Équations de Hamilton

Si $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
$t \mapsto x(t)$

$$\boxed{m\ddot{x} = F(x) = -\nabla V(x)}$$

$V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{C}^2$ (deux fois différentiable)

$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

$\nabla V = \operatorname{grad} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x^1} \\ \frac{\partial V}{\partial x^2} \\ \frac{\partial V}{\partial x^3} \end{pmatrix}$

"gradient de V"

$\longrightarrow \begin{cases} \gamma(t) = x(t) \\ \pi(t) = m\dot{x}(t) \end{cases}$

$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$
$t \mapsto (\gamma(t), \pi(t))$

$u(t) = (\gamma(t), \pi(t))$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\gamma^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x^i} \circ u \\ \frac{d\pi_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial p_i} \circ u \end{aligned}}$$

Hamilton

$H(p,q) = \frac{\|p\|^2}{2m} + V(q)$

énergie potentielle

énergie cinétique

"espace de phase"

Crochet de Poisson si $F, G : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$p_1 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$(p,q) \mapsto p_1$

on associe $\{F, G\} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i} - \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i}$

Si F et G ne dépendent que de q, $\{F, G\} = 0$
Si ——— ——— p, $\{F, G\} = 0$

$\{p_i, q^j\} = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$ "symbole de Kronecker"

Exercice a) $\{H, p_i\} = \;?$
b) $\{H, q_i\} = \;?$

où $H \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ quelconque.

a) $i = 1$, $\{H, p_1\} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial H}{\partial p_j}\underbrace{\frac{\partial p_1}{\partial q^j}}_{=0} - \frac{\partial H}{\partial q^j}\underbrace{\frac{\partial p_1}{\partial p_j}}_{\substack{0 \text{ si } j \neq 1 \\ \boxed{1 \text{ si } j = 1}}} = -\frac{\partial H}{\partial q^1}$

Plus généralement, $\boxed{\{H, p_i\} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}}$

b) $i = 1$, $\{H, q_1\} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial H}{\partial p_j}\underbrace{\frac{\partial q_1}{\partial q^j}}_{\substack{1 \text{ si } j = 0 \\ 0 \text{ sinon}}} - \frac{\partial H}{\partial q^j}\underbrace{\cancel{\frac{\partial q_1}{\partial p_j}}}_{0} = \frac{\partial H}{\partial p_1}$

$$\boxed{\{H, q_i\} = \frac{\partial H}{\partial p_i}}$$

Théorème $u = (\gamma, \pi)$ où $\gamma^i = q^i \circ u$

$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ $\quad\quad \pi_i = p_i \circ u$

u est solution de Hamilton

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\gamma^i}{dt} &= \frac{d(q^i \circ u)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \circ u \\ \frac{d\pi_i}{dt} &= \frac{d(p_i \circ u)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \circ u \end{aligned}} \quad (1)$$

$\iff$

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \\ &\frac{d(F \circ u)}{dt} = \{H, F\} \circ u \end{aligned}} \quad (2)$$

$$\underset{\text{temps}}{\mathbb{R}} \xrightarrow{u} \underset{\text{espace de phase}}{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \xrightarrow{F} \underset{\text{quantité observable}}{\mathbb{R}}$$

Preuve $\Rightarrow$ déjà vu

$\Leftarrow$ conséquence de l'exercice

J'applique (2) avec $F = q^1 \Rightarrow \dfrac{d(q^1 \circ u)}{dt} = \{H, q^1\} \circ u = \dfrac{\partial H}{\partial p_1} \circ u$

etc.

$F = p_j \Rightarrow \dfrac{d(p_j \circ u)}{dt} = \{H, p_j\} \circ u = -\dfrac{\partial H}{\partial q^j} \circ u$

(cf. exercice)

Lien entre symétries et quantités conservées
- Principe physique
- Théorème de maths : E. Noether

Principe physique : $\boxed{\text{Symétrie} \longleftrightarrow \text{quantité conservée}}$

(Valable si le problème admet une formulation hamiltonienne ou via le calcul des variations : équivalent)

(Une trajectoire $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^3$ est solution des équation de la dynamique si elle rend extrémale $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} m \|\dot{x}\|^2 - V(x)\right](t)\, dt$

principe de Maupertuis)

Exemple Deux corps en interaction gravitationnelle $x_A, x_B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (A et B)

$H : \underbrace{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3}_{\mathbb{R}^{12}} \to \mathbb{R}$

$$H(q_A, q_B, p_A, p_B) = \frac{\|p_A\|^2}{2m_A} + \frac{\|p_B\|^2}{2m_B} + \frac{G m_A m_B}{\|q_A - q_B\|}$$

On a vu que $p = p_A + p_B$ est conservé :

Si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{12}$ est solution des équations de Hamilton

Alors $\vec{p} \circ u = \vec{p}_A \circ u + \vec{p}_B \circ u$ est conservé. $\quad \vec{p} : \mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}^3$

Preuve : plusieurs manières de le vérifier (par exemple, en partant de Newton)

pour $j = 1, 2, 3$ $\quad \boxed{\{H, p_j\} = \dots = 0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d(p_j \circ u)}{dt} = \{H, p_j\} \circ u = 0$

Interprétation due au théorème de Noether :

L'hypothèse $\{H, p\} = 0$ signifie que H est invariant par une symétrie.

