Devoir à faire chez vous : à rendre avant lundi soir.

Lois de Newton. 1) Tout corps qui n'est soumis à une force est soit immobile soit animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme dans un référentiel "galiléen"

$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

temps $\longmapsto$ position dans l'espace dans un repère (orthonormé)

$\gamma(t) = x_0 + t v \qquad x_0, v \in \mathbb{R}^3$ (Galilée)

2) $\boxed{m\ddot{\gamma} = F}$ dans $\mathbb{R}^3$ (en présence d'une force F)

$m\ddot{\gamma} = m \dfrac{d^2\gamma}{dt^2}$, F : force exercée sur le corps.

$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \gamma^3 \end{pmatrix}$ où $\gamma^1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, γ^2, γ^3 aussi deux fois dérivable

ou mieux : $\mathcal{C}^2$: deux fois dérivable et $\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}$ est continue

$F = \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \\ F^3 \end{pmatrix}$ $\qquad F^j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^0$

$t \mapsto F^j(t)$

3) Action - réaction $\qquad$ A $\cdot$ $\qquad$ $\cdot$ B $\qquad$ deux corps ponctuels isolés

$\boxed{F_{A/B} + F_{B/A} = 0}$ dans $\mathbb{R}^3$ (système de 3 relations dans $\mathbb{R}$)

$F_{A/B}$: force exercée par A sur B

$F_{B/A}$: échanger les rôles.

(en particulier ces deux vecteurs sont linéaires)

(force attractive : exemple : force gravitationnelle ou la force électrostatique en charges opposées)

Exemple : attraction gravitationnelle. Pour simplifier deux corps (exemple : terre et soleil) (supposés ponctuel)

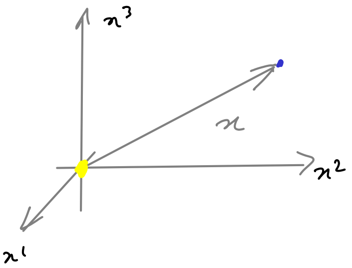
Pour simplifier : le soleil est fixe (approximation)

Position du soleil : Origine d'un système de coordonnées.

$$\boxed{F = F_{\text{soleil}/\text{terre}} = -\frac{GMm}{r^3}\, x}$$

G : constante de gravitation universelle $\qquad r =$ distance (terre-soleil)

M : masse du soleil , m : terre $\qquad x = \overrightarrow{\text{Soleil Terre}}$



$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

$$m\ddot{\gamma} = F = -\frac{GMm}{\|\gamma\|^3}\gamma$$

Produit vectoriel de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$a = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} \qquad a \wedge b = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 b^3 - a^3 b^2 \\ a^3 b^1 - a^1 b^3 \\ a^1 b^2 - a^2 b^1 \end{pmatrix}$$

Propriété : $\langle a \wedge b, a \rangle = \langle a \wedge b, b \rangle = 0$

$a \wedge b \perp a, b$

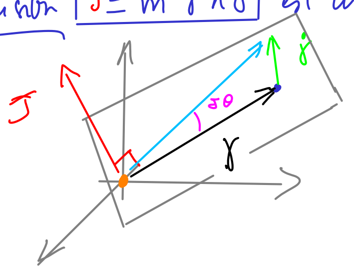
Gravitation universelle

$$m\ddot{\gamma} = -\frac{GMm}{\|\gamma\|^3}\gamma \underset{\gamma\wedge}{\Longrightarrow} \boxed{m\gamma \wedge \ddot{\gamma}} = -\frac{GMm}{\|\gamma\|^3}\gamma \wedge \gamma = 0$$

$$\text{or } \frac{d}{dt}\big(\underbrace{m\gamma \wedge \dot{\gamma}}_{J}\big) = m\frac{d\gamma}{dt} \wedge \dot{\gamma} + m\gamma \wedge \frac{d\dot{\gamma}}{dt} = m\cancel{\dot{\gamma} \wedge \dot{\gamma}} + m\gamma \wedge \ddot{\gamma}$$

$$= \underset{\text{algébrique}}{0} + \underset{\text{vient de la loi de Newton.}}{0} = 0$$

Conclusion $\boxed{J = m\gamma \wedge \dot{\gamma}}$ est une quantité (vectorielle) conservée.



plan parallèle à γ et $\dot{\gamma}$

J : moment cinétique angulaire.

