Note finale : devoirs $\to$ note de contrôle continu (C)
examen $\to$ E.

$\boxed{\sup\left[E, \frac{E+C}{2}\right]}$

Exercice sur les solutions de Maxwell dans le vide.

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{B} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \\ \mathrm{div}\,\vec{E} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{\Box \vec{E} = \Box \vec{B} = 0}$ où $\Box = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} - \dfrac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} - \dfrac{\partial^2}{(\partial x^3)^2}$

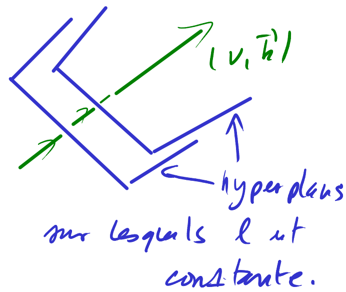
équation des ondes. d'Alembertien ou opérateur des ondes.

(on a utilisé une formule : $\boxed{\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\vec{A}) = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \Delta \vec{A}}$)
(si $\vec{A}$ est C^2)

Exercice On suppose $\vec{E} = \vec{e}\,(vt + \vec{k}\cdot\vec{x})$ (onde plane)
$\vec{B} = \vec{b}\,(vt + \vec{k}\cdot\vec{x})$

$v \in \mathbb{R}$
$\vec{k} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{E} : \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\ell} \mathbb{R} \xrightarrow{\vec{e}} \mathbb{R}^3$$
$$(t, \vec{x}) \longmapsto \underbrace{vt + \vec{k}\cdot\vec{x}}_{\ell(t,x)} \longmapsto \vec{e}\,(vt + \vec{k}\cdot\vec{x})$$



1) $\mathrm{rot}\,\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

Solution : $\mathrm{rot}\,\vec{E} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 \\ \partial_3 E_1 - \partial_1 E_3 \\ \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 \end{pmatrix}$

$$\partial_2 E_3 = \frac{\partial}{\partial x^2}\left(e_3 \circ \ell(t,x)\right) = (e_3' \circ \ell)\,\frac{\partial \ell}{\partial x^2} = e_3'(\ell)\,k_2$$

$$\partial_t B_1 = \frac{\partial}{\partial t}\left(b_1 \circ \ell(t,x)\right) = (b_1' \circ \ell)\,\frac{\partial \ell}{\partial t} = b_1'(\ell)\,v$$

Donc $\mathrm{rot}\,\vec{E} = \begin{pmatrix} k_2 e_3' - k_3 e_2' \\ k_3 e_1' - k_1 e_3' \\ k_1 e_2' - k_2 e_1' \end{pmatrix}(vt + \vec{k}\cdot\vec{x}) = \vec{k} \wedge \vec{e}\,'(vt + \vec{k}\cdot\vec{x})$

$\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = v\,\vec{b}\,'(vt + \vec{k}\cdot\vec{x})$

$$\boxed{\vec{k} \wedge \vec{e}\,' + v\,\vec{b}\,' = 0}$$

2) $\boxed{\operatorname{div} \vec{E}' = 0}$ $\quad \operatorname{div} \vec{E}' = \partial_1 (e_1 o \ell) + \partial_2 (e_2 o \ell) + \partial_3 (e_3 o \ell)$

$= k_1 e_1' o \ell + k_2 e_2' o \ell + k_3 e_3' o \ell$

$= \vec{k} \cdot (\vec{e}\,' o \ell)$

$\Updownarrow$

$\boxed{\vec{k} \cdot \vec{e}\,' = 0}$

0) $\boxed{\square \vec{E} = 0}$ $\iff \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}\right)\right] \vec{E} = 0$

$\iff \left(\frac{v^2}{c^2} - \sum_{i=1}^{3} k_i^2\right) \vec{e}\,' o \ell = 0$

$\iff \left(\frac{v^2}{c^2} - \|\vec{k}\|^2\right) \vec{e}\,' = 0$

Soit $\vec{e}\,' = 0$ (peu intéressant : champ constant)

Soit $\vec{e}\,' \neq 0$ $\quad \boxed{v^2 - c^2 \|\vec{k}\|^2 = 0}$ "Relation de dispersion"

$\Uparrow$

vitesse de déplacement des ondes $= c$

1') $\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \iff \boxed{\vec{k} \wedge \vec{b}\,' - \frac{v^2}{c^2} \vec{e}\,' = 0}$

$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \iff \boxed{\vec{k} \cdot \vec{e}\,' = 0}$

Récapitulatif

$$v^2 = c^2 \|\vec{k}\|^2 \qquad \left\{\begin{array}{l} \vec{k} \wedge \vec{e}\,' + \vec{b}\,' = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{b}\,' = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \vec{k} \wedge \vec{b}\,' - \frac{v^2}{c^2} \vec{b}\,' = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{e}\,' = 0 \end{array}\right.$$

