Devoir rendu il y a mois : attention à nouveau dans l'exercice 3.

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^3, \qquad m\frac{d^2\gamma}{dt^2} = F(\gamma) \iff \begin{pmatrix} \frac{d^2\gamma^1}{dt^2} \\ \frac{d^2\gamma^2}{dt^2} \\ \frac{d^2\gamma^3}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^1(\gamma) \\ F^2(\gamma) \\ F^3(\gamma) \end{pmatrix}$$

Si $E(t) = \frac{1}{2m} \left\| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right\|^2 = \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{d\gamma^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma^3}{dt}\right)^2 \right)$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\cancel{2}m}\left(\cancel{2}\frac{d\gamma^1}{dt}\frac{d^2\gamma^1}{dt^2} + \cancel{2}\frac{d\gamma^2}{dt}\frac{d^2\gamma^2}{dt^2} + \cancel{2}\frac{d\gamma^3}{dt}\frac{d^2\gamma^3}{dt^2} \right)$$

$$= \frac{1}{m}\left\langle \begin{pmatrix} \dot\gamma^1 \\ \dot\gamma^2 \\ \dot\gamma^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ddot\gamma^1 \\ \ddot\gamma^2 \\ \ddot\gamma^3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

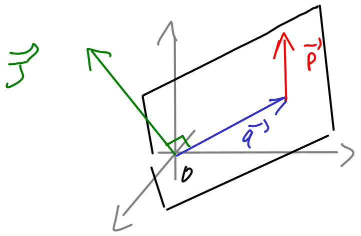
Autre présentation du calcul: $\frac{1}{2m}\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^2 = \frac{1}{2m}\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2m}\|\dot\gamma\|^2\right) = \frac{1}{2m}\left[\left\langle \frac{d^2\gamma}{dt^2}, \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle + \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d^2\gamma}{dt^2}\right\rangle \right]$$

$$= \frac{1}{m}\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d^2\gamma}{dt^2} \right\rangle$$

Exercice (crochet de Poisson)

- Sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ (espace de phase pour une particule dans $\mathbb{R}^3$)
  (q^i, p_i)
- $$\vec{J} = \vec{q} \wedge \vec{p} = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^2 p_3 - q^3 p_2 \\ q^3 p_1 - q^1 p_3 \\ q^1 p_2 - q^2 p_3 \end{pmatrix}$$ Moment cinétique angulaire.



$$H(q,p) = \frac{\|p\|^2}{2m} + V(\|q\|)$$

Rappel $\{F, G\} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i} - \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i}$

(a) $\{J_1, J_2\}$

$$= \{ q^2 p_3 - q^3 p_2 , q^3 p_1 - q^1 p_3 \}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial p_i}(q^2 p_3 - q^3 p_2) \frac{\partial (q^3 p_1 - q^1 p_3)}{\partial q^i} - \frac{\partial (q^2 p_3 - q^3 p_2)}{\partial q^i} \frac{\partial (q^3 p_1 - q^1 p_3)}{\partial p_i}$$

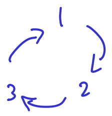
$$
\begin{array}{l}
(i=1)\\
(i=2)\\
(i=3)
\end{array}
\quad = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & (-p_3) \\ -q^3 & \cdot & 0 \\ +q^2 & \cdot & p_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \cdot & q^3 \\ (-p_3) & \cdot & 0 \\ (-p_2) & \cdot & (-q^1) \end{bmatrix}
$$

$$
= \underline{q^2 p_1 - q^1 p_2} = -J_3 .
$$

$$
\{J_1, J_2\} = -J_3
$$

De même $\{J_2, J_3\} = -J_1$, $\quad \{J_3, J_1\} \overset{?}{=} -J_2$

$$
\{J_3, J_1\} = \sum_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial p_i}\left(q^1 p_2 - q^2 p_1\right)}_{=0 \text{ pour } i=3} \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_i}\left(q^2 p_3 - q^3 p_2\right)}_{=0 \text{ pour } i=1} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_i}\left(q^1 p_2 - q^2 p_1\right)}_{=0 \text{ pour } i=3} \underbrace{\frac{\partial}{\partial p_i}\left(q^2 p_3 - q^3 p_2\right)}_{=0 \text{ pour } i=1}
$$



