Cours - TD sur Mathématiques & Physique

https://webusers.imj-prg.fr/~frederic.helein/

But: Deux points de vue différents sur la physique.

En mathématiques : mécanique du point <=> calcul différentiel
- Applications à valeur dans $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^n$...
- Fonctions de plusieurs variables.

Point important $\boxed{\text{quantités conservées}}$ ⇓

plus tard: électromagnétisme, mécanique quantique
- équations de Hamilton
- crochet de Poisson.
- calcul des variations (?)

Modalités de contrôle :
- ~~examen final en salle~~ en mai (si tout se passe bien) probable.
- partiel avant le 15 avril ?
- des devoirs à faire chez soi, à rendre à distance.

Dans ce cas de figure : $NF = \mathrm{Max}\,(\text{examen}, \text{moyenne}\,(\text{examen}, CC))$

Calcul différentiel (Rappels et nouveautés).

1) Applications $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (le plus souvent le temps) I : intervalle $\subset \mathbb{R}$ (Par exemple $n=3$, alors $\mathbb{R}^3$ = espace).

$n=3$

$f : I \to \mathbb{R}^3$ même chose que $\begin{cases} f_1 : I \to \mathbb{R} \\ f_2 : I \to \mathbb{R} \\ f_3 : I \to \mathbb{R} \end{cases}$

de façon à ce que : $\forall\, t \in I \quad f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$

Deux façons de considérer la continuité :

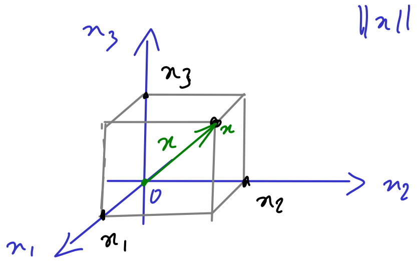
$f : I \to \mathbb{R}^n$ continue (topologie de $\mathbb{R}^n$) $\iff \forall j = 1, \dots, n \quad f^j : I \to \mathbb{R}$ est continue

$f : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable $\iff \forall j,\quad f^j : I \to \mathbb{R}$ est dérivable

Topologie de $\mathbb{R}^n$: norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^n$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_n)^2}$ norme euclidienne.

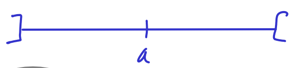


(cas $n=2$: $\|x\|$ = module de $x_1 + i x_2$)

Boule ouverte de centre $a \in \mathbb{R}^n$, de rayon $r > 0$

$$B(a,r) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r \}$$

Exemple $n=1$ $B(a,r) =]a-r, a+r[$



$n=2$ $B(a,r)$: disque

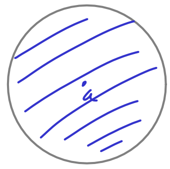


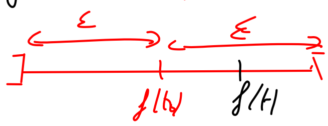
Image à garder en tête :
t = temps $\in I$
$f(t)$ = position d'un point matériel à l'instant t

Définition Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in I$.
On dit que f est continue en t_0 si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in \mathbb{R}, |t - t_0| < \alpha \implies f(t) \in B(\underbrace{f(t_0)}_{\text{position du point matériel à l'instant } t_0.}, \varepsilon)}$$

Cas $n=1$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in \mathbb{R}, |t - t_0| < \alpha \implies f(t) \in]f(t_0) - \varepsilon, f(t_0) + \varepsilon[$$



$$\iff |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$$

Proposition $\underbrace{f \text{ est continue en } t_0}_{f : I \to \mathbb{R}^n} \iff \forall j = 1, \dots, n, \underbrace{f_j \text{ est continue en } t_0}_{f_j : I \to \mathbb{R}}$

Dérivée $f : I \to \mathbb{R}^n$ est dérivable en t_0 si

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \text{ existe} \quad (\text{limite dans } \mathbb{R}^n)$$

peut se définir à l'aide de la notion de boule

Comprendre $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \underbrace{\dfrac{1}{t-t_0}}_{\text{scalaire}} \underbrace{(f(t)-f(t_0))}_{\text{vecteur de } \mathbb{R}^n} \in \mathbb{R}^n$

Si cette limite existe, on la note

$$f'(t_0) = \underbrace{\frac{df}{dt}(t_0)}_{\text{Notation de Leibniz}} = \underbrace{\dot{f}(t_0)}_{\text{Notation de Newton}} = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

Invention de la dérivée ?
- Newton $\sim 1684 \sim 1700$
- Leibniz

Limite : $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = f'(t_0)$:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in \mathbb{R}, t \neq t_0, \quad |t-t_0| < \alpha \Rightarrow \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \in B(f'(t_0), \varepsilon)$

