Retour sur le devoir

Étude de $f(\theta) = \dfrac{3e}{2(1+e\cos\theta)}$

si $e > 1$, $\theta_0 \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, $\cos\theta_0 = -\frac{1}{e}$

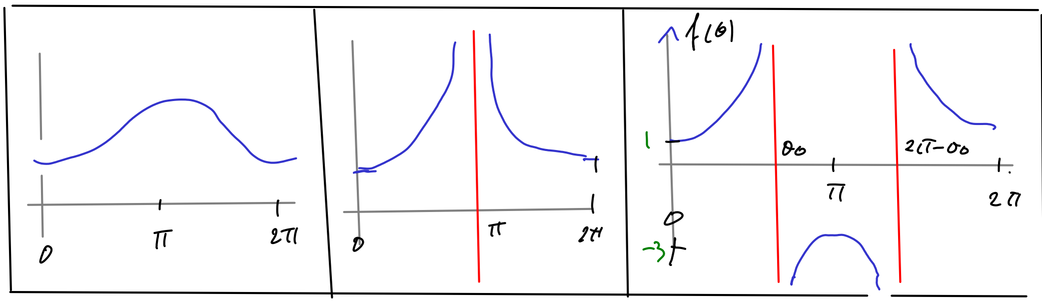
1) Étude de f sur $[0, 2\pi]$:

$0 < e < 1$	$e = 1$	$e > 1$
θ : 0, π, 2π ; f : $\frac{3e}{2(1+e)} \nearrow \frac{3e}{2(1-e)} \searrow \frac{3e}{2(1+e)}$	θ : π ; f : $\frac{3}{4} \nearrow +\infty \Vert +\infty \searrow \frac{3}{4}$	θ : 0, θ_0, π, $2\pi-\theta_0$; f : $\nearrow +\infty \Vert -\infty \nearrow 3e/2(1-e) \searrow -\infty \Vert +\infty \searrow$

$f(2\pi-\theta) = f(\theta)$

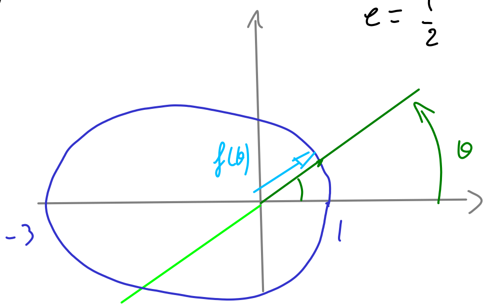
2) Graphes

$0<e<1$ $\qquad$ $e=1$ $\qquad$ $e>1$ $(e=2)$

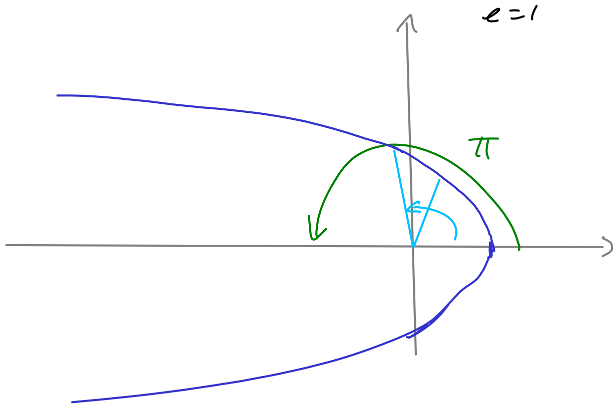


3) $\mathcal{C} = \{(f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta) ; \theta \in \mathbb{R}\}$

$e = \frac{1}{2}$

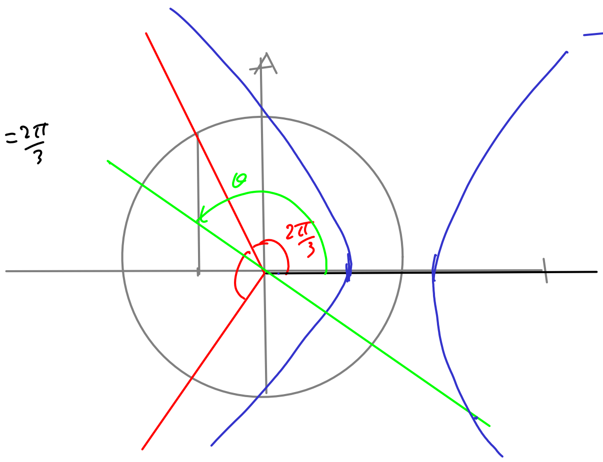


$e=1$



$e=2$

$\left.\begin{array}{l}\cos\theta_0 = -\frac{1}{2} \\ 0 < \theta_0 < \pi\end{array}\right\} \iff \theta_0 = \frac{2\pi}{3}$



