FIBRÉS STABLES ET FIBRÉS EXCEPTIONNELS SUR $\mathbb{P}_2$

JEAN–MARC DRÉZET
JOSEPH LE POTIER

Résumé. Soient r un entier > 1, c_1 et $c_2 \in \mathbb{Z}$. Dans cet article. nous déterminons quelles conditions doivent satisfaire r, c_1 et c_2 pour qu'il existe, sur le plan projectif $\mathbb{P}_2$ des fibrés vectoriels algébriques stables de rang r de classes de Chern c_1 et c_2. Ces conditions font jouer un rôle particulier aux fibrés E qui sont à la fois stables et rigides, c'est-à-dire tels que $\mathrm{Ext}^1(E,E) = 0$: nous les appelons exceptionnels. La construction donnée permet en outre de démontrer que l'espace de modules de Maruyama des classes d'équivalence de faisceaux semi-stables de rang et de classes de Chern donnés est irréductible. Pour $r = 2$ ces résultats etaient connus de Schwarzenberger et Maruyama.

Let r, c_1, c_2 be integers, with $r > 1$. In this paper, we determine which conditions must r, c_1, c_2 verify for a stable rank r vector bundle on the projeclive plane $\mathbb{P}_2$, with Chern classes c_1, c_2 to exist. In these conditions a crucial role will be played by the stable vector bundles E which are rigid. i. e. such that $\mathrm{Ext}^1(E,E) = 0$: we call them exceptional. We give a construction of the Maruyama's moduli space of equivalence classes of semi-stable sheaves with fixed rank and Chern classes which allows us to prove its irreducibility. For $r = 2$ these results have been proved by Schwarzenberger and Maruyama.

Sommaire

Introduction

Soient r un entier > 1, c_1 et $c_2 \in \mathbb{Z}$. On sait qu'il existe des fibrés vectoriels algébriques sur $\mathbb{P}_2$, de rang r, de classes de Chern c_1 et c_2 : c'est un cas particulier d'un résultat que Schwarzenberger démontre plus généralement sur toute surface projective. L'objet du présent travail est de déterminer quelles conditions (nécessaires et suffisantes) nous devons imposer à r, c_1 et c_2 pour

J. Le Potier est décédé le 8 Décembre 2005.

qu'il existe au moins un fibré vectoriel stable de rang r, de classes de Chern c_1 et c_2. Pour $r = 2$ ces conditions s'écrivent d'après Schwarzenberger [18] :

$$c_2 - \frac{c_1^2}{4} \geq \begin{cases} 2 \text{ si } c_1 \text{ est pair,} \\ \dfrac{3}{4} \text{ si } c_1 \text{ est impair.} \end{cases}$$

Pour énoncer de façon satisfaisante nos résultats, nous introduisons pour chaque fibré vectoriel E de rang r, de classes de Chern c_1 et c_2 sur $\mathbb{P}_2$ les nombres rationnels suivants

– la pente $\mu(E) = \dfrac{c_1}{r}$,

– le discriminant $\Delta(E) = \dfrac{1}{r}\left(c_2 - \dfrac{r-1}{2r}c_1^2\right)$.

Avec ces notations, la formule de Riemann-Roch devient $\chi(E) = r(P(\mu) - \Delta)$ où $\chi(E)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de E, et P le polynôme

$$P(X) = 1 + \frac{3X}{2} + \frac{X^2}{2} .$$

Ce polynôme P est aussi le polynôme de Hilbert du fibré trivial de rang 1 sur $\mathbb{P}_2$. Il revient au même de se donner (r, c_1, c_2), ou de se donner (r, μ, Δ) satisfaisant aux conditions suivantes

$$r\mu \in \mathbb{Z} , \quad r(P(\mu) - \Delta) \in \mathbb{Z} .$$

0.1 – Fibrés exceptionnels (§4.2). Soit $M_s^0(r, \mu, \Delta)$ l'espace de modules des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels algébriques stables de rang r, de pente μ et de discriminant Δ. Si cet espace de modules n'est pas vide, c'est une variété algébrique lisse de dimension $r^2(2\Delta - 1) + 1$ [16]. Si $\Delta < \frac{1}{2}$, on montrera au paragraphe 4.2 que cet espace est ou vide, ou réduit à un point.

Soit E un fibré vectoriel algébrique stable de rang r, de pente μ, de discriminant Δ ; on dira que E est *exceptionnel* si $\Delta < \frac{1}{2}$, ou, ce qui revient au même, si E est rigide, c'est-à-dire $\mathrm{Ext}^1(E, E) = 0$. Si E est un tel fibré, l'espace de modules correspondant est alors réduit au point défini par E. En fait, un tel fibré est déterminé à isomorphisme près par sa pente μ : son rang r est en effet le plus petit dénominateur positif de μ, et son discriminant est donné par

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) .$$

Nous répondrons en premier lieu (théorème A) à la question suivante : quels sont les nombres rationnels qui sont pentes de fibrés exceptionnels ? Dans la suite, nous désignons par $\mathfrak{E}$ cet ensemble de nombres rationnels.

0.2 – L'application $\epsilon : \mathfrak{D} \to \mathbb{Q}$ (§5.1). Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$; on appellera rang r_α de α le plus petit entier $r > 0$ tel que $r\alpha \in \mathbb{Z}$, autrement dit son plus petit dénominateur, et discriminant de α le nombre rationnel

$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r_\alpha^2}\right) .$$

Soit (α, β) un couple de nombres rationnels tels que $3 + \alpha - \beta \neq 0$. On pose

$$\alpha.\beta \;=\; \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\Delta_\beta - \Delta_\alpha}{3+\alpha-\beta} \; .$$

Soit $\mathfrak{D} \subset \mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels de la forme $p/2^q$, où $p \in \mathbb{Z}$, et où q est un entier ≥ 0. Considérons l'application $\epsilon : \mathfrak{D} \to \mathbb{Q}$ définie par récurrence sur q de la manière suivante

$$(1) \qquad \epsilon(n) \;=\; n \;\; \text{pour } n \in \mathbb{Z} \; ,$$

$$(2) \quad \epsilon\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right) \;=\; \epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right).\epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right) \; .$$

On verra au paragraphe 5.1 que cette construction est possible. L'application $\epsilon : \mathfrak{D} \to \mathbb{Q}$ obtenue est strictement croissante, et $\epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right)$ est de rang $\geq 2^q$ si p est impair. De plus, pour $\rho \in \mathfrak{D}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\epsilon(-\rho) = -\epsilon(\rho)$ et $\epsilon(\rho+n) = \epsilon(\rho)+n$; ainsi, ϵ est parfaitement connue dès que l'on connaît sa restriction à l'intervalle $[0,1/2] \cap \mathfrak{D}$. Le calcul explicite donne par exemple pour $q = 4$

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\epsilon(p/2^4)$	0	$\frac{13}{34}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{75}{194}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{179}{433}$	$\frac{12}{29}$	$\frac{70}{169}$	$\frac{1}{2}$

0.3 – Les résultats

Théorème A : *Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$. Pour qu'il existe un fibré exceptionnel de pente α, il faut et il suffit que α soit dans l'image de ϵ.*

Autrement dit $\epsilon(\mathfrak{D}) = \mathfrak{E}$. Il en résulte que pour tout réel R, l'ensemble des éléments $\alpha \in \mathfrak{E}$ tels que $r_\alpha \leq R$ est localement fini.

Théorème B : *Soient r un entier > 1, c_1 et $c_2 \in \mathbb{Z}$; on pose*

$$\mu \;=\; \frac{c_1}{r} \; , \quad \Delta \;=\; \frac{1}{r}\left(c_2 - \frac{r-1}{2r}c_1^2\right) \; .$$

Soient α le plus grand des éléments de $\mathfrak{E}$ tels que $r_\alpha \leq r/2$ et $\alpha \leq \mu$, et β le plus petit des éléments de $\mathfrak{E}$ tels que $r_\beta \leq r/2$ et $\mu \leq \beta$.

Pour qu'il existe un fibré stable de rang r, de classes de Chern c_1 et c_2 sur $\mathbb{P}_2$ il faut et il suffit que

$$\Delta \;\geq\; P(\alpha-\mu) - \Delta_\alpha \quad \textit{et} \quad \Delta \;\geq\; P(\mu-\beta) - \Delta_\beta \; .$$

Le calcul peut être mené jusqu'à son terme : par exemple, pour $r = 20$ et $c_1 = 9$, on a $\mu = 0,45$; le tableau ci-dessus montre que $\alpha = 0,4$ et $\beta = 0,5$. Les conditions ci-dessus s'écrivent

$$\Delta \ \geq \ P(-0,05) - \frac{12}{25} \quad \text{et} \quad \Delta \ \geq P(-0,05) - \frac{3}{8}$$

et sont équivalentes à $\Delta \geq 0,55125$, c'est-à-dire $c_2 \geq 50$.

La démonstration des théorèmes A et B sera donnée au chapitre 5 ; elle passe par l'intermédiaire suivant, qui sera démontré au chapitre 4 (§4.5) :

Théorème C : *Soient r un entier > 1, μ et Δ deux rationnels. Pour qu'il existe un fibré stable sur $\mathbb{P}_2$ de rang r, de pente μ, de discriminant Δ, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites*

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} (1)\ r\mu \in \mathbb{Z}\ , \quad r(P(\mu - \Delta)) \in \mathbb{Z}\ . \\ (2)\ \textit{Pour tout } \alpha \in \mathfrak{E} \textit{ tel que } r_\alpha < r \textit{ et } |\alpha - \mu| \leq 1, \textit{ on a } \Delta \geq P(-|\alpha - \mu|) - \Delta_\alpha\ . \end{array} \right.$$

Le fait que ces conditions soient nécessaires résulte facilement de la formule de Riemann-Roch (proposition (4.5) et remarque (4.6)). L'existence de fibrés stables quand les conditions (S) sont satisfaites ne sera démontrée au paragraphe 4.5 qu'avec l'hypothèse $\Delta \neq \frac{1}{2}$. Au chapitre 5, cette difficulté technique sera levée puisque nous montrerons que les conditions (S) imposent $\Delta \neq \frac{1}{2}$.

La démonstration du théorème d'existence s'inspire de la construction déjà proposée pour les fihrés de rang 2 dans [14]. Elle consiste à construire une grande famille $(E_s)_{s \in S}$ de fibrés vectoriels de rang r sur $\mathbb{P}_2$, paramétrée par une variété algébrique lisse irréductible S (c'est en fait un ouvert de $\mathbb{C}^n$, avec n convenable). De cette famille on doit enlever le fermé de Zariski correspondant aux fibrés non stables et vérifier que l'ouvert qui reste est non vide. Ceci se montre en minorant la codimension : c'est plus ou moins la stratification de Shatz [20] dont nous proposons une version raffinée au chapitre 3. Elle est adaptée à la notion de stabilité et de semi-stabilité qui nous a paru la meilleure ici, et qui est celle de Gieseker et Maruyama (cf. §2.1) ([7], [16]).

0.4 – Compléments. Une variante de la méthode ci-dessus permet d'obtenir le résultat suivant :

Théorème D : *Soit $M = M(r, \mu, \Delta)$ l'espace de modules de Maruyama des faisceaux semi-stables de rang r, de pente μ, de discriminant Δ. Alors M est irréductible.*

La démonstration de ce résultat s'appuie de façon essentielle sur le résultat d'Ellingsrud donnant déjà l'irréductibilité de l'ouvert de M correspondant aux fibrés stables ([7], cf. §4.1) ; il suffirait donc de savoir que cet ouvert est partout dense : c'est vrai, sauf peut-être si $\Delta \leq \frac{1}{2}$, et ceci repose sur les deux assertions suivantes :

(a) Les points de M correspondant aux faisceaux stables forment un ouvert partout dense dans M si $\Delta > \dfrac{1}{2}$ (cf. théorèmes (4.10) et (4.11)).

(b) Les points de M qui proviennent de faisceaux localement libres forment un ensemble partout dense dans M si $r > 1$ (cf. corollaire (2.9)).

La démonstration de (b) repose sur une description de $M = M(r, \mu, \Delta)$ qui nous a conduit à introduire au chapitre 2 les complexes de Kronecker stables et semi-stables, et à établir une équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux semi-stables normalisés et non triviaux, et celle des complexes de Kronecker semi-stables (normalisés) (cf. proposition (2.3)). Cette description a aussi son intérêt propre : elle résoud les questions que pose Hulek dans [12] en termes de “modules de Kronecker” pour les fibrés de classe de Chern $c_1 = 0$. C'est sans doute Barth qui le premier a considéré de tels complexes pour l'étude des espaces de modules de fibrés stables sur $\mathbb{P}_2$ ([2]).

Nous remercions le Referee dont les suggestions nous ont permis de clarifier la présentation, notamment du chapitre 5.

Terminologie – Par variété algébrique, on entend schéma de type fini sur $\mathbb{C}$, séparé. Ces variétés ne sont pas obligatoirement intègres. Par point, on entend point fermé,

Si une variété algébrique X est munie d'un faisceau inversible très ample $\mathcal{O}_X(1)$, on pose pour tout $\mathcal{O}_X$-module E

$$E(m) \;=\; E \otimes \mathcal{O}_X(m) \;.$$

Un fibré vectoriel algébrique sur X sera identifié avec le $\mathcal{O}_X$-module localement libre qu'il définit.

1. Généralités

1.1 – Pente, discriminant. Soit E un faisceau algébrique cohérent sur le plan projectif complexe $\mathbb{P}_2$, de rang $r > 0$, de classes de Chern c_1 et c_2. On appelle *pente* de E le rationnel

$$\mu(E) \;=\; \frac{c_1}{r} \tag{1.1}$$

et *discriminant* de E le rationnel

$$\Delta(E) \;=\; \frac{1}{r}\left(c_2 - \frac{c_1^2}{2} + \frac{c_1^2}{2r}\right) \;. \tag{1.2}$$

1.2 – Formule de Riemann-Roch. On désigne par P le polynôme

$$P(X) \;=\; 1 + \frac{3X}{2} + \frac{X^2}{2} \;.$$

Soit E un faisceau algébrique cohérent de rang $r > 0$, de pente μ, de discriminant Δ. Le théorème de Riemann-Roch prend la forme suivante :

$$(1.3) \qquad \chi(E) \ = \ r(P(\mu) - \Delta) \ ,$$

où $\chi(E) = \sum(-1)^i \dim(H^i(\mathbb{P}_2, E))$. En particulier, le polynôme de Hilbert de E $P_E(m) = \chi(E(m))$ est donné par

$$P_E(m) \ = \ r(P(\mu + m) - \Delta) \ .$$

1.3 – Les espaces vectoriels $\mathrm{Ext}^i(E, E')$**.** Soient E et E' deux faisceaux algébriques cohérents de rangs $r > 0$ et $r' > 0$, de pentes respectives μ et μ', de discriminants respectifs Δ et Δ'.