Version "moderne" : XIXème siècle (Cauchy)

<u>Prop.</u>
$$\underbrace{\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}}_{\text{Vitesse instantanée}} = \frac{df}{dt}(t_0) \iff \forall j, \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{f_j(t)-f_j(t_0)}{t-t_0} = \frac{df_j}{dt}(t_0)$$

Vitesse instantanée = dérivée première
accélération = dérivée seconde

Formule de Leibniz

$$\boxed{\frac{d(fg)}{dt} = \frac{df}{dt} g + f \frac{dg}{dt}}$$

Ici $f : I \to \mathbb{R}$

Autres formules utiles
si f ne s'annule pas

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{-f'}{f^2}}.$$

Ça se retrouve à partir de Leibniz.

$$f \frac{1}{f} = 1$$

Leibniz $\Rightarrow$ $\dfrac{df}{dt} \dfrac{1}{f} + f \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{f}\right) = \dfrac{d}{dt}(1)$

$\iff$ $\dfrac{df}{dt} \dfrac{1}{f} + f \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{f}\right) = 0$

$(f \neq 0)$ $\iff$ $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{f}\right) = -\dfrac{1}{f^2} \dfrac{df}{dt}$.

Formule : dérivée d'une fonction composée

$$I \xrightarrow{g} J \xrightarrow{f} K$$
$$x \longmapsto y \longmapsto z$$

$I, J, K \subset \mathbb{R}$ (intervalle)

si $g(I) \subset J$

$$f \circ g(x) = f[g(x)]$$

Truc : assigner une variable différente à I, J et K
$x \quad y \quad z$

$$y = f(x)$$
$$z = g(f(x)) = g(y)$$

Théorème Supposons f et g soient dérivables (g dérivable en x_0, f ——— $y_0 = g(x_0)$)

alors $f \circ g$ est dérivable et

$$\boxed{(f \circ g)' = (f' \circ g)\, g'}$$

"chain rule"

retenir cela

Moyen mnémotechnique : $\dfrac{d(f \circ g)}{dx}(x) = \left(\dfrac{df}{dy} \circ g\right)(x) \; \dfrac{dg}{dx}(x)$

Comment retrouver cette formule ? $\dfrac{d(f \circ g)}{dx} =$

à faire au brouillon

$$\frac{d(f \circ g)}{dx}(x) = \frac{d(f(g(x)))}{dx} = \frac{df(g(x))}{d(g(x))} \; \frac{d(g(x))}{dx}$$

mnémotechnique $\dfrac{A}{C} = \dfrac{A}{\cancel{B}} \dfrac{\cancel{B}}{C}$

$y = g(x)$

$$= \frac{df}{dy}(y) \; \frac{dg}{dx}(x) = \frac{df}{dy}(g(x)) \; \frac{dg}{dx}(x)$$

$$= \left(\frac{df}{dy} \circ g\right)(x) \left(\frac{dg}{dx}(x)\right)$$

En résumé : penser $\boxed{\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \dfrac{dz}{dx}}$

$z = f \circ g(x)$
$y = g(x)$

$$\boxed{\frac{dz}{dx}(x) = \frac{dz}{dy}(y) \; \frac{dz}{dx}(x)}$$

Conséquence : Dérivée d'une bijection réciproque dérivable.

Théorème Si $f : I \longrightarrow J$ ($I, J \subset \mathbb{R}$)

est une bijection dérivable et si $x \in I$ tel que $\dfrac{df}{dx}(x) \neq 0$,

alors $f^{-1} : J \to I$ est dérivable en $y = f(x)$ et

$$I \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} J$$

$x \quad y$

$$\boxed{\frac{d(f^{-1})}{dy}(y) = \frac{1}{\left(\dfrac{df}{dx} \circ f^{-1}\right)(y)}}$$

à retenir

Moyen mnémotechnique $\boxed{x = f^{-1}(y)} \iff y = f(x)$.

$$\frac{d(f^{-1})}{dy}(f(x)) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\frac{df}{dx}(x)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\frac{d(f^{-1})}{dy}(f(x))\,\frac{df}{dx}(x)}_{\frac{d}{dx}\left[(f^{-1}\circ f)(x)\right]} = 1 \qquad \text{chain rule}$$

Or $f^{-1}\circ f(x) = x \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[(f^{-1}\circ f)(x)\right] = \frac{dx}{dx} = 1.$