Exercice 3 : (2) $V(x) = \frac{k}{2}\left[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\right]$

Force (élastique)

$F(x) = -kx$

$$\boxed{m\frac{d^2\gamma}{dt^2} = F(\gamma) = -k\gamma}$$

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

(temps)

Dériver $V \circ \gamma(t)$ par rapport à t :

1) x ou $\gamma(t)$ sont des vecteurs !!

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma^1(t) \\ \gamma^2(t) \\ \gamma^3(t) \end{pmatrix}$$

2) $\frac{d(V\circ\gamma(t))}{dt}$? $\quad V\circ\gamma(t) = \frac{k}{2}\left[(\gamma^1(t))^2 + (\gamma^2(t))^2 + (\gamma^3(t))^2\right]$

$$\frac{d(V\circ\gamma)}{dt}(t) = \frac{k}{2}\left[\frac{d(\gamma^1(t))^2}{dt} + \frac{d(\gamma^2(t))^2}{dt} + \frac{d(\gamma^3(t))^2}{dt}\right]$$

$$= \frac{k}{\cancel{2}}\underbrace{\left[\cancel{2}\gamma^1\frac{d\gamma^1}{dt} + \cancel{2}\gamma^2\frac{d\gamma^2}{dt} + \cancel{2}\gamma^3\frac{d\gamma^3}{dt}\right]}_{\text{produit scalaire}}$$

$$\boxed{\left\langle \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} \right\rangle = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3}$$

$$= k\left\langle \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \gamma^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{d\gamma^1}{dt} \\ \frac{d\gamma^2}{dt} \\ \frac{d\gamma^3}{dt} \end{pmatrix} \right\rangle = k\left\langle \gamma, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle$$

$$\boxed{(fg)' = f'g + fg'}$$ Leibniz

De même $\quad v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$E_c(v) = \frac{m}{2}\|v\|^2 = \frac{m}{2}\langle v, v\rangle$

$\Rightarrow E_c \circ \gamma = \frac{m}{2}\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle$

$$\Rightarrow \frac{d(E_c\circ\gamma)}{dt} = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle\right)$$

$$= \frac{m}{2}\left(\left\langle \frac{d^2\gamma}{dt^2}, \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle + \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d^2\gamma}{dt^2}\right\rangle\right) = m\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d^2\gamma}{dt^2}\right\rangle$$

(3) $E(t) = E_c\left(\frac{d\gamma}{dt}(t)\right) + V(\gamma(t))$ $\qquad$ $E(t)$ & $E(0)$?

$$(2) \Rightarrow \frac{dE(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(E_c \circ \frac{d\gamma}{dt}\right) + \frac{d}{dt}(V\circ\gamma)$$

$$= m\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d^2\gamma}{dt^2}\right\rangle + k\left\langle \gamma, \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle$$

$m\ddot{\gamma} = -k\gamma$

$$= \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, m\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right\rangle + \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, k\gamma\right\rangle = \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, -k\gamma\right\rangle + \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, k\gamma\right\rangle$$

$$= 0$$

$\Rightarrow E(t)$ est constant $\Leftrightarrow E(t) = E(0)$

Retour sur les équations de Hamilton

espace de phase : tous les états possibles d'une particule ponctuelle à un certain instant.

(Une particule) $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (position d'une particule dans l'espace) $\longrightarrow u = (\gamma, \pi) : \mathbb{R} \to \boxed{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3}$

$$\begin{cases} \gamma(t) = x(t) \\ \pi(t) = m\,\dot{x}(t) \end{cases}$$

$u : \{\text{temps}\} \to \{\text{phase}\}$

Chaque $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ est une "histoire" possible.