Supposons $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{v}{c} \end{pmatrix}$ (on peut choisir des coordonnées dans $\mathbb{R}^3$ pour avoir cette forme)

$$\vec{k} \wedge \vec{e}\,' + \vec{b}\,' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v/c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v}{c} e_2' + b_1' \\ \frac{v}{c} e_1' + b_2' \\ b_3' \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} b_1' = \frac{v}{c} e_2' & (a) \\ b_2' = -\frac{v}{c} e_1' & (b) \\ b_3' = 0 & \end{array}\right. \qquad \vec{k} \cdot \vec{b}\,' = \frac{v}{c} b_3' = 0$$

De même

$$\vec{k} \wedge \vec{b}\,' - \frac{1}{c^2} \vec{e}\,' = \begin{pmatrix} -\frac{v}{c} b_2' - \frac{1}{c^2} e_1' \\ \frac{v}{c} b_1' - \frac{1}{c^2} e_2' \\ -\frac{1}{c^2} e_3' \end{pmatrix} = 0$$

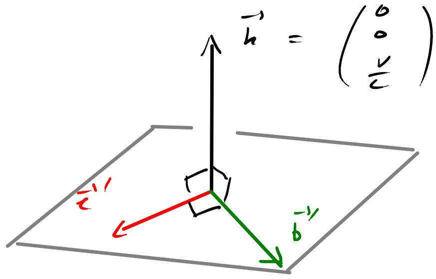
$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} e_1' = -cv\, b_2' & (\Leftrightarrow)(b) \\ e_2' = cv\, b_1' & (\Leftrightarrow)(a) \\ \boxed{e_3' = 0} \end{cases} \qquad \vec{k}\cdot\vec{e}\,' = \frac{v}{c}\, e_3' = 0$$

Conclusion

$$\boxed{\begin{aligned} e_1' &= -cv\, b_2' \\ e_2' &= cv\, b_1' \\ e_3' &= b_3' = 0 \end{aligned}}$$

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -cv \\ cv & 0 \end{pmatrix}}_{cv \,\times\, \text{rotation d'angle } \pm\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \end{pmatrix}$$

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{v}{c} \end{pmatrix}$$



si $\vec{e}\,'$ est connu
$\vec{b}\,'$ est déterminé
(vice-versa)

Deux degrés de liberté $\perp \vec{k} \to$ polarisation..

Lumière : **deux principes** pour expliquer : **rayons** ou **ondes** ?

- déplacement en ligne droite dans le vide : Euclide, Héron d'Alexandrie
- réfraction : Fermat et Huygens
- diffraction : ? Huygens

Rayon : . lumière = rayon (chez Newton, Descartes : particules)
chemin dans l'espace de longueur "minimale." (en réalité extremale)

Onde : Huygens, Fresnel, confirmé par Maxwell

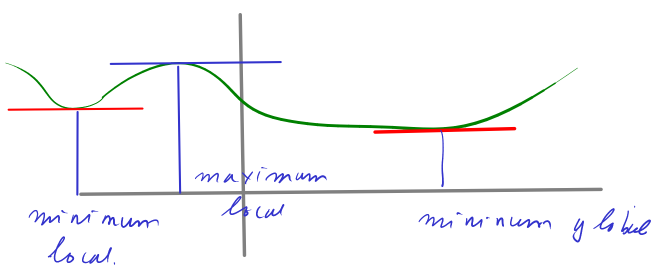
Débat entre les deux points de vue.

Réfraction suivant Fermat : la lumière suit le chemin "le plus court" en temps.

Parenthèse

Minimum et extremum

Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$



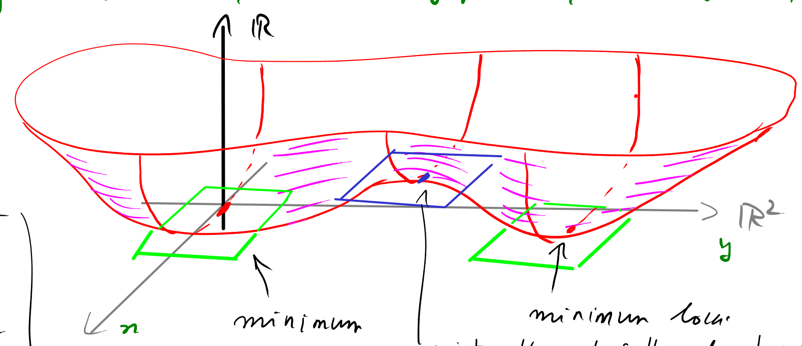
Point commun : la dérivée de f s'annule en tous les maxima et minima locaux.