On pose $\chi(E, E') = \sum\limits_i (-1)^i \dim(\mathrm{Ext}^i(E, E'))$.

Proposition (1.1) (Riemann-Roch) **:** *On a*

$$(1.4) \qquad \chi(E, E') \ = \ rr'(P(\mu' - \mu) - \Delta - \Delta') \ .$$

Démonstration. Soient c_i et c'_i les classes de Chern respectives de E et E'. La formule (1.4) est encore équivalente à

$$(1.5) \quad \chi(E, E') \ = \ rr' + \frac{3}{2}(rc'_1 - r'c_1) + r'\left(\frac{1}{2}c_1^2 - c_2\right) + r\left(\frac{1}{2}{c'_1}^2 - c'_2\right) - c_1c'_1 \ .$$

Si on choisit pour chacun des faisceaux E et E' une résolution gauche par un complexe fini de fibrés vectoriels, on se ramène à prouver cette formule pour E et E' localement libres.

Si E et E' sont localement libres,

$$\mathrm{Ext}^i(E, E') \ = \ H^i(\mathbb{P}_2, \mathcal{H}om(E, E')) \ .$$

Le calcul du caractère de Chern du fibré $\mathcal{H}om(E, E')$:

$$\mathrm{ch}(\mathcal{H}om(E, E')) \ = \ \mathrm{ch}(E')\mathrm{ch}(E^*)$$

donne pour les classes de Chern les formules suivantes

$$(1.6) \quad \begin{aligned} c_1(\mathcal{H}om(E, E')) \ &= \ rc'_1 - r'c_1 \ , \\ \left(\frac{1}{2}c_1^2 - c_2\right)(\mathcal{H}om(E, E')) \ &= \ r'\left(\frac{1}{2}c_1^2 - c_2\right) + r\left(\frac{1}{2}{c'_1}^2 - c'_2\right) - c_1c'_1 \ . \end{aligned}$$

Le théorème de Riemann-Roch appliqué au fibré $\mathcal{H}om(E, E')$ conduit à la formule (1.5). $\square$

1.4 – Dualité de Serre. Soit E un faisceau algébrique cohérent sur une variété projective lisse X, de dimension n ; on désigne par Ω_X le faisceau des n-formes différentielles régulières sur X. On a alors un morphisme “trace” :

$$\mathrm{Tr} : \mathrm{Ext}^n(E, E \otimes \Omega_X) \longrightarrow \mathbb{C} \ ,$$

qu'on peut construire de la manière suivante : soit $R^\bullet \to E$ une résolution gauche finie de E par un complexe fini de faisceaux localement libres. Le groupe $\mathrm{Ext}^i(E, E \otimes \Omega_X)$ s'identifie à l'hypercohomologie $\mathbf{H}^i(X, \mathcal{H}om^\bullet(R^\bullet, R^\bullet \otimes \Omega_X))$ de X à valeurs dans le complexe des fibrés d'homomorphismes défini en degré q par

$$\mathcal{H}om^q(R^\bullet, R^\bullet \otimes \Omega_X) \;=\; \prod_i \mathcal{H}om(R^i, R^{i+q} \otimes \Omega_X)$$

et de différentielle évidente.

On peut alors définir un morphisme trace :

$$\mathrm{tr} : \mathcal{H}om^\bullet(R^\bullet, R^\bullet \otimes \Omega_X) \longrightarrow \Omega_X \ ,$$

par la formule, pour $f = (f_i) \in \mathcal{H}om^q(R^\bullet, R^\bullet \otimes \Omega_X)$

$$\mathrm{tr}(f) \;=\; \begin{cases} \sum_i (-1)^i \mathrm{trace}(f_i) & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{si } q \neq 0 \ . \end{cases}$$

Le morphisme Tr est par définition le morphisme induit en hypercohomologie ; il ne dépend pas de la résolution choisie.

Si F est un autre faisceau algébrique cohérent, on obtient en composant avec l'accouplement de Yoneda un accouplement

$$\mathrm{Ext}^i(E, F) \times \mathrm{Ext}^{n-i}(F, E \otimes \Omega_X) \longrightarrow \mathbb{C} \ .$$

Proposition (1.2) (Dualité de Serre) **.** *L'application linéaire*

$$d : \mathrm{Ext}^i(E, F) \longrightarrow \big(\mathrm{Ext}^{n-i}(F, E \otimes \Omega_X)\big)^* \ ,$$

induite par l'accouplement ci-dessus est un isomorphisme.

Démonstration. La proposition est bien connue si F est localement libre (Hartshorne [11], théorème 7.6). Dans le cas général, en prenant une résolution gauche finie de F par des faisceaux localement libres, on se ramène par récurrence sur la longueur de la résolution à vérifier l'assertion suivante : soit

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte de faisceaux algébriques cohérents sur X ; si la proposition est vraie pour (E, F') et (E, F), elle est vraie pour (E, F''). Il suffit donc de constater que dans le diagramme associé aux suites exactes longues et induit par d

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^i(E,F') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^i(E,F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^i(E,F'') \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
\mathrm{Ext}^{n-i}(F',E\otimes\Omega_X)^* \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{n-i}(F,E\otimes\Omega_X)^* \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{n-i}(F'',E\otimes\Omega_X)^* \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{i+1}(E,F') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^{i+1}(E,F) \arrow[d] \\
{} \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{n-i-1}(F',E\otimes\Omega_X)^* \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{n-i-1}(F,E\otimes\Omega_X)^*
\end{tikzcd}$$

les carrés sont soit commutatifs, soit anticommutatifs, et d'appliquer le lemme des cinq. $\square$

1.5 – Filtrations . Soit K un complexe de $\mathcal{O}_X$-modules au-dessus d'une variété algébrique X, borné à gauche, muni d'une filtration croissante F

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{l-1} \subset F_l = K \ .$$

On pose

$$\mathrm{gr}_i(K) \ = \ F_i/F_{i-1} \ .$$

Il existe alors une résolution injective[1] R, munie d'une filtration finie notée encore F, telle que le morphisme d'augmentation $\epsilon : K \to R$ soit compatible avec les filtrations, et que les morphismes associés sur les gradués

$$\mathrm{gr}_i(K) \longrightarrow \mathrm{gr}_i(R) \ ,$$

soient des résolutions injectives. Soit $\mathrm{Hom}^\bullet_{F,-}(K,R) \subset \mathrm{Hom}^\bullet(K,R)$ le sous-complexe des éléments $f = (f_q) \in \mathrm{Hom}^i(K,R)$, $f_q : K^q \to R^{i+q}$, compatibles avec les filtrations, c'est-à-dire $f_q(F_pK)^q \subset (F_pR)^{q+i}$; le complexe quotient sera noté $\mathrm{Hom}^\bullet_{F,+}(K,R)$. On désigne par $\mathrm{Ext}^i_{F,-}(K,K)$ et $\mathrm{Ext}^i_{F,+}(K,K)$ les groupes de cohomologie respectifs ; à isomorphisme près, ils sont indépendants de la résolution choisie, et on a une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_{F,-}(K,K) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(K,K) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_{F,+}(K,K) \longrightarrow \cdots$$

Proposition (1.3) *Soit K un complexe de $\mathcal{O}_X$-modules borné à gauche, muni d'une filtration croissante finie F.*

Il existe une suite spectrale dont le terme $E_1^{p,q}$ est donné par

$$E_1^{p,q} \ = \ \begin{cases} \prod_i \mathrm{Ext}^{p+q}(\mathrm{gr}_i(K), \mathrm{gr}_{i-p}(K)) & si \ p < 0 \\ 0 & si \ p \geq 0. \end{cases}$$

et d'aboutissement $\mathrm{Ext}^\bullet_{F,+}(K,K)$.

Démonstration. Considérons la résolution injective R ci-dessus, et désignons par $\mathrm{Hom}^{p,\bullet}(K,R)$ le sous-complexe de $\mathrm{Hom}^\bullet(K,R)$ des éléments $f = (f_q) \in \mathrm{Hom}^i(K,R)$, $f_q : K^q \to R^{i+q}$, tels que $f_q(F_j) \subset F_{j-p}$ pour tout $j = 1, \ldots, l$.

Ceci définit une filtration décroissante finie du complexe $\mathrm{Hom}^\bullet(K,R)$:

$$\mathrm{Hom}^\bullet_{F,-}(K,R) \subset \mathrm{Hom}^{-1,\bullet}(K,R) \subset \mathrm{Hom}^{-2,\bullet}(K,R) \subset \cdots$$

et par suite une filtration décroissante de $\mathrm{Hom}^\bullet_{F,+}(K,R)$ dont le gradué en degré $p < 0$ s'identifie à

$$\bigoplus_i \mathrm{Hom}^\bullet(\mathrm{gr}_i(K), \mathrm{gr}_{i-p}(R))$$

et est nul en degré ≥ 0.

Il suffit donc d'écrire la suite spectrale d'un complexe filtré pour obtenir la proposition (1.3). □

1. Par résolution injective d'un complexe de $\mathcal{O}_X$-modules borné à gauche on entend un morphisme de complexes de $\mathcal{O}_X$-modules bornés à gauche $\epsilon : K \to R$ induisant un isomorphisme sur les faisceaux de cohomologie, où R est un complexe de $\mathcal{O}_X$-modules injectifs

Remarque : On construit de la même façon une suite spectrale d'aboutissement $\mathrm{Ext}^\bullet_{F,-}(K,K)$ de terme E_1 donné par

$$E_1^{p,q} \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } p<0, \\ \prod_i \mathrm{Ext}^{p+q}(\mathrm{gr}_i(K), \mathrm{gr}_{i-p}(K)) & \text{si } p \geq 0. \end{cases}$$

Proposition (1.4) : *Soit K un complexe de $\mathcal{O}_X$-modules, muni d'une filtration F*

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{l-1} \subset F_l = K\ .$$

Considérons le complexe K/F_1, muni de la filtration F/F_1. On a une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^q_{F/F_1,+}(K/F_1, K/F_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}^q_{F,+}(K,K) \longrightarrow \mathrm{Ext}^q(F_1, K/F_1)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^{q+1}_{F/F_1,+}(K/F_1, K/F_1) \longrightarrow \cdots$$

Démonstration. Il suffit de constater que pour la résolution injective R considérée ci-dessus on a une suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}^\bullet_{F/F_1,+}(K/F_1, R/F_1R) \longrightarrow \mathrm{Hom}^\bullet_{F,+}(K,R) \longrightarrow \mathrm{Hom}^\bullet(F_1, R/F_1R) \longrightarrow 0$$

et de dérouler la suite exacte longue associée. □

1.6 – Drapeaux de Grothendieck [8]. Soit X une variété algébrique projective, lisse, munie d'un faisceau inversible ample $\mathcal{O}_X(1)$. On considère un $\mathcal{O}_X$-module cohérent E, et on désigne pour toute variété algébrique S par E_S l'image réciproque de E par la projection $pr_2 : S \times X \to X$.

Le foncteur $\underline{\mathrm{Quot}}^H(E)$ qui associe à S l'ensemble des $\mathcal{O}_X$-modules cohérents quotients G de E_S, S-plats et tels que pour tout $s \in S$ le polynôme de Hilbert de $G(s)$ soit un polynôme donné H, est représentable par une variété algébrique projective $\mathrm{Quot}^H(E)$.

Les points de $\mathrm{Quot}^H(E)$ sont donc les $\mathcal{O}_X$-modules cohérents quotients $G = E/F$, de polynôme de Hilbert H.

Les points suivants sont connus ([8], [15]) :

(a) l'espace tangent de Zariski au point E/F est $\mathrm{Hom}(F, E/F)$.

(b) Si $\mathrm{Ext}^1(F, E/F) = 0$, alors $\mathrm{Quot}^H(E)$ est lisse au voisinage du point E/F [2].

Plus généralement, soient $H_1, \ldots, H_l$ des polynômes à coefficients rationnels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{l} H_i$ soit le polynôme de Hilbert de E. Le foncteur qui à la variété algébrique S associe l'ensemble des drapeaux de $\mathcal{O}_{S\times X}$-modules cohérents

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_l = E_S\ ,$$

satisfaisant aux conditions suivantes

(P) pour tout i, $\mathrm{gr}_i = F_i/F_{i-1}$ est S-plat ;

2. Ceci résulte aussi de : Luc Illusie. *Complexe cotangent et déformations I.* Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 239, p.260.

(H) pour tout $s \in S$, le polynôme de Hilbert de $\mathrm{gr}_i(s)$ est H_i

est représentable par une variété projective, notée $\mathrm{Drap}^{H_1,\dots,H_l}(E)$, dont les points sont les drapeaux F

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_l = E\ ,$$

tels que $\mathrm{gr}_i = F_i/F_{i-1}$ ait H_i pour polynôme de Hilbert. Au point F, l'espace tangent de Zariski à $\mathrm{Drap}^{H_1,\dots,H_l}(E)$ est l'espace $\mathrm{Ext}^0_{F,+}(E,E)$ relatif à la filtration F ; de plus, si $\mathrm{Ext}^1_{F,+}(E,E) = 0$, alors $\mathrm{Drap}^{H_1,\dots,H_l}(E)$ est lisse au voisinage de F.

Variante à paramètres – Soit S une variété algébrique. On se donne un $\mathcal{O}_{S\times X}$-module E cohérent S-plat, et des polynômes $H_1,\dots,H_l$ à coefficients rationnels. Pour tout morphisme $f : S' \to S$, on désigne par $E_{S'}$ le $\mathcal{O}_{S'\times X}$-module

$$E_{S'} \ = \ (f \times \mathrm{id}_X)^* E$$

et on considère le foncteur qui à S' associe l'ensemble des drapeaux de $\mathcal{O}_{S'\times X}$-modules cohérents

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_l = E_{S'}\ ,$$

tels que les conditions suivantes soient satisfaites

(P) le quotient $\mathrm{gr}_i = F_i/F_{i-1}$ est S'-plat ;

(H) pour tout $s \in S'$ le polynôme de Hilbert de $\mathrm{gr}_i(s)$ est H_i.