Hamiltonien $H : \underbrace{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3}_{\text{espace de phase.}} \longrightarrow \mathbb{R}$

Coordonnées sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$: $\underbrace{q^1, q^2, q^3}_{\text{position dans l'espace}}$, $\underbrace{p_1, p_2, p_3}_{\text{position dans l'espace des moments}}$

Mathématiquement : $\forall j$, $\underbrace{q^j, p_j}_{\text{coordonnées}}$ sont des fonctions $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (au même titre que H)

"observables"

Fonctions $\{\text{phase}\} \to \mathbb{R}$ "observables".

Dynamique : $\boxed{m\ddot{\gamma} = -\nabla V(\gamma)}$ où $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\nabla V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ("gradient V")

$$x \mapsto \left(\frac{\partial V}{\partial x^1}(x), \frac{\partial V}{\partial x^2}(x), \frac{\partial V}{\partial x^3}(x)\right)$$

$$u = (\gamma, \pi) = (\gamma, m\dot{\gamma})$$

$$\boxed{H(q,p) = \frac{\|p\|^2}{2m} + V(q)}$$

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d\gamma^i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}(\gamma, \pi) = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \circ (\gamma, \pi) = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \circ u \\[2ex] \dfrac{d\pi_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}(\gamma, \pi) = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i} \circ (\gamma, \pi) = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i} \circ u \end{cases}}$$

$$\boxed{H \longrightarrow \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\|p\|^2}{2m} + V(q)\right) = \frac{p_i}{m}}$$

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial p_i} \circ u = \frac{p_i}{m} \circ u = \frac{\pi_i}{m}}$$

Autre exemple : 2 masses A et B en interaction gravitationnelle.

Espace de phase $\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^{12}$

$$(\underbrace{q_A, q_B, p_A, p_B}_{12 \text{ composantes}})$$

Equations de Hamilton : 12 équations

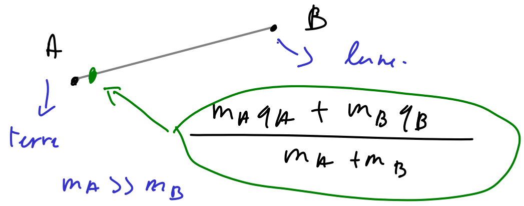
$H : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(q_A, q_B, p_A, p_B) \longmapsto \frac{\|p_A\|^2}{2m_A} + \frac{\|p_B\|^2}{2m_B} - \frac{G\,m_A m_B}{\|q_A - q_B\|}$$

$\forall j = 1,2,3$ $\quad F^j : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$

$\qquad\qquad (\quad) \mapsto m_A q_A^j + m_B q_B^j$ $\qquad$ (centre de gravité) $\times (m_A + m_B)$

$F = (F^1, F^2, F^3) : \mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}^3$



$\{H, F\} = p_A + p_B$ (dans $\mathbb{R}^3$)

$$\Leftrightarrow \boxed{\forall i = 1,2,3 \quad \{H, F^i\} = p_A^i + p_B^i}$$

De plus

$$\boxed{\forall i = 1,2,3, \quad \{H, p_A^i + p_B^i\} = 0}$$

Théorème $\forall F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, si $(\gamma, \pi) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

si
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\gamma^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \circ (\gamma, \pi) \\ \frac{d\pi^i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} \circ (\gamma, \pi) \end{aligned}} \Rightarrow \frac{d(F(\gamma, \pi))}{dt} = \frac{d}{dt}(F \circ (\gamma, \pi))$$
$$= \{H, F\} \circ (\gamma, \pi)$$

De façon plus concise, si $u = (\gamma, \pi)$ est solution des équations de Hamilton,

Alors $\boxed{\frac{d(F \circ u)}{dt} = \{H, F\} \circ u}$

Corollaire (pour 2 corps en interaction)

- $\forall i = 1,2,3,$ $\quad \frac{d(m_A \gamma_A^i + m_B \gamma_B^i)}{dt} = \frac{d(F^i \circ u)}{dt} = \{H, F^i\} \circ u$

$$= \underbrace{(p_A^i + p_B^i)}_{\substack{\text{Fonction} \\ \mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}}} \circ \underbrace{u}_{\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{12}} = \underbrace{\pi_A^i + \pi_B^i}_{\text{Fonction } \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$$

- $\{H, p_A + p_B\} = 0 \Rightarrow \frac{d(\pi_A^i + \pi_B^i)}{dt} = \underbrace{\{H, p_A^i + p_B^i\}}_{\substack{\text{fonction nulle} \\ \mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}}} \circ u = 0$