$(J = mr^2\dot{\theta})$ θ : angle, $r^2 = \|\gamma\|^2$

Conséquence : a) J est conservé et $\underbrace{\langle J, \gamma \rangle}_{\text{produit scalaire}} = 0$

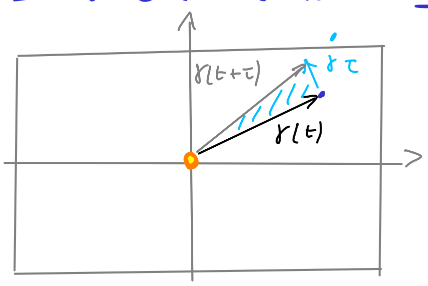
$$\Longrightarrow 0 = \frac{d}{dt}\langle J, \gamma \rangle \underset{\text{Leibniz}}{=} \langle \underbrace{\frac{dJ}{dt}}_{=0}, \gamma \rangle + \underbrace{\langle J, \frac{d\gamma}{dt} \rangle}_{=0} = 0.$$

car $J = m\gamma \wedge \frac{d\gamma}{dt}$

γ est dans le plan $\perp$ à J : reste dans un plan (3D $\to$ 2D)

b) Loi des aires.

plan orthogonal à J :



τ : intervalle de temps très petit.

$\|\gamma \wedge \dot{\gamma}\tau\|$ = aire du parallélogramme = 2 aire du triangle

Aire du triangle hachuré : $\|\gamma \wedge \dot{\gamma}\|\tau$

$\|J\|\tau = \|m\, r\wedge \dot r\|\tau = m \times$ aire balayée pendant la durée τ

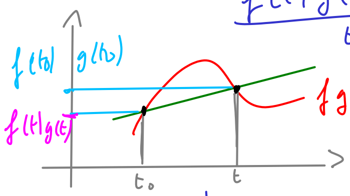
$$\frac{\|J\|}{m} = \frac{\text{aire balayée pendant la durée } \tau}{\tau} = \text{vitesse aréolaire.}$$

Intermède mathématique sur Leibniz :

Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables, $\dfrac{d(fg)}{dt} = \dfrac{df}{dt}\, g + f\, \dfrac{dg}{dt}$.

déclinée à toutes les sauces.

Rappel de l'idée : $\dfrac{d(fg)}{dt}(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{f(t)g(t) - f(t_0)g(t_0)}{t-t_0}$



$$\frac{f(t)g(t) - f(t_0).g(t_0)}{t - t_0} = \frac{f(t)\left(g(t) - g(t_0)\right) + \left(f(t) - f(t_0)\right)g(t_0)}{t - t_0}$$

$$= \underbrace{f(t)\,\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}} + \underbrace{\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\, g(t_0)}$$

$$\left|\frac{f(t)g(t)-f(t_0)g(t_0)}{t-t_0} \underbrace{- f(t_0)g'(t_0)} \underbrace{- f'(t_0)g(t_0)}\right|$$

$$\underset{\text{(triangulaire)}}{\leq} \underbrace{\left| f(t)\,\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0} - f(t_0)\,g'(t_0)\right|}_{f(t)\left(\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0} - g'(t_0)\right) + \left(f(t)-f(t_0)\right) g'(t_0)} + \left|\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} - f'(t_0)\right| |g(t_0)|$$

$$\leq \underbrace{|f(t)|}_{\substack{\text{borné}\\ \text{sur un}\\ \text{voisinage de } t_0}} \underbrace{\left|\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0} - g'(t_0)\right|}_{\to 0} + \underbrace{|f(t)-f(t_0)|}_{\to 0}\,\underbrace{|g'(t_0)|}_{\text{borné}} + \underbrace{\left|\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} - f'(t_0)\right|}_{\to 0}\,\underbrace{|g(t_0)|}_{\text{borné}}$$

...... $< \varepsilon$ si $|t - t_0| < \alpha$ à bien choisir.
car f, g sont dérivables en t_0.

