Principe : une variété ressemble localement à un ouvert de $\mathbb{R}^m$.
du point du calcul différentiel.

Soit $\mathcal{M}$ une variété de dimension m, de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$, $p \in \mathcal{M}$

Déf (Espace tangent) $\Gamma_p = \{ (I, \gamma) ;$ I : intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, contenant 0
$\gamma \in \underbrace{\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M})}_{\Updownarrow}, \ \gamma(0) = p \}$

$x\circ\gamma : I \to U \subset \mathbb{R}^m$ est $\mathcal{C}^1$

$x : \underset{\mathcal{M}}{\overset{\cup}{O}} \to U \subset \mathbb{R}^m$
carte locale

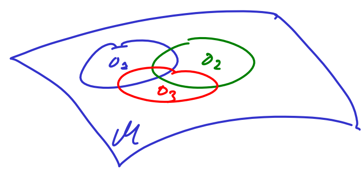
$$(I_1, \gamma_1) \sim (I_2, \gamma_2) \iff \frac{d(x\circ\gamma_1)}{dt}(0) = \frac{d(x\circ\gamma_2)}{dt}(0)$$

$$T_p\mathcal{M} = \Gamma_p / \sim$$

$\to T_p\mathcal{M}$: espace vectoriel de dimension m.

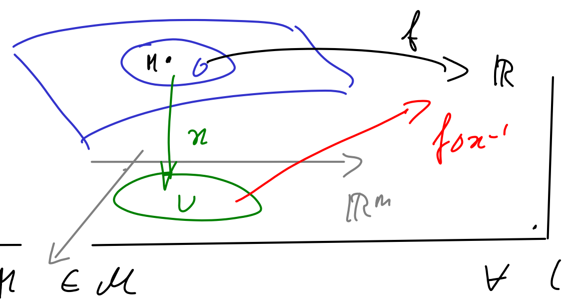
$$dx_p : T_p\mathcal{M} \to \mathbb{R}^m$$
$$\underbrace{\frac{d\gamma}{dt}(0) := [(I,\gamma)]}_{} \mapsto \frac{d(x\circ\gamma)}{dt}(0).$$

cela définit $\frac{d\gamma}{dt}(0)$



Application différentiable $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$

Déf Si $\mathcal{M}$ est $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, si $j \leq k$, f est $\mathcal{C}^j$ si
$\forall\ x : O \to U$ (carte locale), $\boxed{f \circ x^{-1} : U \to \mathbb{R} \text{ est } \mathcal{C}^j}$



Si $p \in \mathcal{M}$ $\quad \forall (I, \gamma) \in \Gamma_p$,

$$df_p : T_p\mathcal{M} \to \mathbb{R} \qquad df_p([I,\gamma]) := \frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(0)$$

$$\iff df_p\left(\frac{d\gamma}{dt}(0)\right) = \frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(0)$$

Conséquence : $$df_p\left(\frac{d\gamma}{dt}(0)\right) = \frac{d\left((f\circ x^{-1})\circ(x\circ\gamma)\right)}{dt}(0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial(f\circ x^{-1})}{\partial x^j}(x\circ\gamma(0)) \frac{d(x^j\circ\gamma)}{dt}(0)$$

$$df_M\left(\frac{d\gamma}{dt}(0)\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial(f\circ x^{-1})}{\partial x^j}(x\circ\gamma(0))\; dx^j_{\gamma(0)}\left(\frac{d\gamma}{dt}(0)\right) \qquad \forall (I,\gamma)$$

$$\Rightarrow \forall \underset{\frac{d\gamma}{dt}(0)}{\underset{\|}{v}} \in T_{\underset{\gamma(0)}{\underset{\|}{M}}}\mathcal{M}, \quad \boxed{\underbrace{df_M}_{\in T^*_M\mathcal{M}}(\underbrace{v}_{\in T_M\mathcal{M}}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial(f\circ x^{-1})}{\partial x^j}(x(M))\; \underbrace{dx^j_M}_{\in T^*_M\mathcal{M}}(\underbrace{v}_{\in T_M\mathcal{M}})} \text{ dans } \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{df_M = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial(f\circ x^{-1})}{\partial x^j}(x(M))\; dx^j_M} \quad \text{dans } T^*_M\mathcal{M}$$

<u>Observation</u> : $(dx^1_M, dx^2_M, \dots, dx^m_M)$: base de $T^*_M\mathcal{M}$.