Ce foncteur est représentable par une variété projective relative $\mathrm{Drap}^{H_1,\dots,H_l}(E) \to S$ dont la fibre au-dessus de $s \in S$ n'est autre que $\mathrm{Drap}^{H_1,\dots,H_l}(E(s))$.

Proposition (1.5) : *Soient E un $\mathcal{O}_{S\times X}$-module cohérent S-plat, $H_1,\dots,H_l$ des polynômes à coefficients rationnels. Soient $s \in S$ et $F \in \mathrm{Drap}^{H_1,\dots,H_l}(E(s))$. On a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^0_{F,+}(E(s),E(s)) \longrightarrow T_F\,\mathrm{Drap}^{H_1,\dots,H_l}(E) \longrightarrow T_sS \xrightarrow{\omega_+} \mathrm{Ext}^1_{F,+}(E(s),E(s)),$$

où ω_+ est le morphisme composé

$$T_sS \xrightarrow{\omega} \mathrm{Ext}^1(E(s),E(s)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{F,+}(E(s),E(s)),$$

du morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer ω et du morphisme canonique décrit au paragraphe 1.5.

Rappelons la définition du morphisme ω de Kodaïra-Spencer. Soient $s \in S$, m_s l'idéal de s. Soit $X(s)$ la fibre de $X \times S$ au-dessus de s, et $X(s)^{(2)}$ le voisinage infinitésimal d'ordre 2 de la fibre $X(s)$. Sur $X(s)^{(2)}$ on a une suite exacte de modules

$$0 \longrightarrow T_s^*S \otimes E(s) \longrightarrow E/m_s^2E \longrightarrow E(s) \longrightarrow 0$$

et la projection $X(s)^{(2)} \to X(s)$ permet de regarder cette suite exacte comme une suite exacte de modules sur $X(s)$. L'obstruction au scindage définit un élément

$$\omega \ \in \ \mathrm{Ext}^1(E(s), T_s^*S \otimes E(s)) \ \simeq \ T_s^*S \otimes \mathrm{Ext}^1(E(s),E(s))\ ,$$

qui est par définition l'invariant de Kodaïra-Spencer.

Lemme (1.6) : *Soient G un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, E un $\mathcal{O}_{S\times X}$-module cohérent S-plat quotient de G_S par un sous-module K et tel que pour tout $s \in S$, le polynôme de Hilbert de $E(s)$ soit H. Considérons le morphisme défini par E :*

$$f : S \to \mathrm{Quot}^H(G)\ .$$

Le diagramme :

$$\begin{tikzcd} T_sS \arrow[r, "T_sf"] \arrow[dr, "\omega"'] & \mathrm{Hom}(K(s), E(s)) \arrow[d, "\delta"] \\ & \mathrm{Ext}^1(E(s), E(s)) \end{tikzcd}$$

dans lequel ω est le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer de E et δ l'homomorphisme de liaison, est commutatif.

Démonstration. Vu la platitude de E sur S, on a un diagramme de suites exactes courtes (où on a posé $T_s = T_sS$) :

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & T_s^* \otimes K(s) \arrow[r] \arrow[d] & K/m_s^2K \arrow[r] \arrow[d] & K(s) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & T_s^* \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & G/m_s^2G \arrow[r] \arrow[d, "\rho_1"] & G \arrow[r] \arrow[d] \arrow[l, bend right, "\sigma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & T_s^* \otimes E(s) \arrow[r] \arrow[d] & E/m_s^2E \arrow[r] \arrow[d] & E(s) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

La suite exacte relative à G se scinde canoniquement. Ce scindage induit un morphisme $\rho_1\sigma : G \to E/m_s^2E$ ce qui permet de construire un morphisme de suites exactes courtes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K(s) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & G \arrow[r] \arrow[d, "\rho_1\sigma"] & E(s) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & T_s^* \otimes E(s) \arrow[r] & E/m_s^2E \arrow[r] & E(s) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Au signe près, le morphisme ϕ obtenu s'identifie au transposé de l'application linéaire tangente $T_s \to \mathrm{Hom}(K(s), E(s))$; si on écrit pour ce diagramme les suites exactes dérivées du foncteur $\mathrm{Hom}(\bullet, T_s^* \otimes E(s))$, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(K(s), T_s^* \otimes E(s)) \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{Ext}^1(E(s), T_s^* \otimes E(s)) \\ \mathrm{Hom}(T_s^* \otimes E(s), T_s^* \otimes E(s)) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Ext}^1(E(s), T_s^* \otimes E(s)) \arrow[u, equal] \end{tikzcd}$$

où δ est l'homomorphisme de liaison. Il en résulte $\delta(\phi) = -\omega$ ce qui démontre le lemme (1.6). □

Démonstration de la proposition (1.5). La première partie de la suite exacte résulte du fait que la fibre du morphisme projectif $\mathrm{Drap}^{H_1,\ldots,H_l}(E) \to S$ au-dessus de s n'est autre que $\mathrm{Drap}^{H_1,\ldots,H_l}(E(s))$. Reste à obtenir l'exactitude au niveau T_sS. On peut supposer, quitte à se limiter à un ouvert de S, que le polynôme de Hilbert de $E(s)$ ne dépend pas de s. Choisissons un fibré très ample L sur X tel que pour tout $s \in S$

1. $E(s) \otimes L$ soit engendré par ses sections,
2. $H^q(E(s) \otimes L) = 0$ pour $q \geq 1$.

Posons $N = \chi(E(s) \otimes L)$, $G = L^* \otimes \mathbb{C}^N$. Sur $S \times X$, on a alors un morphisme d'évaluation surjectif

$$\mathrm{ev} : pr_2^*(G) = G_S \longrightarrow E \ ,$$

dont on désigne le noyau par K. Soit $f : S \to \mathrm{Quot}^H(G)$ le morphisme défini par E, H désignant le polynôme de Hilbert de E. Soit H_0 le polynôme de Hilbert des noyaux des morphismes surjectifs $G \to E(s)$. Considérons la double flèche

$$S \times \mathrm{Drap}^{H_0,\ldots,H_l}(G) \rightrightarrows \mathrm{Quot}^H(G) \ ,$$

où $H = \sum_{i\geq 1} H_i$, définie par f et par le morphisme $(s, F'_0, \ldots, F'_l) \mapsto G/F'_0$. Le noyau de cette double flèche s'identifie à $\mathrm{Drap}^{H_1,\ldots,H_l}(E)$. Soient $s \in S$, $F \in \mathrm{Drap}^{H_1,\ldots,H_l}(E(s))$ et F'_i l'image réciproque de F_i dans G. Posons enfin $F' = (K(s), F'_1, \ldots, F'_l)$. On a donc la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow T_F\,\mathrm{Drap}^{H_1,\ldots,H_l}(E) \longrightarrow & T_sS \oplus T_{F'}\,\mathrm{Drap}^{H_0,\ldots,H_l}(G) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(K(s), E(s)) \\ & (u,v) & \longmapsto & Tf(u) - jv \end{array}$$

où j est le morphisme qui figure dans la suite exacte de la proposition (1.4) :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^0_{F,+}(E(s), E(s)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^0_{F',+}(G, G) \xrightarrow{j} \mathrm{Hom}(K(s), E(s)) \xrightarrow{\delta_+} \mathrm{Ext}^1_{F,+}(E(s), E(s)).$$

Il en résulte l'exactitude de la suite exacte de la proposition (1.5) avec $\omega_+ = \delta_+ T_s f$. Or, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Ext}^1(E(s), E(s)) \arrow[dd, "p"] \\ \mathrm{Hom}(K(s), E(s)) \arrow[ur, "\delta"] \arrow[dr, "\delta_+"'] & \\ & \mathrm{Ext}^1_{F,+}(E(s), E(s)) \end{tikzcd}$$

où p est l'homomorphisme canonique. Il résulte du lemme (1.6) que $\omega_+ = p \circ \delta \circ T_s f = p \circ \omega$. D'où la proposition. □

Proposition (1.7) : *On garde les notations de la proposition (1.5), et on suppose en outre que S est lisse et que (s, F) satisfait aux conditions suivantes*

1. $\mathrm{Ext}^2(E(s), E(s)) = 0$.

2. le morphisme ω_+ *est surjectif.*

Alors $\mathrm{Drap}^{H_1,\dots,H_l}(E)$ *est lisse au voisinage du point* F.

Démonstration. Vérifions d'abord que $\mathrm{Quot}^H(G)$ est lisse au voisinage du point $E(s)$. Par définition de L, on a $H^1(E(s)\otimes L) = 0 = H^2(E(s)\otimes L)$. La suite exacte longue dérivée du foncteur $\mathrm{Hom}(\bullet, E(s))$, appliquée à la suite exacte $0 \to K(s) \to G \to E(s) \to 0$ conduit à l'isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^1(K(s), E(s)) \simeq \mathrm{Ext}^2(E(s), E(s))$$

et donc $\mathrm{Ext}^1(K(s), E(s)) = 0$.

Montrons maintenant que $\mathrm{Drap}^{H_0,\dots,H_l}(G)$ est lisse au voisinage de F'. Le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
T_sS \oplus T_{F'}\,\mathrm{Drap}^{H_0,\dots,H_l}(G) \arrow[r, "(u,v)\mapsto Tf(u)-jv"] \arrow[d, "pr_1"] & \mathrm{Hom}(K(s), E(s)) \arrow[d, "\delta_+"] \\
T_sS \arrow[r, "\omega_+"] & \mathrm{Ext}^1_{F,+}(E(s), E(s))
\end{tikzcd}$$

montre, ω_+ étant surjective ainsi que pr_1, que δ_+ est surjective. La suite exacte de la proposition (1.4), compte tenu du fait que $\mathrm{Ext}^1(K(s), E(s)) = 0$, s'écrit :

$$\mathrm{Hom}(K(s), E(s)) \xrightarrow{\delta_+} \mathrm{Ext}^1_{F,+}(E(s), E(s)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{F',+}(G, G) \longrightarrow 0$$

et par suite $\mathrm{Ext}^1_{F',+}(G, G) = 0$.

Vérifions que l'application linéaire $(u, v) \mapsto Tf(u) - jv$ est surjective. Si $w \in \mathrm{Hom}(K(s), E(s))$, il existe puisque ω_+ est surjective, $(u, v) \in T_sS \oplus T_{F'}\,\mathrm{Drap}^{H_0,\dots,H_l}(G)$ tels que $\delta_+ w = \delta_+(Tf(u) - jv)$ et il suffit donc de remarquer que $\ker(\delta_+) \subset \mathrm{im}(j)$. Le théorème de submersion donne alors la lissité de $\mathrm{Drap}^{H_1,\dots,H_l}(E)$ au voisinage de F. □

2. Variétés de modules de Maruyama des faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$

2.1 – Faisceaux semi-stables . Les notions de stabilité et semi-stabilité que nous rappelons ici sont celles de Gieseker et Maruyama ([7], [16]).

Soit E un faisceau algébrique cohérent sur $\mathbb{P}_2$ On dit que E est *stable* (resp. *semi-stable*) si E est sans torsion, et si pour tout sous-module cohérent F, $0 \neq F \neq E$ on a

$$\mu(F) \le \mu(E)$$

et en cas d'égalité $\Delta(F) > \Delta(E)$ (resp. $\Delta(F) \geq \Delta(E)$).

Il revient au même d'écrire que pour les polynômes de Hilbert de F et E on a

$$\frac{P_F(m)}{r(F)} < \frac{P_E(m)}{r(E)} \qquad \text{(resp. } \le \text{)}$$

pour $m \gg 0$, $r(E)$ et $r(F)$ désignant les rangs respectifs de E et F.

Les faisceaux semi-stables de pente μ, de discriminant Δ constituent une catégorie abélienne, noethérienne et artinienne, stable par extensions. On peut donc définir une filtration de Jordan-Hölder pour E semi-stable

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_{l-1} \subset F_l = E \ ,$$

telle que $\mathrm{gr}_i(E) = F_i/F_{i-1}$ soit stable, de pente μ, de discriminant Δ. La classe d'isomorphisme de

$$\mathrm{gr}(E) \ = \ \bigoplus_i F_i/F_{i-1}$$

ne dépend pas de la filtration. L'espace de modules de Maruyama $M_{\mathbb{P}_2}(r,\mu,\Delta)$ (aussi noté $M(r,\mu,\Delta)$) des faisceaux semi-stables de rang r, de pente μ, de discriminant Δ a pour ensemble sous-jacent l'ensemble des classes d'équivalence de faisceaux semi-stables pour la relation d'équivalence : $E \sim F$ si et seulement si les gradués de Jordan-Hölder $\mathrm{gr}(E)$ et $\mathrm{gr}(F)$ sont isomorphes ([16]).

On se propose dans ce paragraphe de donner une description de $M_{\mathbb{P}_2}(r,\mu,\Delta)$. On peut naturellement se borner au cas $-1 < \mu \leq 0$: nous dirons que les faisceaux correspondants sont *normalisés*.

Le résultat suivant sera généralisé au paragraphe 4.3.

Lemme (2.1) : *Soit E un faisceau semi-stable normalisé non trivial. Alors $h^0(E) = 0$, et $\mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}(-1)) = 0$.*

Démonstration. La condition $-1 < \mu$ entraîne évidemment $\mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}(-1)) = 0$.

Si $h^0(E) \neq 0$, il existe un morphisme injectif de faisceaux $\mathcal{O} \to E$, et par semi-stabilité de E on a $\mu \geq 0$, donc $\mu = 0$, et $\Delta \leq 0$. La semi-stabilité de E entraine aussi que $h^0(E(-1)) = 0$. Puisque $\mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}(-1)) = 0$, par dualité de Serre, il en résulte $h^2(E(-2)) = 0$, et par suite $h^2(E(i)) = 0$ pour $i \geq -2$. Il résulte du théorème de Riemann-Roch que

$$\chi(E(-1)) \ = \ -r\Delta \ \leq 0 \ ,$$

donc $\Delta \geq 0$ et finalement $\Delta = 0$.