Sens inverse : on part de $\frac{dx}{dy}\,\frac{dy}{dx} = 1$ $\qquad \left(\frac{A}{B}\,\frac{B}{A} = 1\right)$

ou $\boxed{\frac{dx}{dy}(y)\,\frac{dy}{dx}(x) = 1}$

$y = f(x)$
$x = f^{-1}(y)$

$$\frac{d(f^{-1})}{dy}(f(x))\,\frac{df}{dx}(x) = 1$$

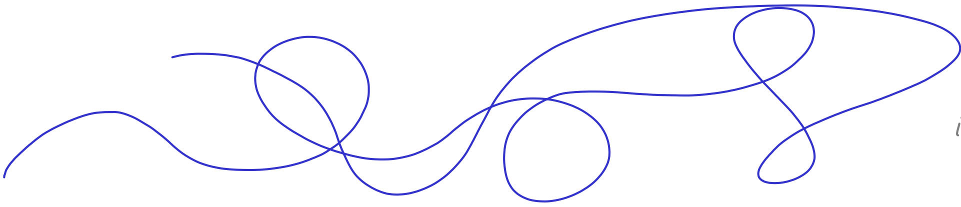
$$\Rightarrow \quad \frac{d(f^{-1})}{dy}(f(x)) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(x)}$$

$$\overset{y=f(x)}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{d(f^{-1})}{dy}(y) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(f^{-1}(y))}$$

Retour aux applications à valeur vectorielle

Distinguer . l'application qui décrit le mouvement (Film) dynamique
et . la trajectoire : la courbe décrite dans l'espace. (courbe dans l'espace).

Illustration

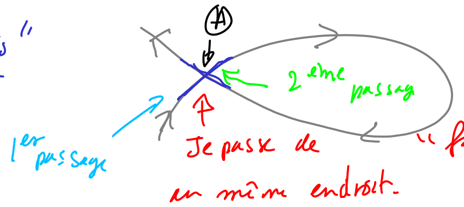


Idée naïve si $f: I \to \mathbb{R}^2$ est $\mathcal{C}^1$ $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} f \text{ est dérivable} \\ \frac{df}{dt} \text{ est continue} \end{cases}$

La courbe (trajectoire) est-elle lisse ? (pas d'angle, de point de rebroussement)

Deux types de "singularités"

(1)



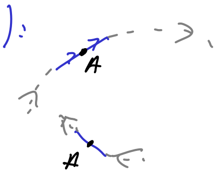
Je passe de "façon lisse" 2 fois au même endroit.

Cette courbe est l'image de $f :]a, b[\to \mathbb{R}^2$.

$a < t_1 < t_2 < b$

t_1 : temps de premier passage en A
t_2 : ——— deuxième ——— A

- Si je restreins f à $]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[$ (qui ne contient pas t_2) :
- Si je restreins f à $]t_2 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon[$ (qui ne contient t_1) :

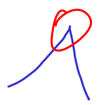


- Ces deux bouts de courbes sont lisses
- La singularité est créée par deux passages en A à 2 instants différents

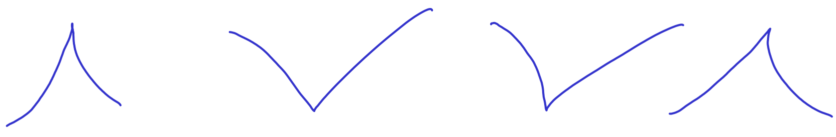
"spaghetti" qui se croise dans l'assiette sans être cassé.

$\to$ f est une immersion, mais pas un plongement

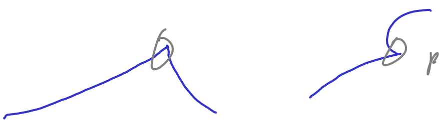
(2) "Spaghetti" cassé



$\to$ f n'est ni une immersion, ni un plongement.



Ces gribouillis sont l'image d'une trajectoire dérivable, mais telle que le vecteur vitesse instantanée s'annule à un instant $\to$ apparition d'un angle



Définitions 1) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$
$f : I \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^1$ (dérivable, $\frac{df}{dt}$ est continue)

On dit que f est une immersion si $\boxed{\forall t \in I, \quad \frac{df}{dt}(t) \neq 0}$

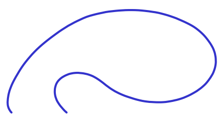
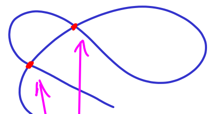
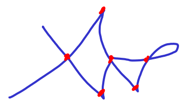
$\to$ la courbe "image dans l'espace" (trajectoire) est "localement lisse"

2) Soit $[a, b]$ un intervalle et $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$.

f est un plongement si f est immersion injective

$\to$ la courbe image est une courbe lisse

En résumé

Plongement $\mathcal{C}^1$	Immersion $\mathcal{C}^1$	Application $\mathcal{C}^1$
$\frac{df}{dt}(t) \neq 0$, $\forall t$ f injective	$\forall t$, $\frac{df}{dt}(t) \neq 0$	
		

singularités