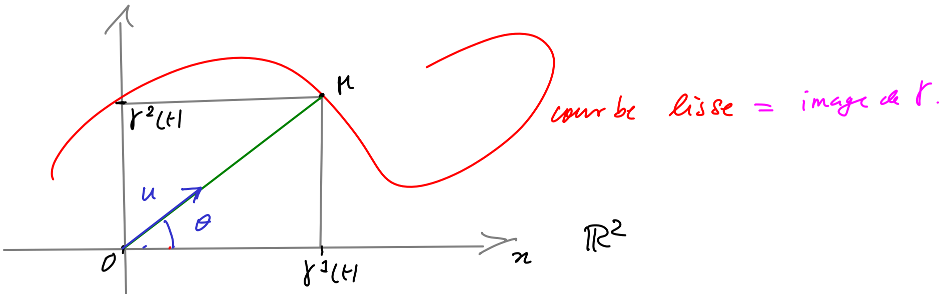
A propos du devoir pour le 9 mars : 1er exercice, dernière question

Comprendre qu'on demande de tracer une courbe décrite en polaire.

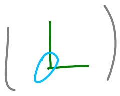
Courbe dans le plan



Plusieurs façons de la décrire : 1) cartésienne $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$I \subset \mathbb{R}$ $\qquad t \longmapsto \gamma(t) = (\gamma^1(t), \gamma^2(t))$

Si γ est $\mathcal{C}^1$ et que $\frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma}$ ne s'annule jamais, la courbe est lisse.



2) coordonnées polaires $\quad r : [0, 2\pi] \longrightarrow]0, +\infty[$ (voire $\mathbb{R}$)

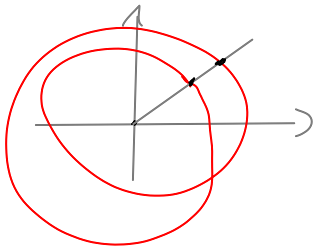
$\theta \longmapsto r(\theta)$

θ = angle $(Ox, \overrightarrow{OM})$ où $M \in \mathcal{C}$

$r(\theta)$ = longueur de $\overrightarrow{OM}$: $\|\overrightarrow{OM}\|$

(ou longueur algébrique :
$\overrightarrow{OM} = r(\theta)\, \vec{u}(\theta)$ où $\vec{u}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$)

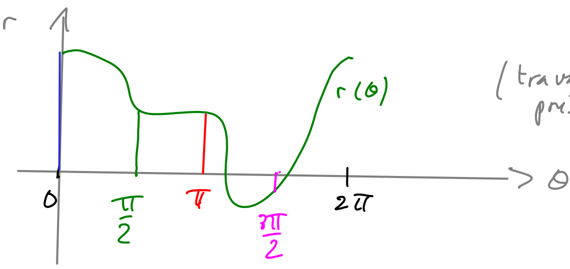
- Utile pour un problème avec une symétrie de rotation par rapport à l'origine
- peu utilisable dans le cas suivant :



Variantes : $\quad r : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$

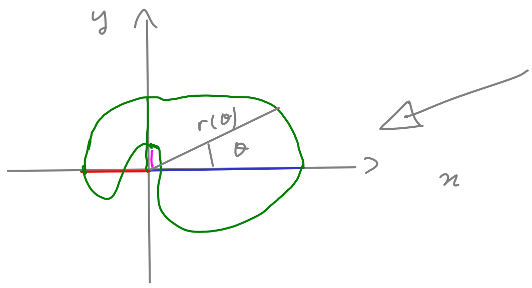
$r : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$

$r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (périodique)



(travail préliminaire)

Dans le DM première question



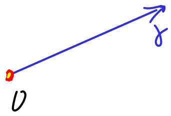
Remarque : généralise le fait dans $\mathbb{C}$,
si $z \neq 0$ $\quad z = x + iy = |z| e^{i \arg z} = r e^{i\theta}$.
$r = |z|$. $\quad \theta = \arg z \in \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$

Retour à la conservation de l'énergie. $\quad \gamma \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$

$$(N) \quad \boxed{m \frac{d^2\gamma}{dt^2} = - \frac{GMm}{\|\gamma\|^3} \gamma} \quad \to \quad E(t) = E_c(t) + E_p(t)$$

$$= \frac{m}{2} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 - \frac{GMm}{\|\gamma(t)\|}$$

est conservée



Il y aura d'autres quantités conservées : $J = m \gamma \wedge \dot{\gamma}$ (moment cinétique)
quantité de mouvement.