Considérons $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^2 : graphe $= \{(x, y, f(x,y)) \; ; \; (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

Point commun entre ces points :

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \text{ s'annulent simultanément}}$

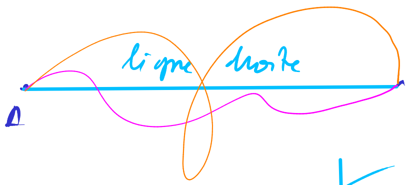
(x,y) est appelé un <u>point critique</u>



point selle (selle de cheval) ou un col. (minimum dans une direction, maximum dans une autre).

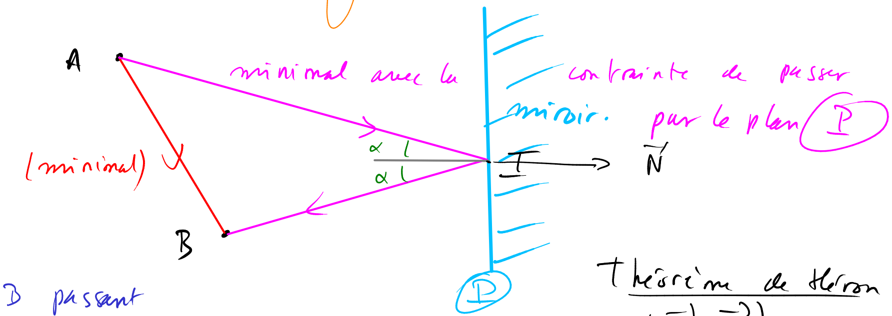
Bonne notion à la place de "plus court chemin" : point critique en grand dimension (voire même infinie).

<u>Lumière</u> a) Entre 2 points dans le vide



(Euclide)

b) Miroir

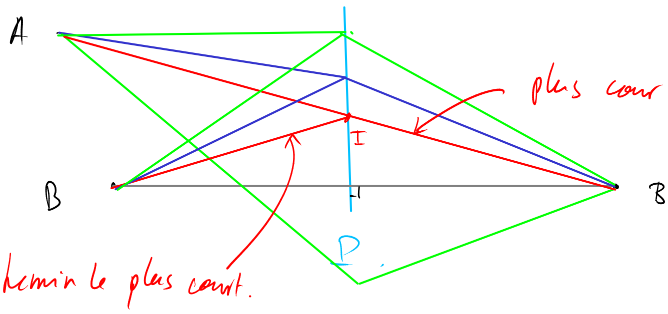


Principe de Héron

La Lumière choisit le chemin minimal de A à B passant par un point du plan (P) : Héron d'Alexandrie

Théorème de Héron
Angle $(\vec{AI}, \vec{N})$ = Angle $(\vec{N}, \vec{BI})$

Preuve de Héron:



B' = symétrique de B par rapport à P.

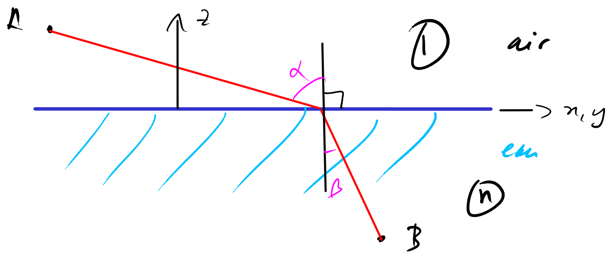
<u>Préhistoire du calcul des variations</u>

La solution d'un problème "minimise", plutôt rend <u>extrémale</u>, une une quantité.

c) <u>Réfraction</u> : principe de Fermat.

Loi de Snell :

relation entre les angles α et β.



Postulat (Fermat)

1) la lumière va moins vite dans l'eau que dans l'air

2) le rayon lumineux suit un trajet de longueur extrémale

Indice de réfraction: 1 pour l'air, $n > 1$ pour l'eau

$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$v(x,y,z) = 1$ si $z>0$
$v(x,y,z) = n$ si $z<0$

Fermat: chemin γ qui joint A à B $\longmapsto L(\gamma)$

$$L(\gamma) = \int_0^1 \left\| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right\| v(\gamma(t))\, dt$$

$\gamma(0) = A$, $\gamma(1) = B$

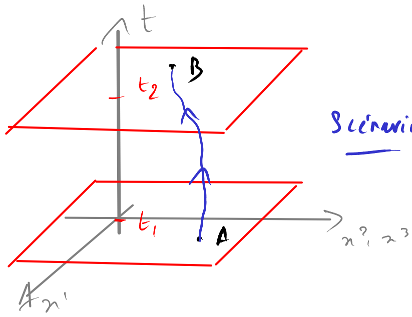
$\longrightarrow$ On retrouve les lois de Snell.

