circ x$

$$\frac{d(y\circ\gamma)}{dt}(0) = d\varphi_{x(\mu)}\left(\frac{d(x\circ\gamma)}{dt}(0)\right)$$

Par définition de dy_μ et de $\dfrac{d\gamma(0)}{dt}$ $\longrightarrow$ $\parallel$ $\qquad\parallel$

$$dy_\mu\left(\frac{d\gamma}{dt}(0)\right) = d\varphi_{x(\mu)}\left(dx_\mu\left(\frac{d\gamma}{dt}(0)\right)\right) \qquad \forall \frac{d\gamma}{dt}(0) \in T_\mu\mathcal{M}$$

Donc $\boxed{dy_\mu = d\varphi_{x(\mu)} \circ dx_\mu}$

où :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^m \\ T_\mu\mathcal{M} \arrow[ur, "dy_\mu"] \arrow[dr, "dx_\mu"'] & \\ & \mathbb{R}^m \arrow[uu, "d\varphi_{x(\mu)}"'] \end{tikzcd}$$

a) Si $\mathcal{M}$ est $\mathcal{C}^k$, je peux définir une fonction $\mathcal{C}^j$, $f : U \to \mathcal{M}$ où U : ouvert de $\mathbb{R}^n$, si $\boxed{j \leq k}$

$f : U \to \mathcal{M}$ est $\mathcal{C}^j$ si, $\forall\, x_i : O_i \to U_i$ (carte locale sur $\mathcal{M}$)

$$f|_{f^{-1}(O_i)} : f^{-1}(O_i) \longrightarrow U_i \quad \text{est } \mathcal{C}^j.$$

b) de même, je peux une fonction $\mathcal{C}^j$, $v : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^k$.

$\forall\, x_i : O_i \to U_i$, $\quad v \circ x_i^{-1} : O_i \to \mathbb{R}^k$ est $\mathcal{C}^j$.

c) Plus généralement on peut définir des applications $\mathcal{C}^j$ entre variétés.

Définition Espace cotangent à $\mathcal{M}$ en un point.

L'espace cotangent à $\mathcal{M}$ en M est le dual de $T_M \mathcal{M}$. On le note $\boxed{T^*_M \mathcal{M}}$

$$T^*_M \mathcal{M} = \{ \alpha : T_M \mathcal{M} \to \mathbb{R} \text{, linéaire} \}.$$

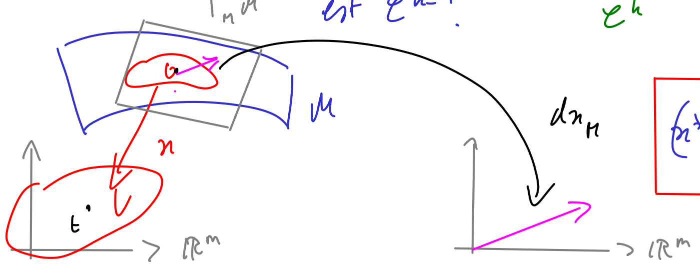
Définition Un champ de vecteur X sur $\mathcal{M}$ est la donnée, en chaque point $M \in \mathcal{M}$ d'un vecteur $X(M) = X_M \in T_M \mathcal{M}$.

Si $\mathcal{M}$ est $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, on dit que X est $\mathcal{C}^{k-1}$ si

$\forall\, x : O \to U$ (carte locale $\mathcal{C}^k$),

$$x^* X : \left[\begin{array}{ccccccc} U & \longrightarrow & O \subset \mathcal{M} & \longrightarrow & T_M \mathcal{M} & \xrightarrow{dx_M} & \mathbb{R}^m \\ t & \longmapsto & \underbrace{M = x^{-1}(t)}_{\mathcal{C}^k} & \longmapsto & X(M) & \longrightarrow & dx_M(X(M)) \end{array} \right]$$

$T_M \mathcal{M}$ est $\mathcal{C}^k$! $\qquad$ "$\mathcal{C}^{k-1}$" ?



$$\boxed{(x^* X)(t) := dx_M(X(M)) = dx_{x^{-1}(t)}\left(X(x^{-1}(t))\right)}$$

$\boxed{x^* X : U \to \mathbb{R}^m \text{ doit être } \mathcal{C}^{k-1}.}$

(champ de vecteur sur U).