Observation : cette preuve fonctionne à l'identique si on remplace :

- f, g à valeurs réelles $\longrightarrow$ f, g à valeurs vectorielles (ou matricielles)
- $\left((f,g) \mapsto fg\right)$ (produit) $\longrightarrow$ application bilinéaire quelconque, à valeurs dans un espace vectoriel :
  - $\langle a, b\rangle = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$ (produit scalaire)
  - $a \wedge b$ (vectoriel)
  - AB : produit matriciel
- $|f|$ (valeur absolue) $\longrightarrow$ norme $\|a\|$ telle que $\boxed{\|\text{produit de } a \text{ et } b\| \leq C\,\|a\|\,\|b\|}$

Exemple $\dfrac{d}{dt}(a\wedge b) = \dfrac{da}{dt}\wedge b + a \wedge \dfrac{db}{dt}$ (produit vectoriel)

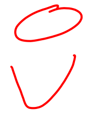
Retour à $m\ddot{\gamma} = -\frac{GMm}{\|\gamma\|^3}\gamma$ Conservation de $J = m\gamma\wedge\dot{\gamma}$

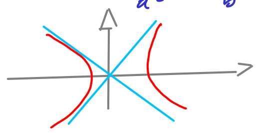
On choisit des coordonnées cartésiennes et orthonormées telle que $J = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J_3 \end{pmatrix}$ = constante

Alors $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}^1 \\ \dot{\gamma}^2 \\ 0 \end{pmatrix}$: mouvement plan

Résolution de ces équations : on va retrouver des trajectoires suivant des coniques planes :

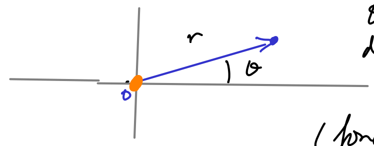
- ellipses : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- paraboles $y = ax^2$
- hyperboles $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$





$$y(t) = \gamma^1(t) + i\gamma^2(t) = r(t)\,e^{i\theta(t)}$$

polaire



θ et r dépendent du temps (fonctions).

$$\dot{y} = \dot{r}e^{i\theta} + ir\dot{\theta}e^{i\theta}$$

$$\ddot{y} = \ddot{r}e^{i\theta} + i\dot{r}\dot{\theta}e^{i\theta} + i\dot{r}\dot{\theta}e^{i\theta} + ir\ddot{\theta}e^{i\theta} - r\dot{\theta}^2e^{i\theta}$$

$$= \left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + i(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\right]e^{i\theta}$$

$$m\ddot{\gamma} = -\frac{GMm}{\|\gamma\|^3}\gamma \iff m\ddot{y} = -\frac{GMm}{\|y\|^3}y$$

$$\iff m\left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + i(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\right]\cancel{e^{i\theta}} = -\frac{GMm}{r^3}r\cancel{e^{i\theta}}$$

$$\iff \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + i(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = -\frac{GM}{r^2} \quad \text{(dans } \mathbb{C}\text{)}$$

$$\iff \boxed{\begin{array}{ll} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{GM}{r^2} = 0 & (a) \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 & (b) \end{array}}$$

(a) ← But : réécrire cette équation

(b) $\xRightarrow{\times(r)}$ $0 = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{J_3}{m}\right)$

Vitesse aréolaire constante $\boxed{J_3 = mr^2\dot{\theta}}$ (b') constant $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

$$\boxed{J_3\,dt = mr^2\,d\theta}$$

a) Se débarasser de $\dot{\theta}$ dans (a) : $\dot{\theta} = \frac{J_3}{mr^2} \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{J_3^2}{m^2r^4}$

$$\ddot{r} - r\left(\frac{J_3^2}{m^2r^4}\right) + \frac{GM}{r^2} = 0$$

$$\iff \boxed{\ddot{r} - \frac{J_3^2}{m^2}\frac{1}{r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0} \quad (a')$$

