Encore deux semaines de cours après les vacances, du 3 au 16 inclus

Electromagnétisme, Faraday, ... → les champs électriques sont profondément liés → Maxwell.

Programme pour les 3 derniers cours : ondes électromagnétiques, formulation hamiltonienne
lien entre mécaniques classique et quantique.

Devoir à rendre la semaine de la rentrée : fonctions F

sur $\underset{(t}{\mathbb{R}} \times \underbrace{\underset{q}{\mathbb{R}^3} \times \underset{p)}{\mathbb{R}^3}}_{\text{espace de phase}}$ & crochet de Poisson.

<u>Electromagnétisme</u> équations de Maxwell (décrit tous les phénomènes électromagnétiques).

<u>Champ électrique</u> $\vec{E} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

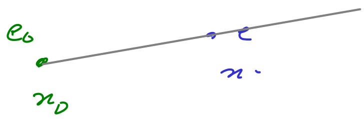
$(t, x) \longmapsto E(x).$

Force de Coulomb exercée par le champ $\vec{E}$ sur une particule chargée de charge e en x

$$\vec{F} = e\,\vec{E}(x)$$

(Coulomb, électrostatique $\vec{E} = \dfrac{e_0 \quad x - x_0}{\varepsilon_0 \|x - x_0\|^3}$)

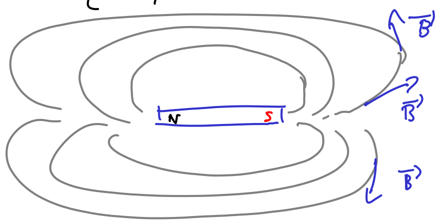
champ créé par une charge e_0 en x_0



<u>Champ magnétique</u> $\vec{B} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

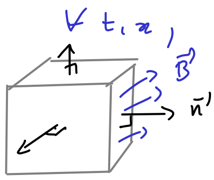
$(t, x) \longrightarrow B(x).$

Faraday



limaille de fer : matérialiser les lignes du champ magnétique.

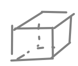
$\forall\, t, x,$



$$\mathrm{div}\, B = \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} = 0$$

: "conservation du champ"

Boîte



Flux sortant du champ $\vec{B}$

$$\sum_{\text{Faces}} \int_{\text{Face}} \langle \vec{B}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

Liens entre magnétisme et électricité (apparaissent dès que $\vec{B}$ et $\vec{E}$ changent au cours du temps)

Des charges électriques qui se déplacent créent du champ magnétique, en plus du champ électrique.

Charges électriques en mouvement : densité de courant volumique

$$\vec{j} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(t, x) \longmapsto \vec{j}(t,x) = \frac{(\text{charge électrique dans } b) \times \text{vitesse}}{\text{Volume de la boîte } b}$$

b =  ← très petite cellule dans l'espace

Densité de charge électrique

$$\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\rho(t,x) = \frac{\text{charge électrique dans } b}{\text{Volume de } b}$$

Exemple électrostatique : $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\right)$

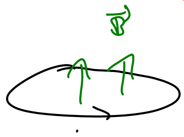
$$\vec{E}(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{y})(\vec{x} - \vec{y})}{\varepsilon_0 \|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \, d\vec{y} \quad \text{(Coulomb)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{E} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial B}{\partial t}}}_{= 0 \text{ si statique}} = 0$$

Induction si $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$

$$\boxed{\operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0}$$



circuit électrique fermé

Un champ magnétique variable à travers la boucle crée un champ électrique dans le fil (loi d'Ampère)

Faraday (Ørsted) : un courant électrique engendre un champ magnétique.

$$\boxed{\operatorname{rot} B - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}}$$

Maxwell (amélioré par Heaviside)

$$\boxed{\begin{cases} \operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \\ \operatorname{div} B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{rot} B - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \\ \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases}}$$

Comment les charges influent sur $\vec{E}$ et $\vec{B}$

contraintes structurelles — influence des charges $(\rho, \vec{j})$ sur $\vec{E}, \vec{B}$.

Force de Lorentz

$$\boxed{\vec{F} = e\,\vec{E}(x) + e\,\frac{d\vec{x}}{dt} \wedge \vec{B}(x) \quad \underline{\text{Newton}} \quad m\,\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}}$$

Force subie par une particule de charge e située en $x(t) \in \mathbb{R}^3$

Comment $\vec{E}$ et $\vec{B}$ influent sur la matière chargée

Dans la matière ordinaire, à l'échelle atomique, les forces électrostatiques dominent totalement la force gravitationnelle.

Remarque : dans le langage des formes différentielles (M1), on peut écrire Maxwell : $dF = 0$, $d(\star F) = J$.

où F, J et $\star$ sont des objets "naturels" sur le plan mathématique (simplicité)

qui se comprend bien dans le cadre de la Relativité restreinte.

Solutions de Maxwell dans le vide ($\rho = 0$ et $\vec{j} = 0$) $\qquad \frac{1}{c^2} = \varepsilon_0 \mu_0$

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\, E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 & (1) \\ \mathrm{div}\, B = 0 & (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{rot}\, B - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} = 0 & (3) \\ \mathrm{div}\, E = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} \overset{(3)}{=} \mathrm{rot}\, B \implies \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\, B) \overset{\text{Schwarz}}{=} \mathrm{rot}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right) \overset{(1)}{=} -\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, E)$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, E) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \wedge \left[\begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 \\ \partial_3 E_1 - \partial_1 E_3 \\ \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 \end{pmatrix}$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_2 (\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1) - \partial_3 (\partial_3 E_1 - \partial_1 E_3) \\ - \\ - \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_1 (\partial_2 E_2 + \partial_3 E_3 + \partial_1 E_1) - (\partial_2)^2 E_1 - (\partial_3)^2 E_1 - (\partial_1)^2 E_1 \\ - \\ - \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, E) = \begin{pmatrix} \partial_1 (\mathrm{div}\, E) - \Delta E_1 \\ \partial_2 (\mathrm{div}\, E) - \Delta E_2 \\ \partial_3 (\mathrm{div}\, E) - \Delta E_3 \end{pmatrix} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\, E) - \Delta E$$

$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 = \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2}.$$

Retour à $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, E) = \Delta E - \mathrm{grad}(\underbrace{\mathrm{div}\, E}_{0}) \overset{(4)}{=} \Delta E$

Conclusion d'Alembertien $\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ (opérateur des ondes)

$\boxed{\Box \vec{E} = 0}$ de même $\boxed{\Box \vec{B} = 0}$ (exercice).

