Examen M1 géométrie différentielle - Sophie Germain 2011 :
mardi 11 mai, 11 h - 13 h, Sophie Germain 2011

Aujourd'hui : calcul différentiel extérieur
Variété à bord, Stokes
Application.

Calcul différentiel : Sur $U \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega^p(U)$: généralise $\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R})$

$$\Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U).$$

$$\Omega^1(U) = \mathcal{C}^\infty(U,(\mathbb{R}^n)^*) \ni \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, dx^i \quad (\alpha_i \in \mathcal{C}^\infty(U))$$

$$\Omega^2(U) = \mathcal{C}^\infty(U, \Lambda^2(\mathbb{R}^n)^*) \ni \beta$$

$$\beta = \sum_{1\leq i_1 < i_2 \leq n} \beta_{i_1 i_2}\, dx^{i_1}\wedge dx^{i_2} \quad (\beta_{i_1 i_2} \in \mathcal{C}^\infty(U))$$

$$\left(\Omega^3(U) = \mathcal{C}^\infty(U, \Lambda^3(\mathbb{R}^n)^*) \ni \gamma \quad \gamma = \sum_{1\leq i_1<i_2<i_3\leq n} \gamma_{i_1 i_2 i_3}\, dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge dx^{i_3} \right)$$

Différentielle extérieure

$$d : \Omega^0(U) \to \Omega^1(U)$$
$$f \mapsto df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

$$d : \Omega^1(U) \to \Omega^2(U)$$
$$\alpha \mapsto d\alpha$$

Si $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, dx^i \Rightarrow d\alpha = \sum_{i=1}^n d\alpha_i \wedge dx^i$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^i$$

$dx^i\wedge dx^j + dx^j \wedge dx^i = 0$

$$= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j$$

$$= \sum_{\boxed{1\leq i<j\leq n}} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} dx^i\wedge dx^j \quad 0 \quad + \boxed{\sum_{1\leq j<i\leq n} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j}$$

$$\boxed{\sum_{1\leq j<i\leq n} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j} = \sum_{\boxed{1\leq i<j\leq n}} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \underbrace{dx^j\wedge dx^i}_{-dx^i\wedge dx^j}$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j$$

Image inverse ou "pull-back" : si $\boxed{\varphi : U'_{t^i} \longrightarrow U_{x^i}}$

ou "tiré en arrière"

on a $\varphi^* : \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U')$

$f \longmapsto f \circ \varphi = \varphi^* f$

$$\varphi^* : \Omega^1(U) \longrightarrow \Omega^1(U')$$

$$\alpha = \sum_i \alpha_i dx^i \longmapsto \varphi^* \alpha = \sum_i (\alpha_i \circ \varphi)\, d(x^i \circ \varphi)$$

$$= \sum_i (\alpha_i \circ \varphi)\, d\varphi^i$$

$$= \sum_i (\alpha_i \circ \varphi) \sum_j \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^j} dt^j$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i \circ \varphi) \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^j} \right) dt^j$$

Règle heuristique : $t \in U'$, $x \in U$

$x^i \longmapsto \varphi^i(t)$

$$\varphi^* : \Omega^2(U) \longrightarrow \Omega^2(U')$$

$$\boxed{\beta = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \beta_{i_1 i_2}\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}} \longmapsto \varphi^* \beta$$

$$\varphi^* \beta = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} (\beta_{i_1 i_2} \circ \varphi)\, d(\underbrace{x^{i_1} \circ \varphi}_{\varphi^{i_1}}) \wedge d(\underbrace{x^{i_2} \circ \varphi}_{\varphi^{i_2}})$$

$$\ldots = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} (\beta_{i_1 i_2} \circ \varphi) \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq n} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi^{i_1}}{\partial t^{j_1}} & \frac{\partial \varphi^{i_1}}{\partial t^{j_2}} \\ \frac{\partial \varphi^{i_2}}{\partial t^{j_1}} & \frac{\partial \varphi^{i_2}}{\partial t^{j_2}} \end{vmatrix} dt^{j_1} \wedge dt^{j_2}$$

Remarque : quasi coïncidence avec les formules de changement de variable dans les intégrales.

a) Intégrale sur un intervalle. Soit $\varphi : I' \longrightarrow I$ (deux intervalles).