Revisiter $\quad \frac{d E(t)}{dt} = 0 \quad \Leftarrow (N)$

Fonction "énergie potentielle"

- $\boxed{V : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto - \frac{GMm}{\|x\|}}$ $\qquad \|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$

$\forall \gamma \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, $\quad V \circ \gamma = E_p$

$(V \circ \gamma)(t) = - \frac{GMm}{\|\gamma(t)\|}$.

- $\boxed{W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \frac{m}{2} \|v\|^2}$ $\qquad W \circ \dot{\gamma} = W \circ \frac{d\gamma}{dt} = E_c$

$\|v\| = \sqrt{(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2}$:

$E(t) = (V \circ \gamma)(t) + \left(W \circ \frac{d\gamma}{dt}\right)(t)$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) & \longmapsto & V \circ \gamma + W \circ \dot{\gamma} \end{array}$$

E

On s'intéresse à V et W.

Fonctions de plusieurs variables $\quad n \in \mathbb{N}^*$

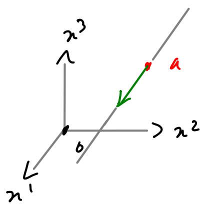
U : un ouvert $\subset \mathbb{R}^n$

Soit $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur U

[Rappel : F continue en $a \in U$ si
$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in U, \quad \|x-a\| < r \implies |F(x) - F(a)| < \varepsilon$]

Déf. Pour $j \in \{1, \dots, n\}$ et $a \in U$, on dit que F admet une dérivée partielle en a par rapport à x^j si

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{F(a^1, a^2, \dots, a^j + h, \dots, a^n) - F(a^1, a^2, \dots, a^j, \dots, a^n)}{h} \text{ existe}$$



Si cette limite existe, on la note

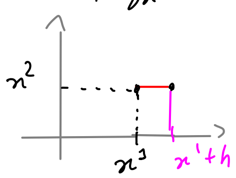
$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x^j}(a^1, \dots, a^n) = \frac{\partial F}{\partial x^j}(a)}$$

Calcul en pratique :
- On gèle toutes les coordonnées x^i sauf x^j.
- On dérive par rapport à x^j

Exemple $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$x = (x^1, x^2) \longmapsto (x^1)^2 \cos x^2$

a) $\frac{\partial f}{\partial x^1}(x)$?

$$\frac{f(x^1 + h, x^2) - f(x^1, x^2)}{h} = \frac{(x^1+h)^2 \cos x^2 - (x^1)^2 \cos x^2}{h}$$

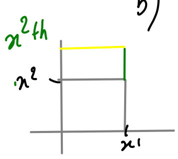


$$= \frac{\cancel{(x^1)^2} + 2x^1 h + h^2 - \cancel{(x^1)^2}}{h} \cos x^2$$

$$= (2x^1 + h) \cos x^2 \quad : \text{tend vers } 2x^1 \cos x^2 \text{ si } h \to 0.$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x^1}(x)$ existe et $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x^1} = 2x^1 \cos x^2}$

b) $\frac{\partial f}{\partial x^2}(x)$?



$$\frac{f(x^1, x^2+h) - f(x^1, x^2)}{h} = \frac{(x^1)^2 \cos(x^2+h) - (x^1)^2 \cos x^2}{h}$$

$$= (x^1)^2 \frac{\cos(x^2+h) - \cos x^2}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} (x^1)^2 (-\sin x^2)$$

Donc $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x^2}(x) = -(x^1)^2 \sin x^2}$

Exemple $V : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{\|x\|} := \frac{1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}}$$

$\frac{\partial V}{\partial x^1}$? - Je gèle x^2, x^3 $\ell = \sqrt{(x^2)^2 + (x^3)^2}$ est fixé.

$$\Rightarrow V(x^1, x^2, x^3) = \frac{1}{\sqrt{(x^1)^2 + \ell^2}} = f(x^1) \text{ où}$$

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+\ell^2}} = (s^2+\ell^2)^{-\frac{1}{2}} = (g \circ h)(s)$$

$h(s) = s^2 + \ell^2$
$g(t) = t^{-1/2}$

$g'(t) = -\frac{1}{2} t^{-3/2}$

détour pédagogique.

$$\begin{aligned} f'(s) &= (g \circ h)'(s) \\ &= (g' \circ h)(s) \quad h'(s) \\ &= -\frac{1}{2}(h(s))^{-3/2} \quad 2s \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{s^2+\ell^2}^{\,3}} \quad 2s = \frac{-s}{\sqrt{s^2+\ell^2}^{\,3}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x^1}(x^1, x^2, x^3) = f'(x^1) = \frac{-x^1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}^{\,3}} = \frac{-x^1}{\|x\|^3}$$