<u>Souvent, on omet d'écrire</u> $M \to (dx^1, \dots, dx^m)$

($x^1, \dots, x^m$: composantes d'une carte locale, appelées aussi coordonnées locales)

<u>Remarque</u> : On note $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ la base de $T_M\mathcal{M}$ duale de $(dx^1, \dots, dx^m)$.

<u>Notation bien fondée</u>

Dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^m$, soit $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$

<u>Proposition</u> L'espace des opérateurs différentiels d'ordre 1 agissant sur $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ s'identifie à l'espace des champs de vecteurs $\mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^m)$

<u>Déf</u> Opérateur différentiel d'ordre 1 agissant sur $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$:

$D : \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(U,\mathbb{R})$ opérateur linéaire

$$\boxed{D(fg) = (Df)g + f(Dg)} \quad \text{(règle de Leibniz)}$$

<u>Preuve</u> (sens facile) si $X \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^m)$, on lui associe

$$D_X : f \mapsto df(X) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^j} X^j.$$

<u>Proposition</u> Ce résultat s'étend sur les variétés (ou les ouverts $O \subset \mathcal{M}$)

$\{$ Opérateurs $D : \mathcal{C}^1(O) \to \mathcal{C}^0(O)$, $D(fg) = (Df)g + f(Dg)\}$

$= \{$ Champs de vecteurs $\mathcal{C}^0$ sur $O \}$

__Exemple__ $x : O \to U$ carte locale

$$D_j : \mathcal{C}^1(O) \to \mathcal{C}^0(O)$$
$$f \mapsto \frac{\partial(f\circ x^{-1})}{\partial x^j} \circ x$$

Satisfait $D(fg) = (Df)g + f Dg$

$$\left[(D_j f)(M) = \frac{\partial(f\circ x^{-1})}{\partial x^j}(x(M)),\ \forall M \in O \right]$$

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x^j} \to \text{Notation } \frac{\partial f}{\partial x^j} = \frac{\partial(f\circ x^{-1})}{\partial x^j} \circ x$$

__O ouvert $\subset \mathcal{M}$__

- Champ de vecteur X sur O : associer à chaque point $M \in O$, un vecteur $X(M) \in T_M\mathcal{M}$

- 1-forme α sur O : associer à chaque $M \in O$, un $\alpha_M \in T_M^*\mathcal{M}$.

- 2-forme β sur O : associe à chaque $M \in O$, $\beta_M \in \underbrace{\Lambda^2 T_M^*\mathcal{M}}$

$\Lambda^2 T^*\mathcal{M} = \{$ Applications bilinéaires alternées $T_M\mathcal{M} \times T_M\mathcal{M} \to \mathbb{R} \}$
(= antisymétriques)

__Souci__ : ça ressemble à une application de $\mathcal{M}$ vers quelque chose, mais ce quelque chose dépend du point.

__Malgré tout__ on peut définir, sur une variété de classe $\mathcal{C}^k$,

a) Champs de vecteurs $\mathcal{C}^j$ $(j \leq k-1)$ Si X : champ de vecteur sur O et $x : O \to U \subset \mathbb{R}^m$, on définit $x_*X : U \to \mathbb{R}^m$. (implicitement)

$\forall M \in \mathcal{M}$, $$\boxed{x_*X(\underbrace{x(M)}_{\in U}) := dx_M(X(M))}$$ $((x^*X)\circ x : O \to \mathbb{R}^m)$