Considérons une filtration de Jordan-Hölder de E : chaque $\mathrm{gr}_i(E)$ est stable de pente 0, de discriminant 0. Soit r_i le rang du faisceau $\mathrm{gr}_i(E)$; d'après le théorème de Riemann-Roch, $\chi(\mathrm{gr}_i(E)) = r_i$; ce faisceau a donc une section non nulle, ce qui fournit un morphisme injectif $\mathcal{O} \to \mathrm{gr}_i(E)$. À cause de la stabilité, c'est un isomorphisme. Ceci entraîne que la filtration se scinde, et par suite $E \simeq \mathcal{O}^r$. □

2.2 – Filtration de Harder-Narasimhan. La filtration que nous décrirons ici généralise celle que proposent Harder et Narasimhan sur les courbes [10]. Elle est plus fine que celle de Shatz [20] [3].

3. Cette filtration peut en fait se définir sur toute surface projective X munie d'un faisceau inversible ample $\mathcal{O}_X(1)$

Lemme (2.2) : *Soit E un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$-module cohérent sans torsion de rang r.*

(a) Le degré des sous-modules cohérents $F \subset E$ est majoré.

(b) La caractéristique d'Euler-Poincaré des sous-modules cohérents $F \subset E$ de degré fixé d est majorée.

Démonstration. Par récurrence sur le rang r ; le résultat est trivial pour $r = 1$. Pour $r > 1$, on peut trouver des $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$-modules cohérents sans torsion E' et E'' de rang inférieur tels que E s'insère dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0 \ .$$

Soient C' et C'' des majorants pour le degré des sous-modules cohérents de E' et E'' respectivement. Si F est un sous-module cohérent de E, on désigne par F'' son image dans E'' et par F' l'intersection $E' \cap F$. Alors

$$c_1(F) \ = \ c_1(F') + c_1(F'') \ \leq \ C' + C'' \ .$$

Si $c_1(F) = d$, les inégalités $C' \geq c_1(F') \geq d - C''$ et $C'' \geq c_1(F'') \geq d - C'$ et l'hypothèse de récurrence montrent que $\chi(F')$ et $\chi(F'')$ sont majorés. Il en est de même de $\chi(F) = \chi(F') + \chi(F'')$. D'où le lemme. □

Soit E un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$-module sans torsion, de rang $r > 0$, de pente μ et de discriminant Δ. Il existe alors un unique sous-module cohérent $F_1 \subset E$ satisfaisant à la propriété suivante : pour tout sous-module cohérent $0 \neq F' \subset E$, on a $\mu(F') \leq \mu(F_1)$, et en cas d'égalité, $\Delta(F') \geq \Delta(F_1)$. De plus, si $\mu(F') = \mu(F_1)$ et $\Delta(F') = \Delta(F_1)$, $r(F') \leq r(F_1)$.

Le sous-faisceau $F_1 \subset E$ ainsi construit est évidemment semi-stable ; on l'appelle le *sous-faisceau semi-stable maximal*. Le quotient $E_1 = E/F_1$ est alors cohérent et sans torsion ; s'il est non nul, on peut recommencer la construction ci-dessus. On obtient ainsi une filtration de E par des sous-modules cohérents

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_{l-1} \subset F_l = E \ ,$$

telle que $\mathrm{gr}_i = F_i/F_{i-1}$ soit semi-stable et telle que

soit $\mu(\mathrm{gr}_{i+1}) < \mu(\mathrm{gr}_i)$,

soit $\mu(\mathrm{gr}_{i+1}) = \mu(\mathrm{gr}_i)$ et $\Delta(\mathrm{gr}_{i+1}) > \Delta(\mathrm{gr}_i)$.

Cette filtration est la seule filtration de E qui satisfasse à ces propriétés ; on l'appelle la *filtration de Harder-Narasimhan.*

2.3 – Complexes de Kronecker. Soit K un complexe fini de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$-modules cohérents. On définit le rang $r = r(K)$, le degré $c_1 = c_1(K)$, la caractéristique d'Euler $\chi = \chi(K)$, et le polynôme de Hilbert P_K de K par les formules

$$r = \sum_i (-1)^i r(K^i), \quad c_1 = \sum_i (-1)^i c_1(K^i), \quad \chi = \sum_i (-1)^i \chi(K^i), \quad P_k(m) = \sum_i (-1)^i P_{K^i}(m).$$

On appelle *complexe de Kronecker* un complexe de type

$$0 \longrightarrow H_{-1} \otimes \wedge^2 Q^* \xrightarrow{\ u\ } H_0 \otimes Q^* \xrightarrow{\ v\ } H_1 \otimes \mathcal{O} \longrightarrow -0 \ ,$$

où les H_i sont des espaces vectoriels de dimension finie, et Q le fibré quotient universel de rang 2 sur $\mathbb{P}_2$.

Les complexes de Kronecker forment une catégorie abélienne. Soit K un complexe de Kronecker de rang r, de degré c_1, de caractéristique χ ; on dit que K est *stable* (resp. *semi-stable*) si pour tout sous-complexe de Kronecker $0 \subsetneq K' \subsetneq K$, de rang $r' = r(K')$ on a pour $m \gg 0$

$$rP_{K'}(m) - r'P_K(m) \ < \ 0 \qquad (\text{resp. } \leq 0) \ .$$

On peut bien entendu traduire cette condition en termes de degré et de caractéristique : elle est équivalente à

$$rc_1(K') - r(K')c_1 \ \leq \ 0$$

et, en cas d'égalité, $r\chi(K') - r(K')\chi < 0$ (resp. ≤ 0).

On dit qu'un complexe de Kronecker K de rang r, de degré c_1 est *normalisé* si $-r < c_1 \leq 0$.

La dimension des espaces vectoriels H_i est déterminée par r, c_1 et χ. La condition de normalisation ci-dessus peut alors se lire sur les conditions suivantes

$$\dim(H_{-1}) \ \leq \ \dim(H_0) \ , \qquad \dim(H_0) \ > \ \dim(H_1) \ .$$

Proposition (2.3) : *Soit K un complexe de Kronecker semi-stable normalisé de rang r, de degré c_1, de caractéristique d'Euler χ :*

$$0 \longrightarrow H_{-1} \otimes \wedge^2 Q^* \xrightarrow{u} H_0 \otimes Q^* \xrightarrow{v} H_1 \otimes \mathcal{O} \longrightarrow 0 \ .$$

(1) *Le morphisme u est injectif en dehors d'un nombre fini de points ; le morphisme v est surjectif et le faisceau de cohomologie $E = H^0(K)$ est sans torsion.*

(2) *Si K et K' sont deux complexes de Kronecker normalisés et semi-stables de faisceaux de cohomologie E et E' respectivement*[4]

$$H^q(\mathrm{Hom}^\bullet(K,K')) \ = \ \mathrm{Ext}^q(K,K') \ = \ \mathrm{Ext}^q(E,E') \ .$$

(3) *Le faisceau de cohomologie $E = H^0(K)$ est semi-stable de rang r, de degré c_1, de caractéristique d'Euler χ. De plus, K est stable si et seulement si E est stable.*

(4) *Tout faisceau semi-stable normalisé non trivial est le faisceau de cohomologie d'un complexe de Kronecker normalisé semi-stable.*

Cet enoncé signifie en particulier que la catégorie des complexes de Kronecker semi-stables normalisés est équivalente à celle des faisceaux semi-stables normalisés.

Démonstration. Appelons *élémentaire* un complexe de Kronecker d'un des types suivants

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{I} & 0 \longrightarrow \wedge^2 Q^* \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \ , \\
\mathrm{II} & 0 \longrightarrow \wedge^2 Q^* \longrightarrow Q^* \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \ , \\
\mathrm{III} & 0 \longrightarrow \wedge^2 Q^* \longrightarrow Q^* \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0 \ , \\
\mathrm{IV} & 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow Q^* \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0 \ , \\
\mathrm{IV} & 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0 \ ,
\end{array}$$

où les complexes II, III, IV sont associés à une section non nulle du fibré canonique Q.

4. Rappelons que $\mathrm{Ext}^q(K,K') = H^q[\mathrm{Hom}(K,R')]$, où R' est une résolution injective de K'.

(1) *Injectivité de u en dehors d'un nombre fini des points.* Remarquons d'abord que si u n'est pas injectif comme morphisme de fibrés vectoriels, il contient obligatoirement un sous-complexe élémentaire de type I, II ou III.

Supposons d'abord $c_1 < 0$. Il existe une filtration de K par des sous-complexes de Kronecker

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_l \subset K$$

telle que $\mathrm{gr}_i = F_i/F_{i-1}$ soit élémentaire de type III et telle que K/F_l ne contienne pas de sous-complexe de type III. Montrons que K/F_l ne contient pas de sous-complexe de type I, ni du type II. Si tel était le cas, il existerait par image réciproque dans K un sous-complexe $K' \subset K$ de même rang et de même classe de Chern que l'un des complexes I ou II. Le tableau suivant montre que ceci est exclus à cause de la semi-stabilité de K :

	$c_1(K')$	$r(K')$	$rc_1(K') - c_1r(K')$
I	1	-1	$c_1 + r > 0$
II	0	1	$-c_1 > 0$

Supposons maintenant $c_1 = 0$. Il existe une filtration de K

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_l \subset K$$

par des sous-complexes de Kronecker tels que $\mathrm{gr}_i = F_i/F_{i-1}$ soit élémentaire de type II ou III et tels que K/F_l ne contienne pas de sous-complexe élémentaire de type II ou III. Alors K/F_l ne contient pas non plus de sous-complexe élémentaire de type I : en effet, si c'était le cas, il existerait par image réciproque dans K un sous-complexe $K' \subset K$ de degré $c_1(K') > 0$, et alors

$$rc_1(K') - c_1r(K') \ = \ rc_1(K') \ > 0 \ ,$$

ce qui contredit la semi-stabilité de K.

Dans les deux situations, le morphisme u est injectif, sauf peut-être en l points.

Surjectivité de v. Si v n'était pas surjectif, K aurait un quotient élémentaire L de type III, IV ou V. Or, le tableau suivant montre que la semi-stabilité de K exclut ces trois cas :

	$c_1(L)$	$\chi(L)$	$r(L)$	$rc_1(L) - r(L)c_1$	$r\chi(L) - r(L)\chi$
III	0	-1	0	0	$-r < 0$
IV	-1	-1	1	$-(c_1 + r) < 0$	$-$
V	0	-1	-1	$c_1 \leq 0$	$-r + \chi < 0$

Le faisceau $E = H^0(K)$ *est sans torsion.* Dans le cas $c_1 < 0$, on remarque que pour la filtration donnée ci-dessus, le morphisme canonique

$$H^0(K) \longrightarrow H^0(K/F_l) \ ,$$

est injectif (comme morphisme de faisceaux), et que $H^0(K/F_l)$ est localement libre. Dans le cas $c_1 = 0$, on constate encore que la filtration décrite ci-dessus permet d'obtenir sur $H^0(K)$ une filtration dont le gradué est sans torsion.

(2) La démonstration est la même que celle de [13], lemme 23.

(3) *Semi-stabilité de* $E = H^0(K)$. Remarquons d'abord que $h^0(E) = 0 = h^2(E(-2))$.
Si E n'est pas semi-stable, il a un sous-faisceau $0 \neq F \subsetneq E$ satisfaisant aux conditions suivantes

(A) $\mu(F) \geq \mu$, et en cas d'égalité $\dfrac{\chi(F)}{r(F)} > \dfrac{\chi}{r}$.

(B) $h^0(E/F) = 0$, et E/F est sans torsion.

Considérons en effet la filtration de Harder-Narasimhan de E

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_l = E \ .$$

Pour $m \gg 0$, on a

$$\frac{P_{\mathrm{gr}_l(E)}(m)}{r(\mathrm{gr}_l(E))} \ < \ \frac{P_E(m)}{r} \ .$$

Il découle de la semi-stabilité de $\mathrm{gr}_l(E)$ que $h^0(\mathrm{gr}_l(E)) = 0$. D'autre part, pour $m \gg 0$

$$\frac{P_{F_{l-1}}(m)}{r(F_{l-1})} \ > \ \frac{P_E(m)}{r} \ .$$

Il suffit donc de choisir $F = F_{l-1}$.

Au faisceau E, on peut associer une suite spectrale, dite de Beilinson ([13], [21]), dont le terme E_1 est donné par

$$E_1^{p,q} \ = \ H^q(E(p)) \otimes \wedge^{-p} Q^*$$

et qui a pour aboutissement E en degré 0, 0 en degré $\neq 0$. De même à F on associe une suite spectrale de Beilinson, et l'inclusion $F \to E$ conduit à un morphisme sur ces suites spectrales, et par suite sur les complexes de Kronecker $K(F)$ et $K(E)$ qui figurent dans le terme E_1 de ces suites spectrales :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(F(-2)) \otimes \wedge^2 Q^* \arrow[r] \arrow[d] & H^1(F(-1)) \otimes Q^* \arrow[r] \arrow[d] & H^1(F) \otimes \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^1(E(-2)) \otimes \wedge^2 Q^* \arrow[r] & H^1(E(-1)) \otimes Q^* \arrow[r] & H^1(E) \otimes \mathcal{O} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Les conditions $h^0(E) = h^2(E(-2)) = 0$ impliquent que les faisceaux de cohomologie de $K(E)$ sont $(0, E, 0)$. On déduit de (2) un isomorphisme $K(E) \simeq K$. Le complexe $K(F)$ s'identifie à un sous-complexe de K d'après la condition (B) ; ses faisceaux de cohomologie sont $(0, G_0, G_1)$, et la suite spectrale de Beilinson de F conduit à une suite exacte

$$0 \longrightarrow G_0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow G_1 \longrightarrow 0 \ ,$$

où G est le noyau du morphisme de fibrés vectoriels $d_1^{-2,2}$ (obligatoirement de rang constant)

$$H^2(F(-2)) \otimes \wedge^2 Q^* \longrightarrow H^2(F(-1)) \otimes Q^* \ .$$

On a alors

$$rc_1(K(F)) - r(K(F))c_1 \ = \ rc_1(F) - r(F)c_1 - (rc_1(G) - r(G)c_1) \ .$$

Si $G \neq 0$, on a $\mu(G) \leq \mu(\wedge^2 Q^*) = -1 < \dfrac{c_1}{r} = \mu$. D'après la condition (A) on obtient $rc_1(K(F)) - r(K(F))c_1 > 0$, ce qui contredit la semi-stabilite de K. Si $G = 0$, alors $K(F)$ et F ont même rang, même degré et même caractéristique d'Euler. La condition (A) contredit encore la semi-stabilité de K.