$\boxed{p_j = p_{Aj} + p_{Bj}}$

$$\{H, p_j\} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial H}{\partial p_{Ai}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_A^i}}_{0} + \frac{\partial H}{\partial p_{Bi}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_B^i}}_{0} - \frac{\partial H}{\partial q_{Ai}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_A^i}}_{=0 \text{ si } i \neq j} - \frac{\partial H}{\partial q_{Bi}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_B^i}}_{=0 \text{ si } i \neq j}$$

$$= 0 - \frac{\partial H}{\partial q_A^j} \underbrace{\frac{\partial (p_{Aj} + p_{Bj})}{\partial p_{Aj}}}_{1} - \frac{\partial H}{\partial q_B^j} \underbrace{\frac{\partial (p_{Aj} + p_{Bj})}{\partial p_B^j}}_{1}$$

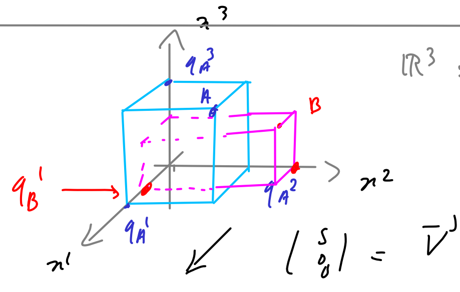
Donc $\boxed{\{H, p_j\} = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_A^j} + \frac{\partial H}{\partial q_B^j}\right)}$

$\{H, p_j\} = 0$
$\iff \boxed{\frac{\partial H}{\partial q_A^j} + \frac{\partial H}{\partial q_B^j} = 0}$ $\quad$ Symétrie de H.

$$\lim_{\substack{s \to 0 \\ s \neq 0}} \boxed{\frac{H(q_A^1 + s, q_A^2, q_A^3, q_B^1 + s, q_B^2, q_B^3, \vec{p}_A, \vec{p}_B) - H(\vec{q}_A, \vec{q}_B, \vec{p}_A, \vec{p}_B)}{s}}$$

$\frac{1}{s}\left(H(\vec{q}_A + \vec{v}, \vec{q}_B + \vec{v}, \vec{p}_A, \vec{p}_B) - H(\vec{q}_A, \vec{q}_B, \vec{p}_A, \vec{p}_B)\right) \quad = \quad \frac{\partial H}{\partial q_A^1} + \frac{\partial H}{\partial q_B^1}$

$\vec{q}_A \mapsto \vec{q}_A + \vec{v}$
$\vec{q}_B \mapsto \vec{q}_B + \vec{v}$



$\mathbb{R}^3$: positions

$$\{H, F\} = 0$$

$\frac{d(F \circ u)}{dt} = \{H, F\} \circ u = 0$

conservation de $F \circ u$

$\{F, H\} = 0$ $\quad$ Symétrie continue de H

Exemple : la conservation de l'énergie est une conséquence du fait que les lois de la physique sont invariantes au cours du temps.

Exercice (pour vendredi prochain) Un corps dans $\mathbb{R}^3$

Vendredi 8 avril

$$\vec{J} = \vec{q} \wedge \vec{p} = \begin{pmatrix} q^2 p_3 - q^3 p_2 \\ q^3 p_1 - q^1 p_3 \\ q^1 p_2 - q^2 p_1 \end{pmatrix}$$

$\vec{J} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$J_1 = q^2 p_3 - q^3 p_2$

a) $\{ J_1, J_2 \} = \dots$

b) $H(q,p) = \dfrac{\|p\|^2}{2m} + V(\|q\|)$ $\quad \|q\| = \sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2}$

$\{H, J_1\} = \dots$

Quelques notions sur le calcul différentiel à plusieurs variables.