Conclusion : a) $(\pi_A + \pi_B)(t)$ est indépendant du temps $= \pi_0 \in \mathbb{R}^3$

b) $\frac{d}{dt}\left(\frac{m_A \gamma_A + m_B \gamma_B}{m_A + m_B}\right) = \frac{1}{m_A + m_B}(\pi_A + \pi_B)(t) = \frac{\pi_0}{m_A + m_B}$

Donc
$$\boxed{\frac{m_A \gamma_A + m_B \gamma_B}{m_A + m_B}(t) = \gamma_0 + t\,\frac{\pi_0}{m_A + m_B}} \quad \forall t$$

position du centre de masse $\qquad$ vitesse du centre de masse.

Conclusion : on a déterminé les valeurs de 6 fonctions "observables" :

$$\frac{m_A r_A + m_B r_B}{m_A + m_B}(t) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad (\pi_A + \pi_B)(t) \in \mathbb{R}^3$$

Il ne reste plus qu'à déterminer des coordonnées qui représentent l'écart entre les deux corps → Devoir. (→ problème de Kepler)

Exercices (Calculs de crochets de Poisson).

Espace de phase : $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{C}^\infty((\mathbb{R}^3)^2) \times \mathcal{C}^\infty((\mathbb{R}^3)^2) \to \mathcal{C}^\infty((\mathbb{R}^3)^2)$

$(F, G) \mapsto \{F, G\}$

$$\boxed{\{F, G\} := \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i} - \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i}}$$

1) $F, G : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ qui ne dépendent que de q $\boxed{\{F, G\}\ ?}$

2) ——— ——— p $\boxed{\{F, G\}\ ?}$

3) $q^i : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$M \mapsto$ i-ème coordonnée en espace de M

$p_j : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$M \mapsto$ j-ème coordonnée en moment de M.

$\boxed{\{p_j, q^i\}\ ?}$

1) Si $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ne dépend que de $q = (q^1, q^2, q^3)$, alors

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}(q, p) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon \neq 0}} \frac{F(q^1, q^2, q^3, p_1+\varepsilon, p_2, p_3) - F(q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, p_3)}{\varepsilon} = 0$$

$\boxed{F \text{ ne dépend pas de } p} \iff \boxed{\forall\, q, p, p' \in \mathbb{R}^3, \quad F(q, p) = F(q, p')}$

$\Updownarrow$

$\boxed{F \text{ ne dépend que de } q}$

Donc F ne dépend que de $q \iff \frac{\partial F}{\partial p_1} = 0 = \frac{\partial F}{\partial p_3} = \frac{\partial F}{\partial p_3}$

G ——— $q \iff \frac{\partial G}{\partial p_j} = 0, \quad \forall j = 1, 2, 3$

Conséquence $$\{F, G\} = \sum_{j=1}^{3} \underbrace{\frac{\partial F}{\partial p_j}}_{=0}\frac{\partial G}{\partial q^j} - \frac{\partial F}{\partial q^j}\underbrace{\frac{\partial G}{\partial p_j}}_{=0} = 0$$

2) Si F, G ne dépendent que de $p \implies \frac{\partial F}{\partial q^i} = \frac{\partial G}{\partial q^j} = 0 \implies \{F, G\} = 0$

3) $\{p_1, q^1\} = ?$

$\{p_1, q^2\} = ?$

$\frac{\partial p_1}{\partial p_1} = 1$. $\frac{\partial q^1}{\partial q^1} = 1$ etc...

$\frac{\partial p_1}{\partial q^1} = 0$ $\frac{\partial q^1}{\partial p_1} = 0$

En général

$\frac{\partial p_i}{\partial p_j} = 0$ si $i \neq j$

$\frac{\partial p_i}{\partial p_i} = 1$

$\frac{\partial q^i}{\partial q^j} = 0$ si $i \neq j$ et $\frac{\partial p_i}{\partial q^j} = 0$, $\forall i, j$

$\frac{\partial q^i}{\partial q^i} = 1$ $\frac{\partial q^j}{\partial p_i} = 0$

$\Uparrow$ cas particulier

En général : Sur $\mathbb{R}^n$, $\forall i$, $x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonction i-ème coordonnée.

Alors $\frac{\partial x^i}{\partial x^i} = 1$ et si $i \neq j$, $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = 0$