Stabilité de E si K est stable. Supposons E non stable ; il a alors un sous-faisceau semi-stable $0 \neq F \subsetneq E$ de même pente et même discriminant que E. On a donc

$$(A') \qquad \mu(F) \ = \ \mu \ \leq \ 0 \ ; \qquad \frac{\chi(F)}{r(F)} \ = \ \frac{\chi}{r} \ \leq \ 0$$

et la même chose pour le quotient E/F. Puisque E/F est semi-stable, ceci entraîne d'après le lemme (2.1) :

$$(B) \qquad h^0(E/F) \ = \ 0 \ .$$

Comme ci-dessus, la suite spectrale de Beilinson de F donne lieu à un sous-complexe $0 \neq K(F) \subsetneq K$, et la semi-stabilité de K impose encore que les faisceaux de cohomologie de $K(F)$ sont $(0, F, 0)$. D'après la stabilité de K, on a

$$r\chi(K(F)) - r(K(F))\chi \ < \ 0 \ ,$$

ce qui est en contradiction avec la condition (A').

(4) *Complexe associé à un faisceau – Sous-complexe maximal.* Soit K un complexe de Kronecker normalisé de rang r, de degré c_1, de caractéristique d'Euler χ. On dit qu'un sous-complexe de Kronecker $K' \subset K$ est *maximal* si

(1) K' réalise le maximum de $rc_1(K') - r(K')c_1$,

(2) parmi les sous-complexes de K qui réalisent le maximum de (1), K' réalise le maximum de $r\chi(K') - r(K')\chi$.

Les lemmes suivants étendent à un complexe normalisé quelconque les résultats de l'assertion (1) de la proposition.

Lemme (2.4) : *Soit $K' \subset K$ un sous-complexe maximal de K. Alors $H^1(K') = 0$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que K' n'a pas de quotient élémentaire L de type III, IV ou V. Si tel était le cas, désignons par L' le noyau de la projection $K' \to L$. On aurait

$$rc_1(L') - r(L')c_1 \;=\; rc_1(K') - r(K')c_1 - (rc_1(L) - r(L)c_1)$$

et la même chose en remplaçant degré par caractéristique d'Euler. Or, le second tableau de la démonstration de (1) montre que K' ne serait pas maximal. □

Lemme (2.5) : *Soit K' un sous-complexe maximal de K, $K'' = K/K'$ le quotient. Alors $H^{-1}(K'') = 0$.*

Démonstration. Supposons $c_1 < 0$. Il existe une filtration

$$K' = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_l = K \ ,$$

telle que $\mathrm{gr}_i = F_i/F_{i-1}$ soit élémentaire de type III et tel que K/F_l ne contienne pas de sous-complexe élémentaire de type III. Alors K/F_l ne contient pas non plus de sous-complexe élémentaire L de type I ou II, car si c'était le cas, on aurait pour son image réciproque L' dans K

$$rc_1(L') - r(L')c_1 \;=\; rc_1(K') - r(K')c_1 + rc_1(L) - r(L)c_1 \ .$$

Or, premier tableau de la démonstration de (1) (avec L à la place de K') montre que le sous-complexe L' contredit la maximalité de K'.

Supposons $c_1 = 0$. Il existe une filtration de K

$$K' = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_l = K \ ,$$

telle que $\mathrm{gr}_i = F_i/F_{i-1}$ soit élémentaire de type II ou III et telle que K/F_l ne contienne pas de sous-complexe élémentaire de type II ou III. Alors $c_1(K') = c_1(F_l)$. Le complexe K/F_l ne peut contenir de sous-complexe élémentaire de type I, car si c'était le cas, il existerait un sous-complexe $L' \supset F_l \supset K'$ tel que

$$rc_1(L') - r(L')c_1 \;=\; r(c_1(K') + 1) \;>\; rc_1(K') - r(K')c_1 \ ,$$

ce qui contredit le fait que K' est maximal.

Dans les deux situations ci-dessus, on a $H^{-1}(F_i/F_{i-1}) = 0$ pour $i \geq 1$, et $H^{-1}(K/F_l) = 0$. Par suite $H^{-1}(K/K') = 0$. □

Fin de la démonstration de la proposition (2.3). Soit E un faisceau semi-stable normalisé de rang r, de degré c_1 de caractéristique d'Euler χ. Si E n'est pas trivial on a d'après le lemme (2.1) : $h^0(E) = 0$, et $\mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}(-1)) = 0$, c'est-à-dire par dualité de Serre $h^2(E(-2)) = 0$. Le complexe de Kronecker $K = K(E)$ associé à E par la suite spectrale de Beilinson a alors pour faisceaux de cohomologie $(0, E, 0)$. Il s'agit de vérifier que le complexe normalisé K est semi-stable.

Soit $K' \subset K$ un sous-complexe maximal de K, $K'' = K/K'$. D'après les lemmes (2.4) et (2.5) on a $H^1(K') = 0$ et $H^{-1}(K'') = 0$. Il en résulte que les faisceaux de cohomologie de K' sont de la forme $(0, E', 0)$ et que le morphisme $E' \to E$ induit par l'inclusion $K' \to K$ fait de E' un sous-faisceau de E. Puisque E et K (resp. E' et K') ont même rang, même degré et même caractéristique, la semi-stabilité de E entraîne $rc_1(K') - r(K')c_1 \leq 0$, et en cas d'égalité $r\chi(K') - r(K')\chi \leq 0$.

Puisque K' est maximal, c'est encore vrai quand on remplace K' par n'importe quel autre sous-complexe de Kronecker ; donc K est semi-stable.

Stabilité de $K = K(E)$ quand E est stable. Supposons que le faisceau E soit stable. Si K n'était pas stable, il aurait un sous-complexe maximal $0 \subsetneq K' \subsetneq K$. On aurait alors, avec les notations ci-dessus, $0 \neq E' \subsetneq E$ et la stabilité de E implique $rc_1(K') - r(K')c_1 \leq 0$, et en cas d'égalité $r\chi(K') - r(K')\chi \leq 0$. Ceci contredit la définition de K'. $\square$

2.4 – L'espace de modules de Maruyama. Soient r un entier > 0, c_1 et $\chi \in \mathbb{Z}$ tels que $-r < c_1 \leq 0$, $\chi \leq 0$ et $\chi \leq 2c_1 + r$. On pose

$$\mu = \frac{c_1}{r}, \quad \Delta = P(\mu) - \frac{\chi}{r}.$$

Considérons trois espaces vectoriels $(H_i)_{i=-1,0,1}$ de dimension r_i donnés par

$$r_{-1} = 2c_1 + r - \chi, \quad r_0 = c_1 + r - \chi, \quad r_1 = -\chi.$$

Considérons la variété algébrique (éventuellement réductible) des complexes de Kronecker :

$$0 \longrightarrow H_{-1} \otimes \wedge^2 Q^* \xrightarrow{u} H_0 \otimes Q^* \xrightarrow{v} H_1 \otimes \mathcal{O} \longrightarrow 0,$$

c'est-à-dire des couples de morphismes (u, v) tels que $v \circ u = 0$. Les points correspondants à des complexes de Kronecker stables (respectivement semi-stables) forment un ouvert $\mathcal{M}_s$ (resp. $\mathcal{M}$). Le groupe

$$G = \prod_{i=-1,0,1} \mathrm{GL}(H_i)$$

opère algébriquement sur $\mathcal{M}$ par la formule

$$(f_{-1}, f_0, f_1).(u, v) = (f_0 u f_{-1}^{-1}, f_1 v f_0^{-1})$$

et l'ouvert $\mathcal{M}_s$ est invariant sous l'action de G.

Au-dessus de $\mathcal{M} \times \mathbb{P}_2$, on définit de manière évidente un complexe de Kronecker universel $\mathbb{K}$, dont on désigne par $\mathbb{E}$ le faisceau de cohomologie. Le faisceau $\mathbb{E}$ est $\mathcal{M}$-plat, et pour tout $(u, v) \in \mathcal{M}$, le faisceau $E(u, v)$ induit par le morphisme $\mathbb{P}_2 \to \mathcal{M} \times \mathbb{P}_2$ défini par le point (u, v) est semi-stable d'après la proposition (2.3). D'après la propriété universelle de l'espace de modules de Maruyama $M = M(r, \mu, \Delta)$ (cf. [16], theorem 4.11) le faisceau $\mathbb{E}$ définit un morphisme

$$\phi : \mathcal{M} \longrightarrow M,$$

équivariant et surjectif d'après la proposition (2.3).

Proposition (2.6) : (1) *L'ouvert $\mathcal{M}$ est lisse, de dimension*

$$r^2(2\Delta - 1) + \sum_{i=-1,0,1} r_i^2 \ .$$

(2) *Le morphisme ϕ défini ci-dessus fait de M un bon quotient de $\mathcal{M}$ par l'action de G sur $\mathcal{M}$.*

(3) *L'ouvert $M_s \subset M$ correspondant aux faisceaux stables est un quotient géométrique de $\mathcal{M}_s$.*

(1) Soit $(u,v) \in \mathcal{M}$, $E = E(u,v)$ le faisceau de cohomologie du complexe de Kronecker $K = K(u,v)$. La dérivée du morphisme $(u',v') \mapsto v'u'$ n'est autre que la différentielle

$$\mathrm{Hom}^1(K,K) \longrightarrow \mathrm{Hom}^2(K,K)$$

du complexe $\mathrm{Hom}^\bullet(K,K)$. Son conoyau s'identifie donc d'après la proposition (2.3) à $\mathrm{Ext}^2(E,E)$. Par dualité de Serre (proposition (1.2)), On a $\mathrm{Ext}^2(E,E) = 0$. La variété $\mathcal{M}$ est donc lisse d'après le théorème de submersion, et a pour espace tangent l'espace $Z^1(K,K)$ des 1-cocycles du complexe ci-dessus. Le calcul de la dimension résulte donc de la formule

$$\dim(\mathrm{Hom}^0(K,K)) - \dim(Z^1(K,K)) \ = \ \chi(E,E) \ .$$

(2) *Bons quotients.* Il s'agit de vérifier que :

(a) le morphisme ϕ est surjectif et affine ;

(b) $\phi_*((\mathcal{O}_{\mathcal{M}})^G) = \mathcal{O}_M$;

(c) les images par ϕ de deux fermés G-saturés disjoints sont deux fermés disjoints de M (cf. [19]).

Pour vérifier ceci, nous utilisons les résultats de Maruyama [16]. Rappelons d'abord le lemme suivant, conséquence facile du théorème B de Serre, déjà utilisé au paragraphe 1.6.

Lemme (2.7) : *Soient S une variété algébrique, E un $\mathcal{O}_{S\times\mathbb{P}_2}$-module cohérent S-plat. Il existe un entier m_0 tel que pour tout $s \in S$ et $m \geq m_0$ on ait :*

(1) $E(s)(m_0)$ est engendré par ses sections ;

(2) $H^q(E(s)(m)) = 0$ pour $q \geq 1$.

On applique ce résultat au $\mathcal{O}_{\mathcal{M}\times\mathbb{P}_2}$-module universel $\mathbb{E}$; on pose dans la suite $N = r(P(\mu + m_0) - \Delta)$ et on désigne par $\widetilde{\mathcal{M}}$ la variété des couples $((u,v),g)$ où $(u,v) \in \mathcal{M}$, et où $g : \mathbb{C}^n \to \Gamma(\mathbb{E}(u,v)(m_0))$ est un isomorphisme. Autrement dit, $\widetilde{\mathcal{M}}$ est la variété des repères du fibré vectoriel $pr_{1*}(\mathbb{E}(m_0))$, fibré de rang N au dessus de $\mathcal{M}$. Sur $\widetilde{\mathcal{M}} \times \mathbb{P}_2$, on a un morphisme surjectif associé à l'évaluation

$$p : \mathcal{O}^N_{\widetilde{\mathcal{M}}\times\mathbb{P}_2} \longrightarrow \widetilde{\mathbb{E}}(m_0) \ ,$$

où $\widetilde{\mathbb{E}}$ désigne l'image réciproque de $\mathbb{E}$ sur $\widetilde{\mathcal{M}} \times \mathbb{P}_2$.