Hypothèses : φ est un difféomorphisme + $\frac{d\varphi}{dt} > 0$

Si $\alpha_1 \in \mathcal{C}^0(I)$, changement de variable $x = \varphi(t)$, $dx = \left|\frac{d\varphi}{dt}(t)\right| dt$

$$\int_I \underbrace{\alpha_1(x)\, dx}_{\alpha} = \int_{I'} \underbrace{\alpha_1(\varphi(t)) \frac{d\varphi}{dt}(t)\, dt}_{\varphi^* \alpha}$$

coïncidence

$\downarrow$

conséquence : $\boxed{\text{Définition si } \alpha = \alpha_1 dx \in \Omega^1(I),\ \int_I \alpha := \int_I \alpha_1(x)\, dx}$

Invariant par difféomorphisme.

b) Intervalle sur $U \subset \mathbb{R}^2$. $\varphi : U' \longrightarrow U$

Hypothèse φ est un difféomorphisme et $\det(d\varphi_x) > 0$

Soit $\beta_{12} \in \mathcal{C}^1(U)$. Changement de variable $x = \varphi(t)$

$dx^1 dx^2 = \det(d\varphi_x)\, dt^1 dt^2$

$$\int_U \boxed{\beta_{12}(x)\, dx^1 dx^2} = \int_{U'} \boxed{\beta_{12}(\varphi(t)) \det(d\varphi_t)\, dt^1 dt^2}$$

mesure de Lebesgue

Comparaison avec $\boxed{\beta = \beta_{12}\, dx^1 \wedge dx^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi^* \beta = (\beta_{12} \circ \varphi) \det(d\varphi_t)\, \underbrace{dt^1 \wedge dt^2}_{\Lambda^2(\mathbb{R}^2)^*}}$$

Coïncidence

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{Définition} \quad \text{Si } \beta \in \Omega^2(U), \quad U \subset \mathbb{R}^2 \qquad \int_U \beta := \int_U \beta_{12}(x)\, dx^1 dx^2}$

Invariant par difféomorphisme qui préserve l'orientation.

Définition plus intrinsèque de φ^* où $\varphi : U' \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n$, $t \longmapsto x = \varphi(t)$

a) $\alpha \in \Omega^1(U)$ $\left(\begin{array}{l} \text{définie par} \\ U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, v) \longmapsto \alpha_x(v) \end{array}\right)$

$\longmapsto \varphi^*\alpha \in \Omega^1(U')$, caractérisée par :

$$U' \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t, \xi) \longmapsto \alpha_{\varphi(t)}(d\varphi_t(\xi))$$

Donc $\boxed{(\varphi^*\alpha)_t(\xi) := \alpha_{\varphi(t)}(d\varphi_t(\xi))}$ $\forall t \in U'$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$

[Exercice: ne donne $\varphi^*\left(\sum_i \alpha_i\, dx^i\right) = \sum_i (\alpha_i \circ \varphi) \sum_j \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^j} dt^j$]

b) Si $\beta \in \Omega^2(U)$, $\varphi : U' \longrightarrow U$

$\forall t \in U'$, $\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$ $\boxed{(\varphi^*\beta)_t(\xi_1, \xi_2) := \beta_{\varphi(t)}(d\varphi_t(\xi_1), d\varphi_t(\xi_2))}$

Retour aux variétés

Soit $\mathcal{M}$ une variété $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ un ouvert.

$x : \mathcal{O} \to U$ carte locale $(U \subset \mathbb{R}^n)$.

0-forme sur $\mathcal{M}$: fonctions $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ $\quad \Omega^0(\mathcal{M}) = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$

$\forall (x : \mathcal{O} \to U)$ carte locale $\mathcal{C}^\infty$

$f \circ x^{-1} : U \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$.

1-forme sur $\mathcal{M}$: α ; $\forall m \in \mathcal{M}$, $\alpha_m \in T_m^*\mathcal{M}$ $\left(= (T_m\mathcal{M})^*\right)$

$\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, T^*\mathcal{M})$, $\pi \circ \alpha = Id_{\mathcal{M}}$

Fibré tangent. $\quad \pi : T\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ projection

Représentation locale ? $\alpha_m \in T_m^*\mathcal{M} \longrightarrow \tilde{\alpha}_{x(m)} \in (\mathbb{R}^n)^*$?

en coordonnées

Seule méthode naturelle : $\boxed{\tilde{\alpha}_{x(m)}(\xi) := \alpha_m\left((dx_m)^{-1}(\xi)\right)}$

$\forall \xi \in \mathbb{R}^n$

$dx_m : T_m\mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ isomorphisme d'espace vectoriel

Posons $v = (dx_m)^{-1}(\xi) \in T_m\mathcal{M} \iff \xi = (dx_m)(v)$.

Alors $\tilde{\alpha}_{x(m)}(dx_m(v)) = \alpha_m(v)$.