équation différentielle en r.

b) $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{J_3}{mr^2} = \frac{J_3}{m}\frac{\frac{dr}{d\theta}}{r^2} = \frac{J_3}{m}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{-1}{r}\right)$

Notation $\boxed{u = \frac{J_3}{mr}}$ Alors $\dot{r} = -\frac{du}{d\theta}$

$\iff \boxed{r = \frac{J_3}{mu}}$

$$\ddot r = \frac{d\dot r}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot r) = \frac{d(\dot r)}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{du}{d\theta}\right)\frac{J_3}{mr^2}$$

$$= -\frac{d^2u}{d\theta^2}\,\frac{J_3}{m\left(\frac{J_3}{mu}\right)^2} = -\frac{d^2u}{d\theta^2}\,\frac{m}{J_3}\,u^2 = -\frac{m}{J_3}\,u^2\,\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$\boxed{\ddot r = -\frac{m}{J_3}\,u^2\,\frac{d^2u}{d\theta^2}}$$

c) Retour à (a') : $\ddot r - \frac{J_3^2}{m^2}\frac{1}{r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0$

$$-\frac{m}{J_3}\,u^2\,\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{J_3^2}{m^2}\,\frac{1}{\left(\frac{J_3}{mu}\right)^3} + \frac{GM}{\left(\frac{J_3}{mu}\right)^2} = 0$$

$$-\frac{m}{J_3}\,u^2\,\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{m}{J_3}\,u^3 + \frac{GMm^2}{J_3^2}\,u^2 = 0$$

Je peux simplifier par $\left(\frac{m}{J_3}u^2\right)$:

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm}{J_3} \leftarrow \text{constante.}}$$

équation que l'on bien résoudre

Equation linéaire homogène associée : $\frac{d^2v}{d\theta^2} + v = 0$: solutions : $v = a\cos(\theta-\varphi)$

a, φ : constante d'intégration.

Solution particulière $u_0 = \frac{GMm}{J_3} \Rightarrow \frac{d^2u_0}{d\theta^2} + u_0 = \frac{GMm}{J_3}$

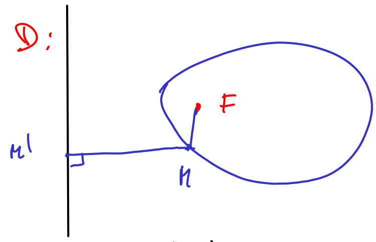
Solution générale $u = u_0 + v = \frac{GMm}{J_3} + a\cos(\theta-\varphi)$

$u = \frac{J_3}{mr} \Leftrightarrow r = \frac{J_3}{mu}$

$$r = \frac{J_3}{\frac{GMm^2}{J_3} + am\cos(\theta-\varphi)} = \boxed{\frac{p}{1+e\cos\theta}}$$

p, e : constante

Equation (en coordonnée polaire) d'une conique:



M tel que $d(M,D) = \|\overrightarrow{MM'}\|$
$= e\,\|\overrightarrow{MF}\|$.

e : excentricité de la conique

- $e<1$: ellipse
- $e=1$: parabole
- $e>1$: branche d'hyperbole.

(Calcul réalisé par Newton)

Sur le devoir $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix}\gamma^1(t)\\ \gamma^2(t)\end{pmatrix}$: position de γ à l'instant t

Exemple $\underbrace{\gamma^1(t) = t,\ \gamma^2(t) = 2t.}$

$\Rightarrow \gamma^2(t) = 2\gamma^1(t)$

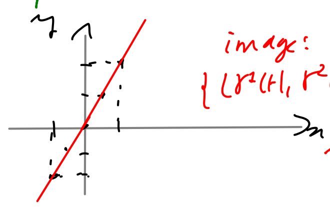


image: $\{(\gamma^1(t), \gamma^2(t))\ ;\ t\in\mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$
droite
$y = 2x$