Considérons la variété projective $\mathrm{Quot}^N(\mathcal{O}^N_{\mathbb{P}_2})$ qui représente les $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$-modules cohérents quotients de $\mathcal{O}^N_{\mathbb{P}_2}$ de polynôme de Hilbert H, où

$$H(m) \ = \ r(P(\mu + m_0 + m) - \Delta)$$

et désignons par U le module quotient universel sur $\mathrm{Quot}^N(\mathcal{O}^N_{\mathbb{P}_2}) \times \mathbb{P}_2$. Les points $q \in \mathrm{Quot}^N(\mathcal{O}^N_{\mathbb{P}_2})$ tels que $U(q)$ soit sans torsion, semi-stable et tels que le morphisme

$\mathbb{C}^N \to \Gamma(U(q))$ induit par la projection canonique soit un isomorphisme, forment un ouvert lisse [16] qu'on désigne par $\mathcal{Q}$. Désignons d'autre part $\widetilde{\mathcal{Q}}$ la variété des points $(q,(g_i)_{i=-1,0,1})$ où $q \in \mathcal{Q}$, et où :

$$g_i : H_i \longrightarrow H^1(U(q)(-m_0+i-1))$$

est un isomorphisme. Autrement dit, si R_i est la variété des repères du fibré vectoriel $R^1pr_{1*}(U(-m_0+i-1))_{|\mathcal{Q}}$, $\widetilde{\mathcal{Q}}$ est le produit fibré

$$\widetilde{\mathcal{Q}} \;=\; R_{-1} \times_{\mathcal{Q}} R_0 \times_{\mathcal{Q}} R_1 \;.$$

Le faisceau $\widetilde{\mathbb{E}}$ définit un morphisme canonique

$$\widetilde{\phi} : \widetilde{\mathcal{M}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{Q}}$$

associé à p et aux trivialisations

$$g_i :\; \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{Q}}} \otimes H_i \;\simeq R^1pr_{1*}(\widetilde{\mathbb{E}}(i-1)) \quad (i=-1,0,1)\;.$$

Ce morphisme est en fait un isomorphisme, car on en construit trivialement un inverse, associé au faisceau $\widetilde{U}$ image réciproque de $U_{|\mathcal{Q}}$ sur $\widetilde{\mathcal{Q}}$. De plus, sur $\widetilde{\mathcal{M}}$ et $\widetilde{\mathcal{Q}}$ le groupe $\widetilde{G} = G \times \mathrm{GL}(\mathbb{C}^N)$ opère et cet isomorphisme est $\widetilde{G}$-équivariant. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathcal{M}} \arrow[r, "\widetilde{\phi}"] \arrow[d, "\alpha_1"] & \widetilde{\mathcal{Q}} \arrow[d, "\alpha_2"] \\
\mathcal{M} \arrow[dr] & \mathcal{Q} \arrow[d, "\alpha_3"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

est alors commutatif. D'après Maruyama, le morphisme α_3 est un bon quotient sous l'action de $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^N)$. D'autre part, les morphismes α_1 et α_2 sont trivialement des bons quotients sous l'action de $GL(\mathbb{C}^N)$ et G respectivement. Des propriétés de transitivité des bons quotients [19], il découle que le composé $\widetilde{\mathcal{M}} \to M$ est un bon quotient sous l'action de $\widetilde{G}$, et que le morphisme $\phi : \mathcal{M} \to M$ est un bon quotient sous l'action de G.

(3) *Quotient géométrique.* Un bon quotient est dit *géométrique* si les orbites sont fermées.

Désignons par $\mathcal{M}_s$ l'ouvert de $\mathcal{M}$ correspondant aux complexes stables, et par $\mathcal{Q}_s$ l'ouvert de $\mathcal{Q}$ des points q tels que $U(q)$ soit stable.

Ces ouverts sont invariants sous l'action de G et $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^N)$ respectivement. Désignons par $\widetilde{\mathcal{M}}_s$ et $\widetilde{\mathcal{Q}}_s$ leur image réciproque dans $\widetilde{\mathcal{M}}$ et $\widetilde{\mathcal{Q}}$. Par l'isomorphisme $\widetilde{\phi}$ ci-dessus, $\widetilde{\mathcal{M}}_s$ a exactement pour image $\widetilde{\mathcal{Q}}_s$. D'autre part $\mathcal{Q}_s \to M_s$ est un quotient géométrique d'après Maruyama. Par suite, il en est de même de $\mathcal{M}_s \to M_s$.

En fait, la même démonstration que dans [13] montre que l'action de $G/\mathbb{C}^*$ sur $\mathcal{M}_s$ est propre et libre.

2.5 – Densité des fibrés vectoriels. Désignons par $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ l'ouvert des couples (u,v) tels que u soit injectif. C'est un ouvert de Zariski, dont l'image dans M contient l'ouvert M_0

de M des classes de fibrés vectoriels E semi-stables tels que le gradué de Jordan-Hölder $\mathrm{gr}(E)$ soit encore localement libre.

Proposition (2.8) : *Le complémentaire Y de $\mathcal{M}_0$ dans $\mathcal{M}$ est un fermé de codimension $\geq r-1$.*

Corollaire (2.9) : *Si $r>1$, l'ouvert M_0 de $M = M(r,\mu,\Delta)$ défini ci-dessus est partout dense.*

Démonstration de la proposition (2.8). Soient $x \in \mathbb{P}_2$, $Q(x)$ la fibre de Q au point x. Les complexes d'espaces vectoriels K'

$$0 \longrightarrow H_{-1} \otimes \wedge^2 Q(x)^* \xrightarrow{u'} H_0 \otimes Q(x)^* \xrightarrow{v'} H_1 \longrightarrow 0,$$

où v' est une application linéaire surjective, forment une variété algébrique lisse $\mathcal{M}'$ dont l'espace tangent au point (u',v') s'identifie à l'espace $Z^1(K',K')$ des 1-cocycles du complexe $\mathrm{Hom}^\bullet(K',K')$.

Dans $\mathcal{M}'$, les couples (u',v') tels que $\dim(\ker(u')) = l$ forment une sous-variété lisse Z'_l localement fermée, de codimension $l(r+l)$, dont l'espace normal en (u',v') s'identifie à $\mathrm{Hom}(H^{-1}(K'), H^0(K'))$.

Lemme (2.10) : *Le morphisme de restriction*

$$\begin{aligned} r_x : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M}' \\ (u,v) &\longmapsto (u(x), v(x)) \end{aligned}$$

est transverse à Z'_l.

Démonstration. Soient $K = K(u,v)$ le complexe de Kronecker défini par $(u,v) \in \mathcal{M}$, $K' = K(x)$ le complexe d'espaces vectoriels induit par K au point x. Il s'agit de vérifier que le morphisme composé

$$Z^1(K,K) \xrightarrow{\rho(x)} Z^1(K(x),K(x)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^{-1}(K(x)), H^0(K(x))),$$

où $\rho(x)$ est le morphisme de restriction, est surjectif. Ce diagramme se complète en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z^1(K,K) \arrow[r] \arrow[d] & Z^1(K(x),K(x)) \arrow[d] \\ \mathrm{Ext}^1(K,K) \arrow[r, "\beta_1"] & \mathrm{Hom}(H^{-1}(K(x)), H^0(K(x))) \end{tikzcd}$$

et il suffit de constater que la flèche β_1 est surjective. Or, pour $E = E(u,v)$ on a

$$\mathrm{Ext}^2(E, E \otimes I_x) \;=\; 0\ ,$$

où I_x désigne le faisceau d'ideaux défini par le point x. En effet, cet espace est dual de $\mathrm{Hom}(E \otimes I_x, E(-3))$ (cf. proposition (1.2)) ; le faisceau E étant sans torsion,

$$\mathrm{Hom}(E \otimes I_x, E(-3)) \;\simeq\; \mathrm{Hom}(I_x E, E(-3))$$

et cet espace est nul par semi-stabilité de E, compte tenu du fait que $\mu(E(-3)) < \mu(I_x E) = \mu(E)$. Ceci signifie que $\mathrm{Ext}^2(K, K\otimes I_x) = 0$, et par suite que la flèche

$$\mathrm{Ext}^1(K,K) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(K, K(x)) \ = \ \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{C}}(K(x), K(x)) \ ,$$

est surjective, d'où le lemme. □

Fin de la démonstration de la proposition (2.8). Considérons le fermé Z des couples $(x,(u,v)) \in \mathbb{P}_2 \times \mathcal{M}$ tels que l'application linéaire $u(x)$ ne soit pas injective. La projection $pr_1 : Z \to \mathbb{P}_2$ est localement triviale, et la fibre $Z(x)$ est l'image réciproque par la restriction r_x du fermé des couples (u',v') tels que u' ne soit pas injectif ; ce fermé est de codimension $\geq r+1$. Par suite, $\mathrm{codim}(Z(x)) \geq r+1$.

Par la projection $pr_2 : \mathbb{P}_2 \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ ce fermé Z a pour image Y, qui est donc de codimension $\geq r-1$. □

3. Stratification de Shatz

Ce chapitre est un raffinement de la stratification introduite par Shatz dans [20]. Il étend à $\mathbb{P}_2$ les résultats obtenus par Atiyah et Bott dans [1], dans le cadre des surfaces de Riemann.

3.1 – Poids. Soient r un entier > 0, H un polynôme à coefficients rationnels. On considère les suites d'entiers positifs $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_l)$ et de polynômes $\mathbf{H} = (H_1, \ldots, H_l)$ satisfaisant aux conditions suivantes

$$(N) \qquad \sum_{i=1}^{l} r_i \ = \ r \ , \qquad \sum_{i=1}^{l} H_i \ = \ H \ .$$

Un tel couple sera appelé *poids de longueur* l associé à (r,H).

Au poids $(\mathbf{r},\mathbf{H})$, on associe pour chaque entier m la fonction linéaire par morceaux $\mathcal{P}(\mathbf{r},\mathbf{H},m) : [0,r] \to \mathbb{R}$ dont le graphe joint les points de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{l} (0,0) \\ (r_1, H_1(m)) \\ (r_1+r_2, H_1(m)+H_2(m)) \\ \vdots \\ (r, H(m)) \end{array}$$

La fonction $\mathcal{P}(\mathbf{r},\mathbf{H},m)$ est concave pour $m \gg 0$ si le poids satisfait à la condition (C) :

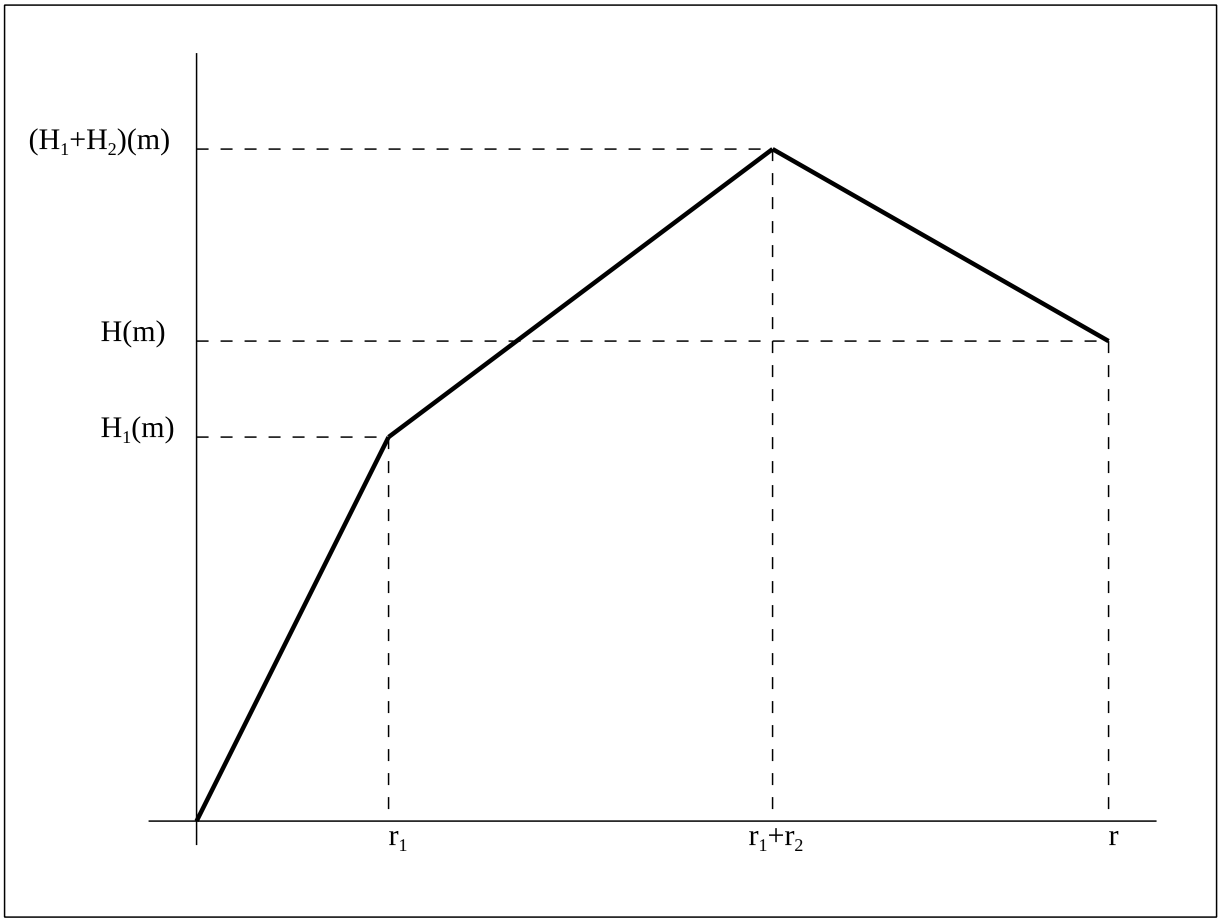
$$(C) \qquad \frac{H_i(m)}{r_i} \ > \ \frac{H_{i+1}(m)}{r_{i+1}} \quad \text{pour } m \gg 0 \ .$$

On dit alors que le poids $(\mathbf{r},\mathbf{H})$ est *concave.*

Si $(\mathbf{r}',\mathbf{H}')$ est un autre poids de longueur l' associé à (r,H) on écrit

$$(\mathbf{r},\mathbf{H}) \ \leq \ (\mathbf{r}',\mathbf{H}')$$

si on a $\mathcal{P}(\mathbf{r}, \mathbf{H}, m) \leq \mathcal{P}(\mathbf{r}', \mathbf{H}', m)$ pour $m \gg 0$. On obtient ainsi une relation de pré-ordre sur l'ensemble des poids associés à (r, H).



3.2 – Poids d'un faisceau. Soit E un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$-module cohérent sans torsion de rang $r > 0$, de pente μ, de discriminant Δ. On considère le polynôme de Hilbert de E :

$$H(m) \ = \ r(P(\mu + m) - \Delta) \ .$$

Considérons d'autre part la filtration de Harder-Narasimhan de E :

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_l = E \ .$$

Si on pose

$$\mathrm{gr}_i \ = \ F_i/F_{i-1} \ , \qquad r \ = \ r(\mathrm{gr}_i) \ (\text{rang}) \ , \qquad H_i \ = \ P_{\mathrm{gr}_i} \ (\text{polynôme de Hilbert}) \ ,$$

les suites $\mathbf{r}(E) = (r_1, \ldots, r_l)$ et $\mathbf{H}(E) = (H_1, \ldots, H_l)$ définissent un poids concave associé à (r, H), qu'on appellera *poids de E*.

Plus généralement, à n'importe quelle filtration F finie croissante de E par des sous-modules cohérents de rang strictement croissant on associe de la même façon un poids $(\mathbf{r}, \mathbf{H})$. La fonction $\mathcal{P}(\mathbf{r}, \mathbf{H}, m)$ n'est plus obligatoirement concave pour $m \gg 0$. En prenant l'enveloppe concave, on détermine une filtration F' de E de poids concave $(\mathbf{r}', \mathbf{H}')$ tel que $(\mathbf{r}, \mathbf{H}) \leq (\mathbf{r}', \mathbf{H}')$.