$$
= q^1 p_3 - (-p_1)(-q^3) = q^1 p_3 - q^3 p_1 = -J_2
$$

<u>Conclusion</u>
$$
\begin{cases} \{J_1, J_2\} = -J_3 \\ \{J_2, J_3\} = -J_1 \\ \{J_3, J_1\} = -J_2 \end{cases}
$$

lié au groupe des rotations de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$.

(b) $\{H, J_1\}$ $\qquad H(q,p) = \dfrac{\|p\|^2}{2m} + V(\|q\|)$.

$$
= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\|p\|^2}{2m} + V(\|q\|)\right) \frac{\partial}{\partial q_i}\left(q^2 p_3 - q^3 p_2\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\|p\|^2}{2m} + V(\|q\|)\right) \frac{\partial (q^2 p_3 - q^3 p_2)}{\partial p_i}
$$

$$
\begin{array}{l}
(i=1)\\
(i=2)\\
(i=3)
\end{array}
\quad = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{p_1}{m} \\ \frac{p_2}{m} \\ \frac{p_3}{m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ p_3 \\ -p_2 \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle \boxed{\frac{V'(\|q\|)}{\|q\|}} \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -q^3 \\ q^2 \end{pmatrix} \right\rangle
$$

$$
= \frac{1}{m}\left(p_2 p_3 - p_3 p_2\right) - \frac{V'(\|q\|)}{\|q\|}\left(-q^2 q^3 + q^3 q^2\right) = 0
$$

<u>Remarque</u> $\quad \dfrac{\partial \|q\|}{\partial q^1} = \dfrac{\partial \sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2}}{\partial q^1} = \dfrac{q^1}{\sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^2)^2}} = \dfrac{q_1}{\|q\|}$

(analogue à $\dfrac{d\sqrt{x^2+a^2}}{dx} = \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \, 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

donc $\dfrac{\partial V(\|q\|)}{\partial q^1} = \dfrac{\partial (V \circ N)}{\partial q^1} = (V' \circ N)\dfrac{\partial N}{\partial q^1} = V'(\|q\|)\dfrac{q_1}{\|q\|}$

$N(q) = \|q\|$

De même, $\{H, J_2\} = \{H, J_3\} = 0$.

En somme $\{H, \vec{J}\} = \vec{0}$.

<u>Interprétation</u> $H(q,p) = \dfrac{\|p\|^2}{2m} + V(\|q\|)$ ne dépend que de $\|p\|$ et $\|q\|$ grandeurs invariantes par rotation de $\mathbb{R}^3$ (centrée en 0).

$\Rightarrow$ H invariant par rotation.

<u>Thm de Noether</u>

$\boxed{\{H, \vec{J}\} = 0}$ exprime l'invariance de H par rotation $\rightarrow$ symétrie de H.

$\Updownarrow$

$\boxed{\dfrac{d(J_1 \circ u)}{dt} = \{H, J_1\} \circ u} = 0 \rightarrow$ conservation de $(J_1 \circ u)$

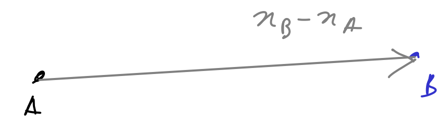
si $u = (q,p)$ est solution des équations de Hamilton

En fait $\vec{J} \circ u$ est constant $\rightarrow$ conservation du moment cinétique.

$\rightarrow$ mouvement plan, loi des aires

<u>Electromagnétisme et ondes.</u>

<u>Force électrostatique</u>



charge e_A charge e_B.

Force exercée par A sur B : $F_{A/B} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e_A e_B (x_B - x_A)}{\|x_B - x_A\|^3}$

Force ——— B — A : $F_{B/A} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e_A e_B (x_A - x_B)}{\|x_B - x_A\|^3}$.

loi de Coulomb ~~XVIII~~ ème siècle.