Observation $\quad \alpha = x^*\tilde{\alpha} \iff \tilde{\alpha} = (x^{-1})^*\alpha$

Conclusion : on retrouve la construction $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{O}) \to (x^{-1})^*\alpha \in \Omega^1(U)$

Même chose pour les 2-formes (et p-formes, $\forall p \in \mathbb{N}$).

Conséquence On peut définir $\boxed{\int_{\mathcal{O}} \alpha := \int_U (x^{-1})^*\alpha}$

$x : \mathcal{O} \to U$, carte

$\mathcal{M}$: surface, $\mathcal{O}$ ouvert $\subset \mathcal{M}$
$(\dim \mathcal{M} = 2)$
$\alpha \in \Omega^2(\mathcal{M})$

Définition indépendante de la carte pourvu qu'on respecte l'orientation.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O} \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\ U & & U' \arrow[ll, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

$x = \varphi \circ y \iff x^{-1} = y^{-1} \circ \varphi^{-1}$

Donc $\boxed{\begin{aligned}(x^{-1})^* \alpha &= (y^{-1} \circ \varphi^{-1})^* \alpha \\ &= (\varphi^{-1})^* \left[(y^{-1})^* \alpha \right]\end{aligned}}$

(Attention à l'ordre !)

Donc $\displaystyle\int_U (x^{-1})^* \alpha = \int_{\varphi(U')} (\varphi^{-1})^* \left[(y^{-1})^* \alpha \right] \overset{\text{changement de variable}}{=} \int_{U'} (y^{-1})^* \alpha$

2 définitions possibles de $\int_U \alpha$

Cas d'une variété définie par un atlas $(\mathcal{O}_i, U_i, x_i : \mathcal{O}_i \to U_i)$

$$\mathcal{M} \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$$

(Hypothèse : $\mathcal{M}$ $\mathcal{C}^\infty$)

Définition Partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\mathcal{M} \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$

C'est une famille de fonctions $(\theta_i)_{i \in I}$ telle que:

(a) $\forall i \in I$, $\theta_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, [0,1])$

(b) localement fini : $\forall i \in I$, $\{ j \in I \,;\, \theta_j|_{\mathcal{O}_i} \neq 0 \}$ est fini

(c) $\forall i \in I$, $\underbrace{\operatorname{supp}(\theta_i)}_{\text{compact}} \subset \underbrace{\mathcal{O}_i}_{\text{ouvert}}$

(d) $\forall m \in \mathcal{M}$, $\displaystyle\sum_{i \in I} \theta_i(m) = 1$.

Théorème Si $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ est localement fini, $(\theta_i)_{i \in I}$ existe.

Preuve : admise, pas trop difficile si $\mathcal{M}$ est compacte.

Définition Soit $\mathcal{M}$ une variété orientée, de dimension n et $\alpha \in \Omega^n(\mathcal{M})$. Soit $(\mathcal{O}_i, U_i, x_i : \mathcal{O}_i \to U_i)$ et $(\theta_i)_{i \in I}$ partition de l'unité.

$$\int_M \alpha = \sum_{i\in I} \int_M \theta_i \alpha = \sum_{i\in I} \int_{\theta_i} \theta_i \alpha$$

$$= \sum_{i\in I} \int_{U_i} (x_i^{-1})^* (\theta_i \alpha)$$

__Proposition__ : définition indépendante du choix de l'atlas et de la partition de l'unité.

__Remarque__ : valable si M est une variété à bord (adapter)

Différentielle extérieure sur une variété.

Lemme crucial $\forall\, \varphi : U' \longrightarrow U$ application $\mathcal{C}^1$

$\forall\, \alpha \in \Omega^p(U)$, $\boxed{d(\varphi^*\alpha) = \varphi^*(d\alpha)}$

__Remarque__ : φ n'est pas nécessairement un difféomorphisme et $\dim U'$ peut être différent de $\dim U$.

__Preuve dans les cas $p=0$ et 1.__

$\boxed{p=0}$ $f \in \mathcal{C}^1(U)$

$\varphi^* f = f\circ\varphi \Rightarrow d(\varphi^* f) = df_\varphi \circ d\varphi = \varphi^* df.$

$\boxed{p=1}$ $\alpha \in \Omega^1(U)$ $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i \, dx^i$

$$\varphi^*\alpha = \sum_{i=1}^n (\alpha_i\circ\varphi)\, d\varphi^i$$

$$\Rightarrow d(\varphi^*\alpha) = \sum_{i=1}^n d(\alpha_i\circ\varphi)\wedge d\varphi^i + \sum_i (\alpha_i\circ\varphi)\, \underbrace{d(d\varphi^i)}_{=0 \text{ (Schwarz)}}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_j \left(\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial t^j}\circ\varphi\right) d\varphi^j\right)\wedge d\varphi^i$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial t^i}\circ\varphi\right) d\varphi^i\wedge d\varphi^j = \varphi^* d\alpha$$

__Conséquence__ __Définition__ de $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$

Localement, sur $O \subset M$, $x : O \to U$.

