Devoir qui était à rendre le 9 mars :

- si vous avez déposé sur moodle : très bien.
- sinon : déposez sur moodle ou rendre mardi prochain.

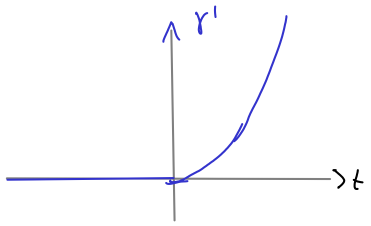
Il y aura un autre devoir pour le mardi 23 mars

A propos du premier devoir :

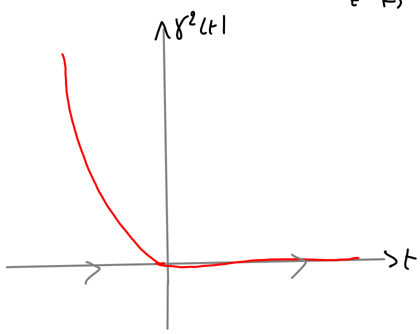
<u>Exercice 1</u> $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \gamma^2(t))$

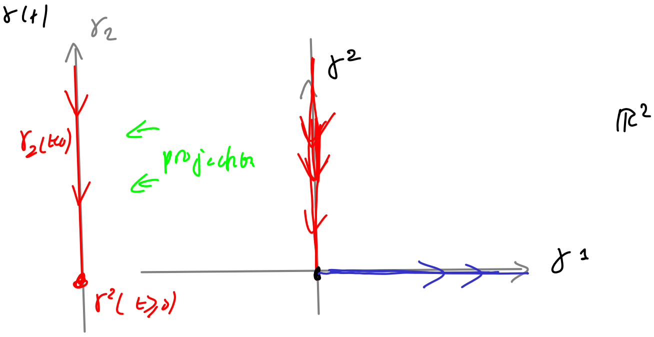
$$\begin{cases} \gamma^1(t) = 0 \text{ si } t \leq 0, & t^2 \text{ si } t > 0 \\ \gamma^2(t) = t^2 \text{ si } t < 0, & 0 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

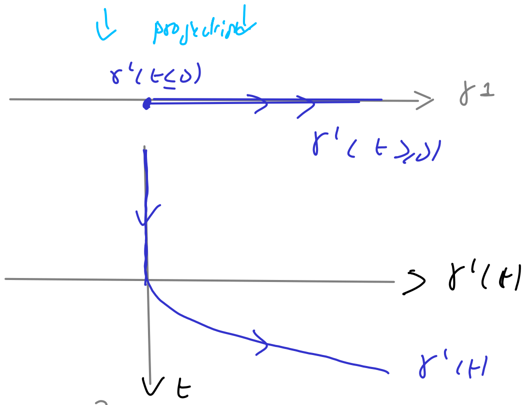
- γ $\mathcal{C}^1$: (OK) $\iff$ γ^1 est $\mathcal{C}^1$ et γ^2 est $\mathcal{C}^1$.
- tracer les graphes de γ^1 et γ^2 (OK)



- Image de $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.
  $t \mapsto \gamma(t)$

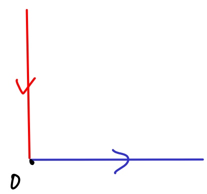






(rotation $\frac{\pi}{2}$)

Conclusion : images

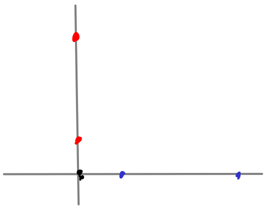


Que faire pour des $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ plus compliqué ?

– Etudier séparément chaque composante.

– si vous êtes perdus : $\gamma(0) = (0,0)$, $\gamma(-1) = (0,1)$ $\gamma(1) = (1,0)$

$\gamma(-2) = (0,4)$ $\gamma(2) = (4,0)$



Exercice 2 : être précis sur les composantes.

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \qquad \gamma \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma^1(t) \\ \gamma^2(t) \\ \gamma^3(t) \end{pmatrix} \longrightarrow 3 \text{ fonctions}$$

J'ai souvent trouvé des formules avec g $(\in \mathbb{R})$ et des vecteurs $(\in \mathbb{R}^3)$ sur la même ligne.