$F_{A/B} = e_B \, E_A(x_B)$

$F_{B/A} = e_A \, E_B(x_A)$

$$\begin{cases} E_A(x) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e_A(x - x_A)}{\|x - x_A\|^3} \\ E_A : \mathbb{R}^3 \setminus \{x_A\} \rightarrow \mathbb{R}. \end{cases}$$

Champ électrique généré par A

- Chaque charge électrique produit un champ électrique E dans l'espace autour.
- Les forces s'ajoutent (Newton) $\Longleftrightarrow$ en présence de N charges les champs électriques s'ajoutent

charge e_1 en x_1, e_2 en x_2, e_3 en x_3

$$\Rightarrow E(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e_1 (x-x_1)}{\|x-x_1\|^3} + \frac{e_2 (x-x_2)}{\|x-x_2\|^3} + \frac{e_3 (x-x_3)}{\|x-x_3\|^3} \right)$$

champ électrique

$$= - \operatorname{grad} \Bigg(\underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e_1}{\|x-x_1\|} + \frac{e_2}{\|x-x_2\|} + \frac{e_3}{\|x-x_3\|} \right)}_{V} \Bigg)$$

V : potentiel électrique (mesuré en Volt)

Autre façon d'écrire cela.

$$E(x) = \begin{pmatrix} E^1(x) \\ E^2(x) \\ E^3(x) \end{pmatrix} \qquad E : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ (champ électrique)}$$

Divergence de E : $\boxed{\operatorname{div} E = \langle \nabla, E \rangle = \frac{\partial E^1}{\partial x^1} + \frac{\partial E^2}{\partial x^2} + \frac{\partial E^3}{\partial x^3}} \in \mathbb{R}$

Rotationnel de E :

$$\operatorname{rot} E = \nabla \wedge E = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E^1 \\ E^2 \\ E^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E^2}{\partial x^3} - \frac{\partial E^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial E^1}{\partial x^3} - \frac{\partial E^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial E^2}{\partial x^1} - \frac{\partial E^1}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix}$$

Gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ \frac{\partial f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x^3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ satisfait champ électrostatique

$$\boxed{E = -\operatorname{grad} V}$$

deux lois complémentaires

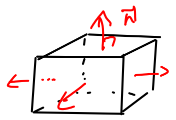
$$\boxed{\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

(V = potentiel électrostatique)

où ρ : densité volumique de charge électrique

Équation qui exprime que ρ est la source de E

Formule mathématiques (Gauss ou Stokes)



$$\boxed{\int_\Omega \operatorname{div} E \, d^3x = \int_{\partial\Omega} \langle E, \vec{n} \rangle \underbrace{d\sigma}_{\text{aire}}}$$

Ω : ouvert $\subset \mathbb{R}^3$ avec un bord $\partial\Omega$

$\operatorname{rot} E = 0$ (électrostatique)

loi structurelle.

$$\int_{\partial\Omega} \langle E, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \text{flux sortant de } \Omega \text{ du champ électrostatique.}$$

$$\text{\rotatebox{90}{=}}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \, d^3x = \text{charge totale à l'intérieur}$$

<u>Equivalence</u> $\quad \mathrm{rot}\, E = 0 \iff \exists\, V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\quad E = -\mathrm{grad}\, V.$

$\Longleftarrow$ lemme de Schwarz

$\Longrightarrow$ lemme de Poincaré (admis).

$\Longleftarrow$ $\boxed{\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, V) = 0}$: $\boxed{\text{si } V \ \mathcal{C}^2}$

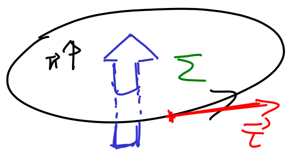
$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, V) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \partial_1 V \\ \partial_2 V \\ \partial_3 V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2(\partial_3 V) - \partial_3(\partial_2 V) \\ \cdot \quad \text{---} \quad - \\ \cdot \quad \cdot \quad - \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}}$$

$= 0$ par le lemme de Schwarz.