Conséquences de Maxwell. (conditions nécessaires, mais non suffisantes).

Cherchons des solutions particulières : ondes planes

$\vec{E}(t,\vec{x}) = \vec{e}\,(\nu t + \vec{k}\cdot\vec{x})$

$\vec{B}(t,\vec{x}) = \vec{b}\,(\nu t + \vec{k}\cdot\vec{x})$.

$(t,\vec{x}) \mapsto \nu t + \vec{k}\cdot\vec{x}$ application linéaire sur l'espace-temps

On cherche $\nu \in \mathbb{R}$, $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ et $\vec{e} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
$\vec{b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

Ansatz: Modulo une rotation de l'espace, je suppose que $\vec{k} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ + $\nu > 0$

$\vec{E}(t,x) = \vec{e}\,(\nu t + k\, x^1)$ $\quad \vec{B}(t,x) = \vec{b}\,(\nu t + k x^1)$

Exercice 1) Calculer $\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, en déduire un système d'équations satisfait par les composantes de : $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Trouver des équations satisfaites par : $\nu, k \in \mathbb{R}$, $e^1, e^2, e^3, b^1, b^2, b^3 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$

A faire pour début mai.

2) Calculer $\mathrm{div}\,\vec{E}$, $\to$ équation sur $\vec{e}$.

0) Calculer $\Box\vec{E}$ et traduire $\Box\vec{E} = 0$.

0') Utiliser $\Box\vec{B} = 0$

1') Utiliser sur $\mathrm{rot}\,\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$.

2') Utiliser $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

$\boxed{\vec{e}\circ\ell = \vec{E}}$: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\ell} \mathbb{R} \xrightarrow{\vec{e}} \mathbb{R}^3$

$(t,\vec{x}) \mapsto \nu t + \vec{k}\cdot\vec{x} \longmapsto \vec{E} = \vec{e}\circ\ell\,(t,\vec{x})$

$= \nu t + k x^1$

$= \ell(t,\vec{x})$

$\vec{k} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$m = 4$
$n = 3$

Situation : $\ell : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ et $\vec{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \vdots \\ \varphi^n \end{pmatrix}$ $\quad \forall j$ $\varphi^j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\varphi\circ\ell : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

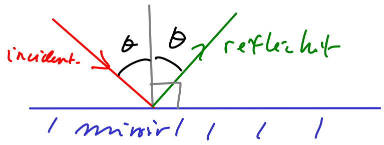
Formule générale : $\boxed{\frac{\partial(\varphi^j\circ\ell)}{\partial x^\mu} = \left(\frac{d\varphi^j}{dy}\circ\ell\right)\frac{\partial \ell}{\partial x^\mu}}$

Préhistoire de la mécanique quantique et liens avec la physique classique (avant 1908)

Dualité onde / particule : débat qui commence vers 1685 sur la lumière.

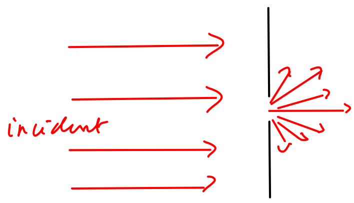
1 se déplace en ligne droite

2 se réfléchit sur les miroirs



3 est réfractée dans l'eau, le verre → lentille (lois de Snell)

4 diffraction

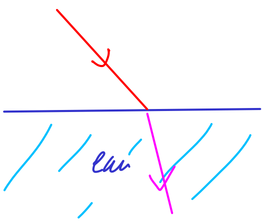


Qu'est-ce que la lumière ? Newton, Descartes : des petites particules, sphères, corpuscules (lumière analogue à la mécanique) Rayons

explique bien : 1 ligne droite, 2 miroir, 3 réfraction — (4) Diffraction = ne marche pas.

↓ ça marche

Réfraction



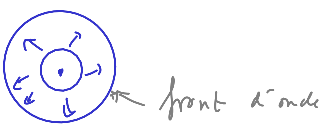
Descartes : réponse fausse

Fermat : bonne réponse

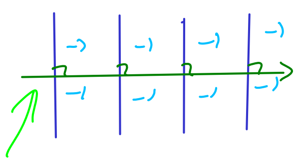
Hypothèse : la lumière va moins vite dans l'eau que dans l'air

Huygens : lumière = onde

(comme des vaguelettes à la surface d'un étang)



Loin d'une source, les fronts d'onde sont plats.



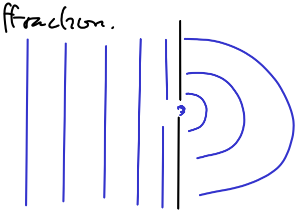
plans parallèles qui se déplacent

Soleil

quasiment à l'infini

Huygens retrouve les "rayons"

Ça explique très bien la diffraction.



Début $\overline{\underline{XIX}}$ ème siècle, expériences de Fresnel qui donnent raison à Huygens.

<u>Hamilton</u> : tentative de conciliation des deux points de vue.