Alors X est $\mathcal{C}^j$ si $x_*X \in \mathcal{C}^j(U, \mathbb{R}^m)$

b) 1-Forme $\mathcal{C}^j$ $(j \leq k-1)$ α : 1-forme sur O

on définit $(x^{-1})^*\alpha : U \to (\mathbb{R}^m)^*$

$\forall M \in \mathcal{M}, \forall v \in T_v\mathcal{M}$, $$\boxed{((x^{-1})^*\alpha)_{\underbrace{x(M)}_{\in U}}(dx_M(v)) = \alpha_M(v)}$$

Alors α est $\mathcal{C}^j$ si $(x^{-1})^*\alpha$ est $\mathcal{C}^j$.

c) 2-forme β sur O. $\longrightarrow (x^{-1})^*\beta : U \longrightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^m)^*$

$\forall M \in \mathcal{M}, \forall v_1, v_2 \in T_M\mathcal{M}$, $\boxed{\left((x^{-1})^*\beta\right)_{x(M)}(dx_M(v_1), dx_M(v_2)) = \alpha_M(v_1, v_2)}$

Alors β $\mathcal{C}^j \iff (x^{-1})^*\beta$ est $\mathcal{C}^j$.

Déf <u>Fibré tangent</u> Soit $\mathcal{M}$ une variété de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$, de dimension m

Comme ensemble, le fibré tangent à $\mathcal{M}$ est l'ensemble

$$T\mathcal{M} = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \{M\} \times T_M\mathcal{M} \simeq \bigcup_{M \in \mathcal{M}} T_M\mathcal{M}$$

<u>Comme variété</u>, $T\mathcal{M}$ est une variété de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, de dimension $2m$.

A tout atlas $(O_i, U_i, x_i)_{i \in I}$ <u>sur $\mathcal{M}$</u>

| O_i ouvert $\subset \mathcal{M}$
| U_i —— $\subset \mathbb{R}^m$
| $x_i : O_i \to U_i$

j'associe un atlas sur $T\mathcal{M}$ $\quad (TO_i, U_i \times \mathbb{R}^m, Tx_i)_{i \in I}$

Ici $\quad TO_i = \bigcup_{M \in O_i} \{M\} \times T_M\mathcal{M}$

$$\begin{aligned} Tx_i : TO_i &\longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^m \\ (M, v) &\longmapsto (x_i(M), dx_i(v)) \end{aligned} \qquad v \in T_M\mathcal{M}$$

C'est une bijection.

<u>Structure de variété</u> : supposons que, sur O $(= O_i \cap O_j)$ on ait deux cartes locales $x : O \to U$, $y : O \to V$ et $\boxed{y = \varphi \circ x}$

$\varphi : \mathcal{C}^k$-difféo.

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$Tx : TO \to U \times \mathbb{R}^m \qquad Ty : TO \to V \times \mathbb{R}^m$.

$$\begin{aligned} Ty(M, v) &= (y(v), dy_M(v)) = (\varphi \circ x(M), d(\varphi \circ x)_M(v)) \\ &= (\varphi(x(M)), d\varphi_{x(M)} \circ dx_M(v)) \\ &= (\varphi, d\varphi_{x(M)}) \circ (x(M), dx_M(v)) = (\varphi, d\varphi_{x(M)})(Tx(M, v)) \end{aligned}$$

$T\varphi = (\underbrace{\varphi}_{C^k}, \underbrace{d\varphi}_{C^{k-1}})$: changement sur $T\mathcal{M}$.

<u>Fibré cotangent</u> De même, $T^*\mathcal{M} = \bigcup_{m\in\mathcal{M}} \{m\}\times T^*_m\mathcal{M}$ a une structure de variété C^{k-1}.

$$\Lambda^2 T^*\mathcal{M} = \bigcup_{m\in\mathcal{M}} \{m\}\times \Lambda^2 T^*_m\mathcal{M}.$$

Ce sont des <u>exemples de fibrés vectoriels</u> au-dessus de $\mathcal{M}$.