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad \Omega$: ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^n$)

Def f est différentiable en $a \in \Omega \iff \forall V \in \mathbb{R}^n$,

$$df_a(V) = \lim_{\substack{s \to 0 \\ s \neq 0}} \frac{f(a+sV) - f(a)}{s} \text{ existe et est}$$

une fonction linéaire de V.

$$\boxed{\begin{aligned} df_a : \ & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & df_a(V) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}(a)\, V^j \end{aligned}}$$

$\in (\mathbb{R}^n)^*$: application linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Def f est différentiable sur $\Omega \iff f$ est différentiable en chaque point $a \in \Omega$

Alors $df : \Omega \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$\qquad x \longmapsto df_a$

Def f est $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega \iff df$ existe et est continue

(c'est à dire $\forall j = 1, \dots, n$, $\frac{\partial f}{\partial x^j} : \Omega \to \mathbb{R}$ est continue)

Def f est $\mathcal{C}^2$ si $\begin{cases} f \text{ est } \mathcal{C}^1 \\ \forall j \in 1, \dots, n, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x^j} \text{ est } \mathcal{C}^1 \end{cases}$

On définit $\dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x^j}\right) = \dfrac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)}{\partial x^i} \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$

Théorème (lemme de Schwarz)

Si f est $\mathcal{C}^2$, alors $\dfrac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)}{\partial x^j} = \dfrac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)}{\partial x^i}$

Conséquence : si f est $\mathcal{C}^2$, $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} := \dfrac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)}{\partial x^j} = \dfrac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)}{\partial x^i}}$

Exemple $n=2$,

$$D^2 f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1} & \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x^2)^2} \end{pmatrix} \text{ est symétrique}$$

(matrice hessienne)

(matrice d'une forme bilinéaire symétrique).

Remarque $\operatorname{tr} D^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2} + \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x^2)^2} = \Delta f$ = laplacien de f.

Question inverse : Dans $\mathbb{R}^2$, soit $\boxed{g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ \mathcal{C}^1}$. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x^1} = g_1 \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial x^2} = g_2}$?

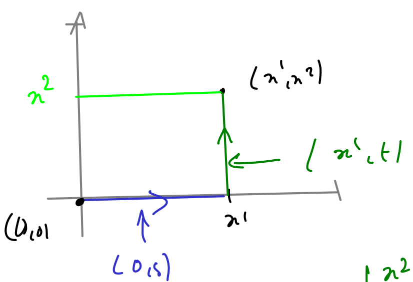
Réponse : oui si g_1 et g_2 satisfont certaines conditions ?

Condition nécessaire : supposons : $\exists f$, $\dfrac{\partial f}{\partial x^1} = g_1$, $\dfrac{\partial f}{\partial x^2} = g_2 \implies f$ est $\mathcal{C}^2$

$$\overset{\text{Schwarz}}{\implies} \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right) = \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\right) \iff \boxed{\frac{\partial g_1}{\partial x^2} = \frac{\partial g_2}{\partial x^1}}$$

Condition suffisante ? Oui sur $\mathbb{R}^2$: lemme de Poincaré (réciproque partielle de Schwarz)

Idée de la preuve



$$f(x^1, x^2) = \int_0^{x^1} g_1(s, 0)\, ds + \int_0^{x^2} g_2(x^1, t)\, dt$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1, x^2) = g_1(x^1, 0) + \int_0^{x^2} \frac{\partial g_2}{\partial x^1}(x^1, t)\, dt$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, x^2) = 0 + g_2(x^1, x^2)}$$

Hypothèse : $\frac{\partial g_2}{\partial x^1} = \frac{\partial g_1}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x^1}(x) = g_1(x^1, 0) + \int_0^{x^2} \underbrace{\frac{\partial g_1}{\partial x^2}(x^1, t)}_{\frac{d}{dt}\left[g_1(x^1,t)\right] \text{ à } x^1 \text{ fixé}} dt$

$$= \cancel{g_1(x^1,0)} + \left[g_1(x^1, x^2) - \cancel{g_1(x^1, 0)} \right]$$

donc $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1, x^2) = g_1(x^1, x^2).}$

Généralisation sur $\mathbb{R}^3$: si $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\nabla \wedge g = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial x^3} - \frac{\partial g_3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x^1} - \frac{\partial g_1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x^2} - \frac{\partial g_2}{\partial x^2} \end{pmatrix}}_{\text{rotationnel de } g. \ = \text{rot } g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Poincaré}} \exists f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}). \ \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ \frac{\partial f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$$

nabla

Lemme de Schwarz : $\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$$\text{rot}(\text{grad}(f)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\nabla \wedge (\nabla f) = 0}$$

Résumé : si $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $\nabla \wedge g = 0 \xRightarrow{\text{Poincaré}} \exists f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $g = \nabla f$

$\nabla \wedge (\nabla f) = 0 \xLeftarrow[\text{Schwarz}]{} f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

Exemple $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ $\quad F(x) = -\frac{GMm}{\|x\|^3} x$

C'est possible car rot $F = \nabla \wedge F = 0$ $\Rightarrow \exists V \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $F = -\nabla V$

$$V(x) = \frac{GMm}{\|x\|}$$

Force de Coulomb (entre deux charges électriques) $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{\|x\|^3}$ (Force électrostatique) rot E = 0 => ∃ potentiel = potentiel électrique.