(1) $$m\ddot{\gamma} = F \iff \begin{pmatrix} m\ddot{\gamma}^1 \\ m\ddot{\gamma}^2 \\ m\ddot{\gamma}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \iff \begin{cases} m\ddot{\gamma}^1 = 0 \\ m\ddot{\gamma}^2 = 0 \\ m\ddot{\gamma}^3 = -mg \end{cases}$$

(2) $$\gamma(0) = x_0 \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow x_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_0^3 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\gamma}(0) = v_0 \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow v_0 = \begin{pmatrix} v_0^1 \\ v_0^2 \\ v_0^3 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$. $m\ddot{\gamma}^1 = 0$ avec $\gamma^1(0) = x_0^1$, $\dot{\gamma}^1(0) = v_0^2$

$\implies \dot{\gamma}^1 = v_0^1 \implies \gamma^1(t) = x_0^1 + t v_0^1$

. Même chose avec γ^2.

. $m\ddot{\gamma}^3 = -mg$ (+ conditions initiales) $\implies \dot{\gamma}^3(t) = v_0^3 - gt$

$\implies \gamma^3(t) = x_0^1 + t v_0^3 - g\frac{t^2}{2}$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_0^1 + v_0^1 t \\ x_0^2 + v_0^2 t \\ x_0^3 + v_0^3 t - g\frac{t^2}{2} \end{pmatrix} = x_0 + t v_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g\, t^2/2 \end{pmatrix}$$

Jeter un caillou : v_0

$$\boxed{\underbrace{x_0 + t v_0}_{\mathbb{R}^3 \,\leftarrow\, \text{vecteurs}} - \underbrace{g\, t^2/2}_{\mathbb{R} \,\leftarrow\, \text{composante}}} \longleftarrow \text{Pas bon.}$$

Impeccable [Autre présentation des calculs : $\ddot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \implies \dot{\gamma}(t) = v_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -gt \end{pmatrix}$

$\implies \gamma(t) = x_0 + t v_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g\, t^2/2 \end{pmatrix}$

Prochain devoir : (2 exos) principe d'action et réaction (3ème loi de Newton)

2 corps

$\cdot A$ $\qquad$ $\cdot B$

$F_{A/B}$: force exercée par A sur B

$F_{B/A}$: ——— B sur A

$$\boxed{F_{A/B} + F_{B/A} = 0}$$ à utiliser.

$$\begin{cases} m_A \ddot{\gamma}_A = - \dfrac{G\, m_A m_B}{\|\gamma_A - \gamma_B\|^3} (\gamma_A - \gamma_B) \\ m_B \ddot{\gamma}_B = - \dfrac{G\, m_A m_B}{\|\gamma_A - \gamma_B\|^3} (\gamma_B - \gamma_A) \end{cases} \longrightarrow \underbrace{m \ddot{\gamma} = - \frac{G M m}{\|\gamma\|^3} \gamma}_{\text{plus simple}}$$

Retour au cours Fonctions de plusieurs variables. $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert

$f : U \to \mathbb{R}$

Déf. dérivée partielle de f en x suivant x^i (si ça existe)

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x^1, \dots, x^{i-1}, x^i + h, x^{i+1}, \dots, x^n) - f(x^1, \dots, x^n)}{h}$$

Proposition Si $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \underset{\mathbb{R}^n}{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

Si f admet des dérivées partielles en $\gamma(t)$ et γ est dérivable en t.

$$\boxed{\frac{d\,(f \circ \gamma)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\gamma(t)) \frac{d\gamma^i}{dt}(t)}$$

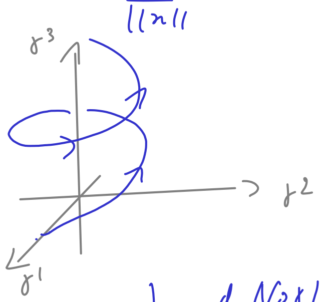
$(f \circ \gamma)(t) = f(\underbrace{\gamma(t)}_{\in \mathbb{R}^n})$ $\quad t \in I \subset \mathbb{R}$