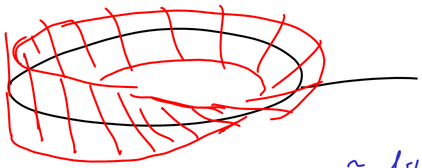
(Fibré : paire $(\mathcal{F},\mathcal{M})$ de deux variétés, $\dim \mathcal{F} \geq \dim \mathcal{M}$ avec une submersion $\pi : \mathcal{F} \to \mathcal{M}$ surjective

<u>Fibré vectoriel</u> : $\forall m \in \mathcal{M}$ (variété base), $\pi^{-1}(\{m\})$ (fibre) a une structure d'espace vectoriel qui dépend de façon régulière de m.

"<u>Localement</u>" $\mathcal{F} \simeq \mathcal{M}\times\mathbb{R}^n$ (faux au niveau global))

<u>Suggestion de ce qui peut se passer</u> : ruban de Möbius. (ce n'est pas $S^1\times\mathbb{R}$)

droite attachée à chaque point



courbe fermée

$\simeq$ fibré $\mathcal{F}$, $\dim \mathcal{F} = 2$
$\downarrow$
$\mathcal{M}$, $\dim \mathcal{M} = 1$ (cercle).

<u>Champ de vecteur</u> X : application $\mathcal{M} \to T\mathcal{M}$ telle que $\pi\circ X = \text{identité}_{\mathcal{M}\to\mathcal{M}}$

$\pi : T\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ "projection" <u>fibration</u> (cas particulier d'une submersion).
$(m, v) \mapsto m$

$\left(m \overset{X}{\mapsto} (m, X(m)) \overset{\pi}{\longmapsto} (m) \right)$

(Même chose pour les formes $\alpha : \mathcal{M} \to T^*\mathcal{M}$ telle que $\pi\circ\alpha = Id_{\mathcal{M}}$)

<u>Déf</u> Si $\mathcal{F}$ est un fibré vectoriel au-dessus de $\mathcal{M}$ ($\pi : \mathcal{F} \to \mathcal{M}$)
Une application $S : \mathcal{M} \to \mathcal{F}$ telle que $\boxed{\pi\circ S = Id_{\mathcal{M}}}$
s'appelle une section de $\mathcal{F}$

Exemple : un champ de vecteur sur $\mathcal{M}$ est une section de $T\mathcal{M}$.

Variétés à bord : les variétés vues jusqu'à présent n'ont pas de bord.

Deux notions de bord

Exemple $\mathring{D}^2 = B^2(0,1) = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1 \}$ (disque unité ouvert)

a) Vu comme ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\mathring{D}^2$ a un bord (topologie dans $\mathbb{R}^n$).

($\mathring{D}^2$: sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$)

$\overline{D^2} = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1 \}$

$\partial D^2 = \overline{D}^2 \setminus \mathring{D}^2 =$ cercle unité.

b) Vu comme variété, $\mathring{D}^2$ a un bord vide (pas de bord).

On regarde $\mathring{D}^2$, en "étant coincé à l'intérieur".

Digression

Ce qui joue le rôle de bord au sens (a) correspond à un horizon à l'infini au sens (b).

Disque de Poincaré : on munit $\mathring{D}^2$ d'une "métrique" (première forme fondamentale)

$$g_{ij}(x) = \frac{\delta_{ij}}{4(1-\|x\|^2)^2} \quad (\text{tend vers } +\infty \text{ quand } \|x\| \to 1)$$

Dans cette métrique, le "bord" est à une distance infinie de n'importe quel point dans $\mathring{D}^2$.

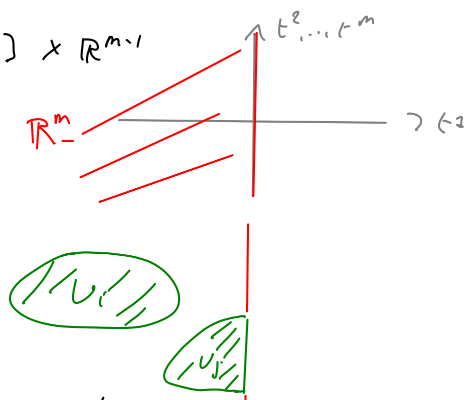
Retour à la notion de variété à bord.