Construction abstraite pour justifier l'existence de $d\alpha$

$$\begin{tikzcd} \alpha \in \Omega^p(O) \arrow[r, mapsto, "d"] \arrow[d] & \boxed{x^*\left[d(x^{-1})^*\alpha\right]} \in \Omega^{p+1}(O). \\ (x^{-1})^*\alpha \in \Omega^p(U) \arrow[r, mapsto] & d(x^{-1})^*\alpha \in \Omega^{p+1}(U). \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$d\alpha$ par définition.

Indépendance du choix de la carte : conséquence de $\boxed{d(\varphi^*\tilde{\alpha}) = \varphi^* d\tilde{\alpha}}$

pour $x = \varphi \circ y$

Théorème (Formule de Stokes)

Soit M une variété à bord orientée, de classe C^2, de dimension n.

Soit $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$. Alors

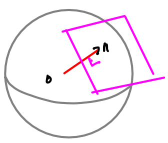
$$\boxed{\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha}$$

Application : on ne peut pas "peigner" la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$

i.e. : on ne peut pas trouver un champ de vecteur tangent à la sphère S^2 qui ne s'annule pas.

Démonstration par l'absurde : Supposons que : $\exists\, v : S^2 \to TS^2$

(champ de vecteur) $(\forall m \in S^2,\ v(m) \in T_m S^2 \simeq \vec{OM}^{\perp})$



$\to$ repère mobile orthonormé partout sur S^2

$$e_1 = \frac{v(M)}{\|v(M)\|}, \quad e_2 = \vec{OM} \times e_1$$

$\to (e_1, e_2) \to (\alpha^1, \alpha^2)$ corepère.

$(\forall m \in S^2,\ (\alpha^1_m, \alpha^2_m) =$ base de $T_m^* S^2$, duale de $(e_1, e_2)(M)$).

$$\omega^a_b = \langle de_b, e_a \rangle \quad \ldots, \quad \boxed{d\omega^1_2 = K\, \alpha^1 \wedge \alpha^2}$$

Sur S^2, $K = 1$ $(B_{ij} = -g_{ij})$, donc $d\omega^1_2 = \alpha^1 \wedge \alpha^2$.

Donc $\quad 4\pi = |S^2| = \int_{S^2} \alpha^1 \wedge \alpha^2 = \int_{S^2} K\, \alpha^1 \wedge \alpha^2 = \int_{S^2} d\omega^1_2$

$$\overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S^2} \omega^1_2 = 0. \qquad \text{Contradiction.}$$

$\partial S^2 = \emptyset \quad !!$

$$|S^2| = \int_{S^2} \alpha^1 \wedge \alpha^2$$

$u : U \to S^2$ paramétrisation

(exemple : $\boxed{u : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{S\} \text{ stéréographique}}$)

$$\alpha^1 = \langle du, e_1 \rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^1}, e_1 \right\rangle dx^1 + \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^2}, e_1 \right\rangle dx^2$$

$$\alpha^2 = \quad = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^1}, e_2 \right\rangle dx^1 + \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^2}, e_2 \right\rangle dx^2$$

$$(u^{-1})^* (\alpha^1 \wedge \alpha^2) = \underbrace{\left(\left\langle \frac{\partial u}{\partial x^1}, e_1 \right\rangle \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^2}, e_2 \right\rangle - \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^2}, e_1 \right\rangle \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^1}, e_2 \right\rangle \right)}_{\Delta} dx^1 \wedge dx^2.$$

$$\int_{S^2} \alpha^1 \wedge \alpha^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (u^{-1})^* (\alpha^1 \wedge \alpha^2) = \int_{\mathbb{R}^2} \Delta \, dx^1 \wedge dx^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{\det g_{ij}} \; dx^1 dx^2$$

$$= \text{aire}\,(u(\mathbb{R}^2))$$

Autre méthode $\quad \Delta = \left\| \frac{\partial u}{\partial x^1} \times \frac{\partial u}{\partial x^2} \right\| \quad$ (calculer ce produit vectoriel dans la base (e_1, e_2) en (x^1, x^2))