Exemple $\cdot\ V : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $\qquad C = -GMm$

$$x \longmapsto \frac{-G M m}{\|x\|} = \frac{C}{\|x\|}$$

$$\cdot\ \boxed{\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}}$$

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$



$$\cdot\ V \circ \gamma = \frac{C}{\sqrt{(\gamma^1)^2 + (\gamma^2)^2 + (\gamma^3)^2}}$$

$$= \frac{C}{\sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2 + t^2}} = \frac{C}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\,(V \circ \gamma)}{dt}(t) = -\frac{C}{2} \cdot 2t\,(1+t^2)^{-3/2}$$

$$= - \frac{C t}{\sqrt{1+t^2}^{\,3}}$$

• $\boxed{\dfrac{d\gamma}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}}$

$$V = \frac{C}{\|x\|} = \frac{C}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}}$$

(gradient) $\nabla V(x)$: $\boxed{\dfrac{\partial V}{\partial x^i} = \dfrac{-C x^1}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}^{\,3}} = -\dfrac{C x^1}{\|x\|^3}}$ dans $\mathbb{R}$ (entre scalaires)

...

$\boxed{\nabla V(x) = -\dfrac{Cx}{\|x\|^3}}$ dans $\mathbb{R}^3$ (vectoriel).

$$\frac{d(V\circ\gamma)}{dt}(t) = \boxed{\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x^i}(\gamma(t)) \frac{d\gamma^i}{dt}} = \sum_{i=1}^{3} -\frac{C\gamma^i}{\|\gamma\|^3} \frac{d\gamma^i}{dt}$$

$$= \frac{-C}{\|\gamma\|^3}\Big(\underbrace{\cos t(-\sin t) + \sin t(\cos t)}_{0} + t\times 1\Big)$$

$$= \frac{-C}{\sqrt{1+t^2}^{\,3}}\, t = \boxed{-\frac{Ct}{\sqrt{1+t^2}^{\,3}}}$$

Variante $\dfrac{d(V\circ\gamma)}{dt}(t) = \boxed{\langle \nabla V(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle}$

Vu : Si γ est solution de $\boxed{m\ddot\gamma = -\dfrac{GMm}{\|\gamma\|^3}\gamma}$ (Newton)

$$V : \mathbb{R}^3\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto -\frac{GMm}{\|x\|}$$ fonction "énergie potentielle"

$$W : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v \longmapsto \frac{1}{2}m\|v\|^2$$ fonction "énergie cinétique".

Si $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $V\circ\gamma = E_p(t)$: énergie potentielle (fonction associée à la trajectoire γ)

$W\circ\dot\gamma = E_c(t)$: énergie cinétique.

énergie totale associée à γ $\boxed{E(t) = V\circ\gamma(t) + W\circ\dot\gamma(t)}$

Thm Newton $\Longrightarrow \dfrac{dE}{dt} = 0$

Vers les équations de Hamilton

$\gamma : I \to \mathbb{R}^3 \longrightarrow I \to \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$

$(\gamma(t), m\dot\gamma(t))$ (position & moment cinétique) ou impulsion

$$E_c(t) = \frac{1}{2} m \|\dot\gamma\|^2 = \frac{\|m\dot\gamma\|^2}{2m} \qquad \left(\frac{\|\text{impulsion}\|^2}{2m} \right).$$

$$H : \underbrace{(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})}_{\text{espace de configuration}} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{(Hamiltonien)}$$

$$(x \;,\; p) \longmapsto V(\gamma(t)) + \frac{\|p\|^2}{2m}$$

x : point dans l'espace des positions

p : point dans l'espace de configuration des impulsions

Lemme $m\ddot\gamma = F = -\nabla V(\gamma) \iff \boxed{\begin{cases} \dfrac{d\gamma^i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}(\gamma, m\dot\gamma) \\ \dfrac{d(m\dot\gamma^i)}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x^i}(\gamma, m\dot\gamma) \end{cases}}$

Si je note $\pi : I \to \mathbb{R}^3$ $\quad \pi = m\dot\gamma$

$\pi_i = m \dfrac{d\gamma^i}{dt}$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\gamma^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(\gamma, \pi) \\ \frac{d\pi_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x^i}(\gamma, \pi) \end{aligned}}$$