Généralise à tous milieux (lentilles en verre, en cristal)

d) Extension à la mécanique : principe de Maupertuis.

Comment retrouver les lois de Newton

$\{$ Trajectoires $\gamma : \underbrace{[t_1, t_2]}_{\text{intervalle de temps}} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t_1) = A$, $\gamma(t_2) = B \} \longrightarrow \mathbb{R}$



Scénario

$$\gamma \longmapsto \underset{\substack{\uparrow \\ \text{"action"} \\ \text{quantité mystérieuse.}}}{\mathcal{A}}[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} \Bigg[\underbrace{\frac{1}{2} m \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|^2}_{\text{partie Maupertuis}} - \underbrace{V(\gamma(t))}_{\text{Supplément. Force} = -\nabla V} \Bigg] dt$$

Principe : la trajectoire choisie par la physique rend $\mathcal{A}[\gamma]$ extrémale $\left(\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \gamma} = 0 \right)$

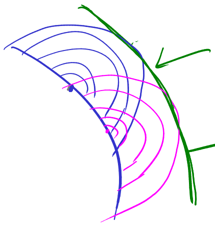
Ça marche : $\underbrace{\text{Euler, Lagrange, Hamilton}}_{\text{"équations de Hamilton"}}$

Lien entre le point de vue onde et le point de vue (trajectoire d'un) corpuscule ?

Oui

Retour à Huygens

chaque petite sphère touche F_{t+dt} en 1 point et est tangente à F_{t+dt} en ce point



surface = "enveloppe" des cercles (ou des sphères dans $\mathbb{R}^3$)

surface d'onde à l'instant $t + \delta t$ F_{t+dt} (δt petit)

surface d'onde à l'instant t F_t

Point important : dans l'air (ou le vide) les sphères ont le même rayon $c\, \delta t$

vitesse de la lumière.

Ici intervient la distance euclidienne.

Sphère de centre M, de rayon r =

$$\{ M' \in \mathbb{R}^3 \ ; \ d(M, M') = \| \overrightarrow{MM'} \| = r \}.$$

Corollaire : " la distance entre F_t et F_{t+dt} est constante "

Définition a) Distance entre les points A et B : $\| \overrightarrow{AB} \|$

$\left(\text{si } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ \| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \right)$

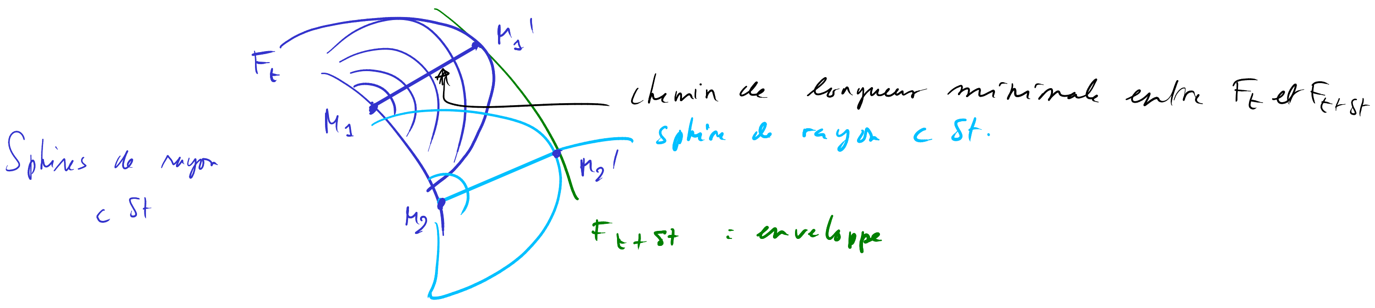
b) Distance entre A et une surface $S \subset \mathbb{R}^3$

$$\boxed{d(A, S) = \inf \{ \| \overrightarrow{AM} \| \ ; \ M \in S \}}$$

c) Distance entre 2 surfaces S et $S' \subset \mathbb{R}^3$

$$d(S, S') = \inf \{ \| \overrightarrow{MM'} \| \ ; \ M \in S, \ M' \in S' \}$$

Huygens $\forall M \in F_t$, $\text{dist}(M, F_{t+\delta t}) = c\, \delta t$.



Surfaces équidistantes : On peut définir

$$S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{constante sur chaque } F_t$$

et de plus $\left|\begin{array}{l} \text{dist}\,(F_{t_1}, F_{t_2}) = S(M_{t_2}) - S(M_{t_1}) \\ \text{si } t_1 < t_2 \end{array}\right.$

Deux pages avec des animations sur le principe de Huygens :
https://femto-physique.fr/simulations/principe-huygens.php
http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/optiondu/diffraction.html