Définition Variété à bord $\mathcal{M}$: espace topologique séparé (oublié la dernière fois) muni d'un atlas : $(O_i, U_i, x_i)_{i \in I}$

O_i : ouvert dans $\mathcal{M}$

U_i : ouvert dans $\mathbb{R}^m_-$ ou $\mathbb{R}^m$

$$\mathbb{R}^m_- = \{ (t^1, \dots, t^m) \in \mathbb{R}^m \mid t^1 \leq 0 \} =]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1}$$



tels que (a) $\forall i$, $x_i : O_i \to U_i$ est un homéomorphisme.

Deux types d'ouverts:

(b) $\forall i,j$, $O_{ij} = O_i \cap O_j \neq \emptyset$

$\varphi_{ij} = x_j \circ (x_i)^{-1} |_{x_i(O_{ij})}$ est difféomorphisme et qui envoie $\partial \mathbb{R}^m_-$ dans $\partial \mathbb{R}^m_-$

Deux types d'ouverts $i \in I = I_{\mathring{M}} \cup I_{\partial M}$

- si $i \in I_{\mathring{M}}$, U_i est un ouvert de $\mathbb{R}^m$
- si $i \in I_{\partial M}$, U_i est un ouvert de $\mathbb{R}^m_-$ avec $U_i \cap \partial \mathbb{R}^m \neq \emptyset$

$\iff U_i \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \neq 0$

(c) On définit le bord ∂M :

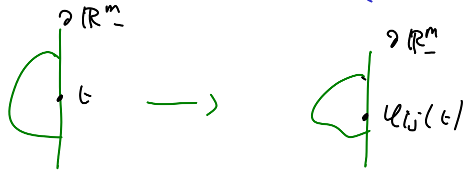
$$\partial M = \bigcup_{i \in I_{\partial M}} x_i^{-1}(\partial \mathbb{R}^m_-)$$

Alors ∂M est aussi une variété de dimension $m-1$, de classe $\mathcal{C}^k$.

Cartes locales $x_i|_{O_i \cap \partial M} \to U_i \cap (\partial \mathbb{R}^m_-)$

Cela forme un atlas

Difféomorphisme $\varphi_{ij} : x_i^{-1}|_{x_i(O_{ij})}$ $\mathcal{C}^k$:



$\varphi_{ij}(\partial) \in \partial \mathbb{R}^m_-$

Différentiable à gauche par rapport à t_1.

$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial t_j}(t) \quad \text{pour } j \geq 2 \text{ : existent} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \text{ : à gauche uniquement.} \end{array} \right.$ $\to$ fonctions continues sur $x_i(O_{ij})$.

$S^1 \times S^1$:

Torus. $\subset \mathbb{R}^3$

$\cap$ $\mathbb{R}^2$ $\qquad$ $\cap$ $\mathbb{R}^2$

$S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$.

$\{\underbrace{(\cos\theta, \sin\theta}_{x}, \cos\varphi, \sin\varphi) \mid \theta, \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\} \in S^3_{\sqrt{2}} \subset \mathbb{R}^4$ $\qquad (\|x\|^2 = 2)$

$\downarrow$ stéréographic projection $S^3_{\sqrt{2}} \setminus \{N\}$

$\mathbb{R}^3$

Books : Gallot, Hulin, Lafontaine.

- "Modern Geometry", Dubrovin, Novikov, Fomenko (Book 1)
- do Carmo.
- Riemannian Geometry, T. Willmore

Projective manifolds? look to Algebraic geometry (Harris & al.)

- Hodge theory: $\Omega^2 T^*M = \{ dz^i \wedge dz^j, \; dz^i \wedge d\bar{z}^j, \; d\bar{z}^i \wedge d\bar{z}^j \}$

  $\Updownarrow$

  Complex structures on manifold.

  See the book of Willmore

  $\Uparrow$ Hodge conjecture? Algebraic geometry (Book of Claire Voisin)

  + PDE analysis on manifolds

- Hodge operator: makes sense on real manifolds (more general)

Riem. Metric & orientation $\longrightarrow$ $\star : \Omega^p \longrightarrow \Omega^{m-p}$