On pratique, on fait ce raisonnement dans sa tête. On raisonne comme suit :

$$\frac{\partial V}{\partial x^2}(x) = \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\underset{\text{gelé}}{(x^1)^2} + (x^2)^2 + \underset{\text{gelé}}{(x^3)^2}}}\right) = \underbrace{-\frac{1}{2}\left((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\right)^{-\frac{3}{2}}}_{g'((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)}$$

$$\times \frac{\partial}{\partial x^2}\left[\underset{\text{gelé}}{(x^1)^2} + (x^2)^2 + \underset{\text{gelé}}{(x^3)^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}^{\,3}} \, 2x^2$$

Donc $\boxed{\frac{\partial V}{\partial x^2}(x) = \frac{-x^2}{\|x\|^3}}$ De même $\frac{\partial V}{\partial x^3}(x) = \frac{-x^3}{\|x\|^3}$

(!) Changement de notation

Observation Si $V : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto -\frac{GMm}{\|x\|}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x^1} = \frac{GMm\, x^1}{\|x\|^3}, \quad \frac{\partial V}{\partial x^2} = \frac{GMm\, x^2}{\|x\|^3}, \quad \frac{\partial V}{\partial x^3} = \frac{GMm\, x^3}{\|x\|^3}$$

$$\boxed{F(x) = -\frac{GMm}{\|x\|} x = \left(-\frac{\partial V}{\partial x^1}, -\frac{\partial V}{\partial x^2}, -\frac{\partial V}{\partial x^3}\right)}$$

"F dérive du potentiel V".

$$\left[V : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\right] \longrightarrow \left[\underset{\substack{\shortparallel \\ (F^1, F^2, F^3)}}{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3\right]$$

$$W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto \frac{m}{2}\|v\|^2 = \frac{m}{2}\left((v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2\right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial v^1} = \frac{m}{2} 2v^1 = mv^1$$

$$\frac{\partial W}{\partial v^2} = m v^2 \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial v^3} = mv^3 \Rightarrow \left(\frac{\partial W}{\partial x^1}, \frac{\partial W}{\partial x^2}, \frac{\partial W}{\partial x^3}\right) = mv$$

= vecteur "quantité de mouvement"

Définition Soit $F : U \to \mathbb{R}$. Continue.

a) On dit que F est $\boxed{\mathcal{C}^1 \text{ sur } U}$ si F admet des dérivées partielles en tout point et si, pour $j = 1, \dots, n$, les fonctions dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x^j} : U \to \mathbb{R}$ sont continues.

b) Alors l'application : $\nabla F = \text{grad}\, F : U \to \mathbb{R}^n$
"nabla F"
$$x \mapsto \left(\frac{\partial F}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x^n}(x)\right)$$

est appelée gradient de F

Si $\left| \begin{array}{l} V(x) = -\dfrac{GMm}{\|x\|} \\ W(v) = \dfrac{m}{2}\|v\|^2 \end{array} \right.$, $\nabla V = \dfrac{GMm\, x}{\|x\|^3}$

, $\nabla W = m v$

Si $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ (décrit le mouvement d'un point dans l'espace soumis la force gravitationnelle d'un corps à l'origine)

$$E_c(t) = \left(W \circ \frac{d\gamma}{dt}\right)(t) \quad ; \quad E_p(t) = (V \circ \gamma)(t)$$

Force $\quad -\dfrac{GMm}{\|\gamma(t)\|^3}\gamma(t) = -(\nabla V) \circ \gamma(t)$

$$\left((\nabla W) \circ \frac{d\gamma}{dt}\right)(t) = m\frac{d\gamma}{dt} = \text{vecteur quantité de mouvement.}$$

Newton $\quad \underset{\substack{\shortparallel \\ \frac{d}{dt}\left(m\frac{d\gamma}{dt}\right)}}{m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}} = -F(t) = -(\nabla V)(\gamma(t))$

Donc

Newton
$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[(\nabla W)\left(\frac{d\gamma}{dt}(t)\right)\right] = -(\nabla V)(\gamma(t))}$$

de chaque : fonctions composées

Conservation de l'énergie
$$E(t) = \underbrace{W\left(\frac{d\gamma}{dt}(t)\right)}_{\frac{1}{2}m\|\dot\gamma(t)\|^2} + \underbrace{V(\gamma(t))}_{-\frac{GMm}{\|\gamma(t)\|}}$$

- $\nabla V(\gamma(t)) = [(\nabla V)\circ\gamma](t)$.
- $V(\gamma(t)) = (V\circ\gamma)(t)$.

lien ?