Lemme (3.1) : *Soit E un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$-module cohérent sans torsion de rang r. Les poids des filtrations F de E satisfaisant à la condition (C) sont en nombre fini.*

Démonstration. Soit F une filtration de E de poids concave :

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_l = E \; .$$

Par concavité, on a pour $m \gg 0$

$$\frac{P_{F_i}(m)}{r(F_i)} \;\geq\; \frac{P_E(m)}{r} \; .$$

Soit μ la pente de E. De l'inégalité ci-dessus on tire $\mu(F_i) \geq \mu$. Il résulte alors du lemme (2.2) que les valeurs possibles pour le degré de F_i sont en nombre fini, ainsi que les valeurs possibles pour la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(F_i)$. Par suite, les polynômes de Hilbert P_{F_i} sont en nombre fini, ainsi que les polynômes de Hilbert $H_i = P_{F_i} - P_{F_{i-1}}$ du gradué gr_i. D'où le lemme. □

Proposition (3.2) : *Soit E un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$-module cohérent sans torsion de rang r, de polynôme de Hilbert H. Pour toute filtration F de E de poids $(\mathbf{r}, \mathbf{H})$ on a*

$$(\mathbf{r}, \mathbf{H}) \;\leq\; (\mathbf{r}(E), \mathbf{H}(E)) \; .$$

Démonstration. D'après le lemme (3.1), on peut supposer que la filtration F :

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_l = E$$

est de poids maximal et strictement concave, c'est-à-dire qu'il est concave et qu'il n'existe aucun entier i tel que

$$\frac{P_{F_i/F_{i-1}}(m)}{r(F_i/F_{i-1})} \;=\; \frac{P_{F_{i+1}/F_i}(m)}{r(F_{i+1}/F_i)} \qquad \text{pour } m \gg 0 \; .$$

Il s'agit alors de vérifier que F est la filtration de Harder-Narasimhan.

On raisonne par récurrence sur r, le cas $r = 1$ étant trivial. Considérons l'image réciproque F'_1 du sous-module de torsion de E/F_1 : elle détermine une filtration F'

$$0 \subset F'_1 \subset F_2 + F'_1 \subset \cdots \subset F_l = E$$

de poids $(\mathbf{r}, \mathbf{H}')$ supérieur ou égal à $(\mathbf{r}, \mathbf{H})$. Puisque le poids de F est supposé maximal, ceci impose $\mathbf{H}' = \mathbf{H}$ et par suite $F_1 = F'_1$. Ainsi, E/F_1 est sans-torsion, et la filtration F_i/F_1 de E/F_1 est de poids maximal. Par hypothèse de récurrence, c'est donc la filtration de Harder-Narasimhan de E/F_1.

Reste à voir que F_1 est le sous-faisceau semi-stable maximal de E. On a déjà

$$\frac{P_{F_1}(m)}{r(F_1)} \;>\; \frac{P_{F_2}(m)}{r(F_2)} \qquad \text{pour } m \gg 0 \; ,$$

car dans le cas contraire le poids de F ne serait pas strictement concave. Soit E' le sous-faisceau semi-stable maximal de E. On a alors

$$\frac{P_{F_1}(m)}{r(F_1)} \;\leq\; \frac{P_{E'}(m)}{r(E')} \qquad \text{pour } m \gg 0 \; .$$

Si on a égalité, on a $F_1 \subset E'$, et si $F_1 \neq E'$, alors $F_2 = E'/F_1$, ce qui contredit la stricte concavité du poids de F. Si l'inégalité est stricte, il en découle que $\operatorname{Hom}(E', E/F_1) = 0$, donc $E' \subset F_1$, mais c'est impossible puisque l'inégalité est stricte, donc en rajoutant E' à la filtration F on ontient une nouvelle filtration contredisant la maximalité de F.

Ceci démontre la proposition (3.2). $\square$

3.3 – La stratification. Soit S une variété algébrique lisse, E un $\mathcal{O}_{S\times\mathbb{P}_2}$-module cohérent S-plat tel que pour tout $s \in S$, $E(s)$ soit sans torsion de rang r, de polynôme de Hilbert H. On suppose satisfaites les conditions suivantes

(L) Pour tout $s \in S$, $\operatorname{Ext}^2(E(s), E(s)) = 0$.

(KS) Pour tout $s \in S$, le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer

$$T_sS \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(E(s), E(s))$$

est surjectif.

Soit $(\mathbf{r}, \mathbf{H})$ un poids associé à (r, H). On se propose d'étudier l'ensemble des points $s \in S$ tels que $E(s)$ soit de poids $(\mathbf{r}, \mathbf{H})$.

Proposition (3.3) : *Soit E un $\mathcal{O}_{S\times\mathbb{P}_2}$-module cohérent S-plat, tel que pour tout $s \in S$, $E(s)$ soit sans torsion, de rang r, de polynôme de Hilbert H, satisfaisant aux conditions* (L) *et* (KS). *Soit $(\mathbf{r}, \mathbf{H})$ un poids associé à (r, H) :*

(a) *L'ensemble des points $s \in S$ tels que $(\mathbf{r}, \mathbf{H}) < (\mathbf{r}(E(s)), \mathbf{H}(E(s)))$ est un fermé de S.*

Soit $\Omega(\mathbf{r}, \mathbf{H})$ le complémentaire de ce fermé.

(b) *Les points $s \in \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{H})$ tel que $E(s)$ soit de poids $(\mathbf{r}, \mathbf{H})$ forment une sous-variété fermée lisse, dont l'espace normal en s est canoniquement isomorphe à $\operatorname{Ext}^1_{F,+}(E(s), E(s))$, F désignant la filtration de Harder-Narasimhan de $E(s)$.*

Le reste du chapitre est consacré à la démonstration de cette proposition. Le lemme qui suit sera amélioré au chapitre 4.

Lemme (3.4) : *Soit E un faisceau semi-stable sur $\mathbb{P}_2$, de discriminant Δ. Alors $\Delta \geq 0$.*

Démonstration. On peut supposer E normalisé. Soient μ sa pente et χ sa caractéristique d'Euler-Poincaré. Dans la démonstration du lemme (2.1), on a déjà vu que si E n'est pas trivial, $\chi \leq 0$. Ceci s'écrit

$$r(P(\mu) - \Delta) \;\leq\; 0 \;.$$

Par suite $\Delta \geq P(\mu) \geq 0$. Si E est trivial, $\Delta = 0$. $\square$

Lemme (3.5) : *Soit E un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$-module cohérent sans torsion sur $\mathbb{P}_2$, de filtration de Harder-Narasimhan F. Alors*

$$\operatorname{Ext}^2_{F,-}(E, E) \;=\; 0 \;.$$

Démonstration. On utilise la suite spectrale du paragraphe 1.5, qui a pour aboutissement $\mathrm{Ext}^{\bullet}_{F,-}(E,E)$, de terme E_1 donné par

$$E_1^{p,q} \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } p<0, \\ \prod_i \mathrm{Ext}^{p+q}(\mathrm{gr}_i(K), \mathrm{gr}_{i-p}(K)) & \text{si } p \geq 0. \end{cases}$$

On sait d'après la dualité de Serre (proposition (1.2)) que $\mathrm{Ext}^2(\mathrm{gr}_i(E), \mathrm{gr}_{i-p}(E))$ est le dual de $\mathrm{Hom}(\mathrm{gr}_{i-p}(E), \mathrm{gr}_i(E)(-3))$, qui est nul pour $p \geq 0$ car $\mu(\mathrm{gr}_{i-p}(E)) > \mu(\mathrm{gr}_i(E)) - 3$ et $\mathrm{gr}_i(E)$ est semi-stable. □

Lemme (3.6) : *Soient S une variété algébrique, E un $\mathcal{O}_{S\times\mathbb{P}_2}$-module cohérent S-plat, tel que pour tout $s \in S$, $E(s)$ soit sans torsion de rang r, de polynôme de Hilbert H.*

L'application $s \mapsto (\mathbf{r}(E(s)), \mathbf{H}(E(s)))$ définie sur S à valeurs dans l'ensemble des poids associés à (r,H) prend un nombre fini de valeurs.

Démonstration. Considérons d'abord la pente $\mu_i(s) = \mu(\mathrm{gr}_i(E(s)))$. Soit $r_i(s)$ le rang de $\mathrm{gr}_i(E(s))$. Il existe une constante C telle que pour tout $s \in S$ et toute droite d de $\mathbb{P}_2$ on ait

$$\dim(\mathrm{Ext}^1(E(s)_{|d}, E(s)_{|d})) \;\leq\; C \;.$$

Soit $d \subset \mathbb{P}_2$ une droite ne passant pas par les points singuliers des $\mathrm{gr}_i(E(s))$ (qui sont en nombre fini). Le morphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^1(E(s)_{|d}, E(s)_{|d}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathrm{gr}_1(E(s))_{|d}, \mathrm{gr}_l(E(s))_{|d}) \;,$$

où l est la longueur de la filtration de Harder-Narasimhan, est surjectif. Par définition, $\mu_1(s) \geq \mu_i(s) \geq \mu_{i+1}(s) \geq \mu_l(s)$ et d'après le théorème de Riemann-Roch :

$$C \;\geq\; \dim\left(\mathrm{Ext}^1(\mathrm{gr}_1(E(s)), \mathrm{gr}_l(E(s)))\right) \;\geq r_1(s) r_l(s)(\mu_1(s) - \mu_l(s) - 1) \;.$$

Par suite, il existe une constante C_1 telle que pour tout s et pour tous i,j, $\mu_i(s) - \mu_j(s) \leq C_1$.

Puisque $\mu = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{l} r_i(s)\mu_i(s)$, on voit que les pentes $\mu_i(s)$ restent bornées sur S. Par suite, les valeurs prises par ces pentes sont en nombre fini.

Soit $\Delta_i(s) = \Delta(\mathrm{gr}_i(E(s))$. On a

$$\chi(E(s)) \;=\; \sum_{i=1}^{l} \chi(\mathrm{gr}_i(E(s))) \;=\; \sum_{i=1}^{l} r_i(s)(P(\mu_i(s)) - \Delta_i(s))$$

et par suite, $\sum r_i(s)\Delta_i(s) \leq Cte$. D'après le lemme (3.4) on a $\Delta_i(s) \geq 0$. Par suite, les $\Delta_i(s)$ prennent un nombre fini de valeurs. □

Démonstration de la proposition (3.3). **(a)** Pour tout poids $(\mathbf{r}, \mathbf{H})$ associé à (r,H), de longueur l, désignons par $S(\mathbf{r}, \mathbf{H})$ l'ensemble des points $s \in S$ tels que $E(s)$ soit de poids $(\mathbf{r}, \mathbf{H})$, et par $Y(\mathbf{r}, \mathbf{H})$ l'image du morphisme canonique

$$\mathrm{Drap}^{H_1,\ldots,H_l}(E) \longrightarrow S \;.$$

Alors $Y(\mathbf{r},\mathbf{H})$, image d'un morphisme propre, est un fermé. La proposition (3.2) permet d'écrire les inclusions

$$\text{Adhérence}(S(\mathbf{r}',\mathbf{H}')) \ \subset Y(\mathbf{r}',\mathbf{H}') \ \subset \bigcup_{(\mathbf{r}'',\mathbf{H}'')\geq(\mathbf{r}',\mathbf{H}')} S(\mathbf{r}'',\mathbf{H}'') \ .$$

D'après le lemme 3.6 la réunion $\bigcup S(\mathbf{r}',\mathbf{H}')$ où $(\mathbf{r}',\mathbf{H}') > (\mathbf{r},\mathbf{H})$ est une réunion finie. Il en résulte que cet ensemble est fermé.

(b) Soit $\Omega(\mathbf{r},\mathbf{H})$ l'ouvert complémentaire de ce fermé. Considérons le morphisme canonique

$$\pi : \mathrm{Drap}^{H_1,\dots,H_l}(E_{|\Omega(\mathbf{r},\mathbf{H})}) \longrightarrow \Omega(\mathbf{r},\mathbf{H}) \ .$$

Soit $F \in \mathrm{Drap}^{H_1,\dots,H_l}(E(s))$, avec $s \in \Omega(\mathbf{r},\mathbf{H})$. D'après la proposition (3.2), F est la filtration de Harder-Narasimhan de $E(s)$. D'autre part, le morphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^1(E(s),E(s)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{F,+}(E(s),E(s))$$

est surjectif d'après le lemme (3.5). L'hypothèse (KS) entraîne donc que le morphisme composé

$$\omega_+ : T_sS \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{F,+}(E(s),E(s))$$

est surjectif. La proposition (1.7) entraîne alors que $\mathrm{Drap}^{H_1,\dots,H_l}(E_{|\Omega(\mathbf{r},\mathbf{H})})$ est lisse.

Or, le morphisme π a exactement pour image $S(\mathbf{r},\mathbf{H})$ et la fibre au-dessus d'un point $s \in S(\mathbf{r},\mathbf{H})$ est réduite au point F défini par la filtration de Harder-Narasimhan de $E(s)$. D'autre part, on a pour $i < j$, vu la semi-stabilité de $\mathrm{gr}_i(E(s))$ et la condition (C),

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{gr}_i(E(s)),\mathrm{gr}_j(E(s))) \ = \ 0 \ ,$$

et, par suite (cf. proposition (1.3))

$$\mathrm{Ext}^0_{F,+}(E(s),E(s)) \ = \ 0 \ .$$

Il découle de la proposition (1.5) que π est une immersion ; puisqu'elle est injective et propre, c'est un plongement. Donc l'image est une sous-variété lisse de S, et l'espace normal en s s'identifie d'après la proposition (1.5) à $\mathrm{Ext}^1_{F,+}(E(s),E(s))$.

4. Théorèmes d'existence

4.1 – Irréductiblité selon Ellingsrud. Soit E un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$-module cohérent sans torsion non nul de pente μ. On dira que E est p-stable [5] si pour tout module cohérent non nul $F \subset E$ de rang $r(F) < r$ on a $\mu(F) < \mu$.