<u>Poincaré</u> Si $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}^1$, $\mathrm{rot}\, E = 0$ alors $\exists\, V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $E = -\mathrm{grad}\, V$.

<u>En réalité</u> un champ électrique peut apparaître en présence d'un champ magnétique non constant en fonction du temps. (induction).



$\mathcal{C}$ fil électrique $\quad \begin{pmatrix} \mathcal{C} = \text{bord de } \Sigma \\ \mathcal{C} = \partial\Sigma \end{pmatrix}$

champ magnétique transverse à la <u>surface Σ</u>

- $\vec{B}$: $\begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (t, x) \to \vec{B}(t, x) \end{array}$ $\quad \to$ Flux de $\vec{B}$ à travers Σ : $\displaystyle\int_\Sigma \langle \vec{B}, \vec{n} \rangle \underbrace{d\sigma}_{\text{aire}}.$

- Circulation du <u>champ électrique</u> dans $\mathcal{C}$ (mesure le <u>champ électrique</u> qui apparaît dans la boucle $\mathcal{C}$)

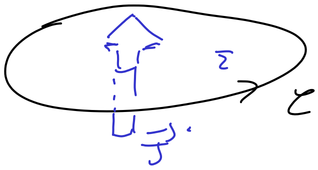
$$\boxed{\int_{\mathcal{C} = \partial\Sigma} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle \underbrace{d\ell}_{\text{longueur}} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_\Sigma \langle \vec{B}, \vec{n} \rangle \, d\sigma}$$

Traduction $\boxed{\mathrm{rot}\, E = -\frac{\partial B}{\partial t}}$ (corrige la loi $\mathrm{rot}\, E = 0$ de l'électrostatique.)

[comment un champ magnétique crée du champ électrique.

D'autres phénomènes : un courant électrique crée un champ magnétique

Densité volumique de courant électrique



$$J : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\int_{\mathcal{C} = \partial \Sigma} \langle B, \tau \rangle \, dl = \mu_0 \int_\Sigma \langle \vec{J}, \vec{n} \rangle \, d\sigma .$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\mathrm{rot}\, B = \mu_0 J}$$

Résumé : équations de Maxwell

induction : comment $\frac{\partial B}{\partial t}$ est une source de E

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{rot}\, E + \frac{\partial B}{\partial t} &= 0 \\ \mathrm{div}\, B &= 0 \end{aligned}}$$

comment J est une source pour B.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{rot}\, B - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} &= \mu_0 J \\ \mathrm{div}\, E &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}}$$

densité de courant

densité volumique de charge

généralise l'électrostatique

($J = \rho$ vitesse de la charge)

Dans le vide $\rho = J = 0$

$$\begin{cases} (1) & \mathrm{rot}\, E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \\ (2) & \mathrm{div}\, B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{rot}\, B - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = 0 & \longleftarrow \text{"}E \quad (3) \\ \mathrm{div}\, E = 0 & (4) \end{cases}$$

Éliminons B.

$$(3) \quad \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \mathrm{rot}\, B$$

lemme de Schwarz

$$\Rightarrow \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\, B) = \mathrm{rot}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right) \overset{(1)}{=} \mathrm{rot}(-\mathrm{rot}\, E)$$

$$\overset{\text{Formule}}{=} -\mathrm{grad}(\mathrm{div}\, E) + \Delta E \underset{(4)}{=} \Delta E$$

$$\Delta E = \frac{\partial^2 E}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 E}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 E}{(\partial x^3)^2}$$

Conclusion $\boxed{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \Delta E = 0}$ Équation des ondes

μ_0, ε_0 : constantes calculées à partir de la mesure des phénomènes électrostatiques et d'induction.

Observation $\mu_0 \varepsilon_0 = \dfrac{1}{c^2}$ où $c =$ vitesse de la lumière

$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Conclusion : la lumière est une onde électromagnétique