$\frac{d}{dt}(\gamma, \pi)$ sorte de gradient de H en (γ, π)

On le note :
$$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \gamma \\ \pi \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}^6} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0_3 & 1_3 \\ -1_3 & 0_3 \end{pmatrix}}_{M(6,\mathbb{R})} \underbrace{\nabla H(\gamma, \pi)}_{\mathbb{R}^6}$$

$$0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 1_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifions $H(x, p) = V(x) + \dfrac{\|p\|^2}{2m} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \dfrac{\partial}{\partial p_i}\left(\dfrac{\|p\|^2}{2m}\right) = \dfrac{2p_i}{2m} = \dfrac{p_i}{m} \\ \dfrac{\partial H}{\partial x^i} = \dfrac{\partial}{\partial x^i}(V(x)) = \dfrac{\partial V}{\partial x^i}(x) \end{cases}$

$(\gamma, \pi)(t) = (\gamma(t), m\dot\gamma(t))$.

$$\begin{cases} \dfrac{d\gamma^i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}(\gamma, \pi) = \dfrac{\pi_i}{m} \\ \dfrac{d\pi_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x^i}(\gamma, \pi) = -\dfrac{\partial V}{\partial x^i} \end{cases} \iff \begin{cases} \pi_i = m\dfrac{d\gamma^i}{dt} \\ \dfrac{d}{dt}\left(m\dfrac{d\gamma^i}{dt}\right) = -\dfrac{\partial V}{\partial x^i} \circ \gamma \iff \boxed{m\dfrac{d^2\gamma^i}{dt^2} = -\dfrac{\partial V}{\partial x^i}(\gamma)} \end{cases}$$

Définition Equations de Hamilton : $H \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{position}}}{(x}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{impulsion}}}{p)}$$

On cherche $(\gamma, \pi) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ solution de :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\gamma^i}{dt}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(\gamma(t), \pi(t)) \\ \frac{d\pi_i}{dt}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x^i}(\gamma(t), \pi(t)) \end{aligned}}$$

On peut généraliser avec

$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\gamma : I \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Exemple : pour N particules dans $\mathbb{R}^3$

$$H : \underbrace{(\mathbb{R}^3)^N}_{\substack{N \text{ positions} \\ \text{dans l'espace}}} \times \underbrace{(\mathbb{R}^3)^N}_{\substack{N \text{ positions} \\ \text{dans l'espace des impulsions}}} \to \mathbb{R}$$

Première conséquence : Conservation de l'énergie.

Energie = valeur de l'hamiltonien.

Supposons que $(\gamma, \pi) : \underset{\mathbb{R}}{\overset{}{I}} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ soit solution de : $\begin{cases} \frac{d\gamma^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\gamma, \pi) \\ \frac{d\pi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}(\gamma, \pi) \end{cases}$

($I \subset \mathbb{R}$)

$h = H \circ (\gamma, \pi)$

$h(t) = H(\gamma(t), \pi(t))$ $\qquad I \xrightarrow{(\gamma, \pi)} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{H} \mathbb{R}$

$$\frac{dh}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x^i}(\gamma(t), \pi(t)) \frac{d\gamma^i}{dt}(t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i}(\gamma(t), \pi(t)) \frac{d\pi_i}{dt}(t)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x^i}(\gamma, \pi) \frac{\partial H}{\partial p_i}(\gamma, \pi) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i}(\gamma, \pi) \left(-\frac{\partial H}{\partial x^i}(\gamma, \pi)\right)$$

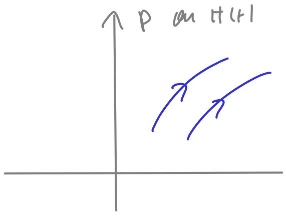
$$= 0$$

Théorème Si (γ, π) est solution des équations de Hamilton, alors $H(\gamma, \pi)$ est constant

Conséquence : On convient de dire que $H(\gamma, \pi) = H(\gamma, m\dot{\gamma})$ est l'énergie

énergie du corps dont la trajectoire généralisée est (γ, π)

$\longrightarrow$ Bonne généralisation de l'énergie : la valeur de l'hamiltonien.



} 2 mouvements ≠ → 2 niveaux d'énergie différents

↕ solutions des équations de Hamilton