Théorème
$$\boxed{\frac{d}{dt}[(V\circ\gamma)(t)] = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x^j}\circ\gamma\right)(t)\frac{d\gamma^j}{dt}(t).} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x^j}(\gamma(t))\frac{d\gamma^j}{dt}(t)$$

où
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\supset I \arrow[r, "\gamma"] & U\ (\subset\mathbb{R}^n) \arrow[r, "V"] & \mathbb{R} \\
t \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "V\circ\gamma"'] & \gamma(t) \arrow[r, mapsto] & V(\gamma(t))
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Cas } n=1}$
$$\frac{d}{dt}[(V\circ\gamma)(t)] = \left(\frac{dV}{dx}\circ\gamma\right)(t)\,\frac{d\gamma}{dt}(t)$$

Dérivation d'une fonction composée.

$$\boxed{(f\circ g)' = (f'\circ g)\,g'}$$

Différentes traductions

a) Matricielle
$$\frac{d(V\circ\gamma)}{dt}(t) = \left(\frac{\partial V}{\partial x^1}(\gamma(t))\ \cdots,\ \frac{\partial V}{\partial x^n}(\gamma(t))\right)\begin{pmatrix}\frac{d\gamma^1}{dt}(t)\\ \vdots \\ \frac{d\gamma^n}{dt}(t)\end{pmatrix}$$

b) gradient
$$\nabla V(x) = \begin{pmatrix}\frac{\partial V}{\partial x^1}(x)\\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x^n}(x)\end{pmatrix}$$

$$\frac{d(V\circ\gamma)}{dt}(t) = \left\langle(\nabla V)(\gamma(t)),\ \frac{d\gamma}{dt}(t)\right\rangle$$
(produit scalaire euclidien)

c) en coordonnées
$$\frac{d(V\circ\gamma)}{dt}(t) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x^j}(\gamma(t))\,\frac{d\gamma^j}{dt}(t).$$

Application $V(x) = -\frac{GMm}{\|x\|}$, $W(v) = \frac{m}{2}\|v\|^2$ $\qquad \nabla W = mv$.

(i)
$$\frac{d}{dt}(V\circ\gamma)(t) = \left\langle\underbrace{(\nabla V)(\gamma(t))}_{},\ \frac{d\gamma}{dt}(t)\right\rangle = \langle\underbrace{-F(t)}_{F=-\nabla V},\dot\gamma\rangle = \langle\underbrace{-m\ddot\gamma(t)}_{\text{Newton}},\dot\gamma\rangle$$

(ii) $\frac{d}{dt}(W\circ\dot\gamma)(t) = \left\langle \nabla W(\dot\gamma(t)), \frac{d\dot\gamma}{dt}(t)\right\rangle = \left\langle \nabla W(\dot\gamma(t)), \frac{d^2\gamma}{dt^2}(t)\right\rangle$

$= \langle m\dot\gamma, \ddot\gamma(t)\rangle$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[(V\circ\gamma)(t) + (W\circ\dot\gamma)(t)\right] = \langle -m\ddot\gamma, \dot\gamma\rangle + \langle m\dot\gamma, \ddot\gamma\rangle = 0$

Point important : la force $-\frac{GMm}{\|x\|^3}x$ dérive de $V(x) = \frac{-GMm}{\|x\|}$

---

d) Encore une façon de comprendre $\frac{d(V\circ\gamma)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x^j}(\gamma)\frac{d\gamma^j}{dt}$.

$\Updownarrow$

$\boxed{d(V\circ\gamma)_t = dV_{\gamma(t)}\circ d\gamma_t}$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

$$I \xrightarrow{\gamma} U \xrightarrow{V} \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^n \ni \dot\gamma(t) \simeq$ $\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{d\gamma_t} & \mathbb{R}^n \\ s & \longmapsto & \dot\gamma(t)s \end{array}}$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ s & \longmapsto & \dot\gamma(t)s & \longmapsto & dV_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))s \end{array}$$

$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{dV_x} & \mathbb{R} \\ (\xi^1,\dots,\xi^n)=\xi & \longmapsto & \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x^j}(x)\,\xi^j \end{array}}$ $\simeq \nabla V(x) \in \mathbb{R}^n$

Compliqué mais bon point pour une généralisation:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m & \mathbb{R}^n & \mathbb{R}^p \\ V_1 \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "G"'] \arrow[rr, bend right, "F\circ G"'] & V_2 \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "F"'] & V_3 \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

$\boxed{d(F\circ G)_x = dF_{G(x)}\circ dG_x}$

$\to$ on verra sous forme matricielle

$$dF \simeq \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}$$