C'est donc la notion de stabilité introduite à l'origine par Mumford et que Maruyama appelle p-stabilité [16]. Si E est p-stable, il est stable au sens de la définition que nous avons rappelée au paragraphe 2.1.

Considérons le $\mathcal{O}_{\mathcal{M}\times\mathbb{P}_2}$-module universel $\mathbb{E}$ construit au paragraphe 2.3. L'ensemble des points $s \in \mathcal{M}$ tels que $\mathbb{E}(s)$ soit p-stable est un ouvert contenu dans $\mathcal{M}_s$ (cf. théorème 4.11). La projection $\mathcal{M}_s \to M$ étant ouverte, son image est un ouvert qu'on note M_{ps}. On notera M^0_{ps} l'ouvert défini par les classes d'isomorphisme de fibrés p-stables.

5. p comme pente

Proposition (4.1) (Ellingsrud [6]) **:** *L'ouvert* M^0_{ps} *est irréductible.*

4.2 – Fibrés exceptionnels. Soit E un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$-module cohérent sans torsion de rang r, de pente μ, de discriminant Δ. On dit que E est *exceptionnel* (resp. *semi-exceptionnel*) si E est stable (resp. semi-stable) et si $\Delta < \dfrac{1}{2}$.

Exemples – Le fibré trivial de rang 1, le fibré tangent $T(\mathbb{P}_2)$, le fibré noyau du morphisme canonique ev : $\Gamma(\mathcal{O}(2)) \otimes \mathcal{O} \to \mathcal{O}(2)$ (noté Q_2^* dans [5]) sont des fibrés exceptionnels de pente respective $0, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{2}{5}$. Si E est exceptionnel, il en est de même de $E(m)$.

Lemme (4.2) : *Soit E un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$-module stable. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) E est exceptionnel ;

(2) $\mathrm{Ext}^1(E,E) = 0$ *; autrement dit, E est rigide ;*

(3) $\chi(E,E) = 1$.

Démonstration. Si E est stable, $\mathrm{Hom}(E,E) = 0$ et $\mathrm{Ext}^2(E,E) = 0$. On a donc

$$\chi(E,E) \;=\; 1 - \dim(\mathrm{Ext}^1(E,E)) \;=\; r^2(1-2\Delta) \;.$$

L'assertion (1) équivaut donc à $\chi(E,E) > 0$, ou encore à $\mathrm{Ext}^1(E,E) = 0$. □

Lemme (4.3) : *Tout faisceau exceptionnel est localement libre et p-stable. Étant donné un rationnel μ, il existe au plus un fibré exceptionnel de pente μ, à isomorphisme près.*

Démonstration. Soit E un faisceau exceptionnel de rang r, de classes de Chern c_1 et c_2. La relation $\chi(E,E) = 1$ s'écrit

$$1 \;=\; r^2 - 2rc_2 + (r-1)c_1^2 \;.$$

Si $c_1 = 0$, ceci impose $r = 1$, $c_2 = 0$. Par suite $E = \mathcal{O}$. Si $c_1 \neq 0$, c_1 et r sont premiers entre eux : la fraction $\dfrac{c_1}{r}$ est irréductible, et par suite E est p-stable.

D'autre part, la variété M_s correspondant aux classes de Chern ci-dessus est de dimension 0 ; c'est donc un nombre fini de points, et chacun de ces points est invariant sous l'action du groupe projectif $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$. Un représentant est donc obligatoirement localement libre. On a donc $M^0_{ps} = M_s$.

D'après le résultat d'Ellingsrud, M^0_{ps} est irréductible. Par suite, M_s est réduit à un point.

Pour terminer la démonstration, il suffit d'observer que le rang r est déterminé par la pente, puisque c'est le plus petit dénominateur > 0 d'une fraction représentant μ, et que le discriminant s'obtient à partir de r par la formule

$$\Delta \;=\; \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \;.$$

□

Problème – Pour quelles valeurs de μ existe-il un fibré exceptionnel de pente μ ? Ce problème sera résolu au chapitre 5.

Proposition (4.4) : *Un faisceau semi-exceptionnel de pente μ est somme directe de fibrés exceptionnels de pente μ.*

Démonstration. Puisqu'il est semi-stable, un tel faisceau E a une filtration de Jordan-Hölder

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_l = E\ .$$

Le gradué $\mathrm{gr}_i(E)$ est exceptionnel de pente μ. D'après le lemme (4.3) ces gradués sont isomorphes à un fibré exceptionnel F de pente μ. Puisque $\mathrm{Ext}^1(F, F) = 0$, on voit que la filtration ci-dessus se scinde : $E = F \oplus \cdots \oplus F$. D'où la proposition (4.4). □

4.3 – Conditions nécessaires. On désigne par $\mathfrak{E}$ l'ensemble des rationnels qui sont pentes de fibrés exceptionnels ; cet ensemble sera déterminé au chapitre 5. Pour $\alpha \in \mathfrak{E}$, on note r_α le plus petit dénominateur positif de α, et par Δ_α le discriminant

$$\Delta_\alpha \;=\; \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r_\alpha^2}\right)\ .$$

Proposition (4.5) : *Soit E un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$-module semi-stable de rang r, de pente μ, de discriminant $\Delta \geq \frac{1}{2}$. Alors :*

(1) $r\mu \in \mathbb{Z}$, $r(P(\mu) - \Delta) \in \mathbb{Z}$.

(2) *Pour tout $\alpha \in \mathfrak{E}$ tel que $|\alpha - \mu| < 3$, on a*

$$P(-|\alpha - \mu|) \;\leq\; \Delta_\alpha + \Delta\ .$$

Démonstration. La condition (1) traduit le fait que c_1 et la caractéristique d'Euler-Poincaré χ de E sont des entiers. Vérifions (2). Si E_α est exceptionnel de pente $\alpha > \mu$, on a $\mathrm{Hom}(E_\alpha, E) = 0$. D'autre part, $\mathrm{Ext}^2(E_\alpha, E)$ est le dual de $\mathrm{Hom}(E, E_\alpha(-3))$, donc est nul si $\alpha - \mu < 3$. Par suite,

$$\chi(E_\alpha, E) \;=\; -\dim(\mathrm{Ext}^1(E_\alpha, E)) \;\leq 0\ .$$

La proposition (1.1) montre alors que $P(\mu - \alpha) \leq \Delta_\alpha + \Delta$.

Le même résultat reste vrai si $\alpha = \mu$, car l'hypothèse $\Delta \geq \frac{1}{2}$ entraîne $\Delta_\alpha < \Delta$. Par définition de la semi-stabilité, on a encore

$$\mathrm{Hom}(E_\alpha, E) \;=\; 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Ext}^2(E_\alpha, E) \;=\; 0$$

et l'inégalité $\chi(E_\alpha, E) \leq 0$ s'écrit $P(0) \leq \Delta_\alpha + \Delta$.

Pour $\alpha < \mu$, on a $\mathrm{Hom}(E, E_\alpha) = 0$ et $\mathrm{Ext}^2(E, E_\alpha)$, dual de $\mathrm{Hom}(E_\alpha, E(-3))$ est nul si $\mu - \alpha < 3$. L'inégalité $\chi(E, E_\alpha) \leq 0$ donne encore le résultat. □

Remarque (4.6) : Pour un fibré semi-exceptionnel de pente μ, l'énoncé ci-dessus n'est plus vrai. Cependant, on a encore la propriété suivante : pour tout $\alpha \in \mathfrak{E}$ tel que $|\alpha - \mu| < 3$, $\alpha \neq \mu$, on a

$$P(-|\alpha - \mu|) \ \leq \ \Delta_\alpha + \Delta \ .$$

4.4. – Existence des faisceaux semi-stables. Soient r un entier > 1, μ et Δ deux rationnels satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} (1) \quad r\mu \in \mathbb{Z} \ , \quad r(P(\mu) - \Delta) \in \mathbb{Z} \ , \\ (2) \quad \text{pour tout} \ \ \alpha \in \mathfrak{E} \ \text{tel que} \ \ r_\alpha < r \ \text{et} \ |\alpha - \mu| \leq 1 \ , \ \text{on a} \\ \qquad\qquad\qquad P(-|\alpha - \mu|) \leq \Delta_\alpha + \Delta \ . \end{cases}$$

On se propose de montrer que si ces conditions sont satisfaites, il existe un fibré stable de rang r, de pente μ, de discriminant Δ. On commence par l'existence de fibrés semi-stables ; dans les paragraphes (4.5) et (4.6) nous montrons la densité des ouverts M_s (resp. M_{ps}) de faisceaux stables (resp. p-stables) dans $M = M(r, \mu, \Delta)$.

On verra au chapitre 5 qu'on peut affaiblir les conditions (S) : il suffit en effet de vérifier la condition (2) pour les éléments $\alpha \in \mathfrak{E}$ tels que $r_\alpha \leq \dfrac{r}{2}$ et qui encadrent μ.

Théorème (4.7) : *Soient r un entier > 1, μ et Δ deux rationnels satisfaisant aux conditions* (S)*. Alors il existe un faisceau semi-stable de rang r, de pente μ et de discriminant Δ.*

Le lemme suivant est la clé de la démonstration.

Lemme (4.8) : *Soient d une droite de $\mathbb{P}_2$, E un fibré vectoriel algébrique sur $\mathbb{P}_2$ de rang r, de pente μ, de discriminant Δ, (r, μ, Δ) satisfaisant aux conditions* (S)*. On suppose en outre*

$$(3) \qquad\qquad E_{|d} \text{ est rigide.}$$

Si E n'est pas semi-stable, on a, pour la filtration de Harder-Narasimhan :

$$\dim(\mathrm{Ext}^1_{F,+}(E, E)) \ > \ 0 \ .$$

Démonstration. Supposons que E ne soit pas semi-stable, et considérons la filtration de Harder-Narasimhan de E

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_l = E \ ,$$

de gradué $\bigoplus_{i=1}^l \mathrm{gr}_i(E)$. Posons $r_i = r(\mathrm{gr}_i(E))$, $\mu_i = \mu(\mathrm{gr}_i(E))$, $\Delta_i = \Delta(\mathrm{gr}_i(E))$. On a $\mu_i \geq \mu_j$ pour $i < j$, et en cas d'égalité, $\Delta_i < \Delta_j$. Nous allons d'abord vérifier que la condition (3) impose $\mu_1 - \mu_l \leq 1$. On peut supposer E normalisé : $-1 < \mu \leq 0$.

Les $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$-modules $\mathrm{gr}_i(E)$ sont sans torsion ; les points au voisinage desquels ils ne sont pas localement libres sont en nombre fini. On peut donc supposer que $\mathrm{gr}_i(E)$ est localement libre au voisinage de d, puisque l'ensemble des droites d telles que $E_{|d}$ soit rigide est un ouvert.

On a alors une filtration de $E_{|d}$ par les sous-fibrés $F_{i|d}$. Par rigidité, on obtient

$$h^0(E(-1)_{|d}) \ = \ 0 \ , \quad h^1(E_{|d}) \ = \ 0 \ .$$

Il en résulte $h^0(F_1(-1)_{|d}) = 0$, $h^1(E/F_{l-1|d}) = 0$.

Par suite, $\mu_1 = \mu(F_1) \leq 0$ et $\mu_l = \mu(E/F_{l-1}) \geq -1$. Ainsi, $\mu_1 - \mu_l \leq 1$.

On a déjà vu que pour $i < j$,

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{gr}_i(E), \mathrm{gr}_j(E)) = 0 , \quad \mathrm{Ext}^2(\mathrm{gr}_i(E), \mathrm{gr}_j(E)) = 0 .$$

Par suite

$$\chi(\mathrm{gr}_i(E), \mathrm{gr}_j(E)) = -\dim(\mathrm{Ext}^1(\mathrm{gr}_i(E), \mathrm{gr}_j(E))) .$$

Or, la suite spectrale (1.3) nous donne une filtration de $\mathrm{Ext}^1_{F,+}(E, E)$ dont le gradué est

$$\bigoplus_{p>0,i} \mathrm{Ext}^1(\mathrm{gr}_i(E), \mathrm{gr}_{i+p}(E)) .$$

On est donc ramené à montrer qu'il existe un couple (i, j) tel que $i < j$ et $\chi(\mathrm{gr}_i(E), \mathrm{gr}_j(E)) < 0$. Supposons que pour tout couple (i, j) avec $i < j$, on ait $\chi(\mathrm{gr}_i(E), \mathrm{gr}_j(E)) = 0$. Alors, l'un des deux faisceaux $\mathrm{gr}_1(E)$, $\mathrm{gr}_l(E)$ est semi-exceptionnel. En effet, on aurait d'après la proposition (1.1)

$$0 = \chi(\mathrm{gr}_1(E), \mathrm{gr}_l(E)) = r_1 r_l (P(\mu_l - \mu_1) - \Delta_l - \Delta_1)$$

et par suite $\Delta_1 + \Delta_l = P(\mu_l - \mu_1)$.

Si $\mu_l < \mu_1$, ceci entraîne $\Delta_1 + \Delta_l < 1$, et donc soit $\Delta_1 < \frac{1}{2}$, soit $\Delta_l < \frac{1}{2}$. Si $\mu_l = \mu_1$, alors $\Delta_l > \Delta_1$, $\Delta_1 + \Delta_l = 1$, et donc $\Delta_1 < \frac{1}{2}$.

Supposons $\mathrm{gr}_l(E)$ semi-exceptionnel. On peut alors écrire

$$\chi(E, \mathrm{gr}_l(E)) = \sum_{i \leq l} \chi(\mathrm{gr}_i(E), \mathrm{gr}_l(E)) = \chi(\mathrm{gr}_l(E), \mathrm{gr}_l(E)) ,$$

et donc, puisque $\mathrm{gr}_l(E)$ est somme directe de fibrés exceptionnels de même pente μ_l (proposition (4.4)), on obtient $\chi(E, \mathrm{gr}_l(E)) > 0$. Or, la condition (S) entraîne

$$\chi(E, \mathrm{gr}_l(E)) = r r_l (P(\mu_l - \mu) - \Delta_l - \Delta) \leq 0 ,$$

ce qui est contradictoire.

Supposons $\mathrm{gr}_1(E)$ semi-exceptionnel. On a encore

$$\chi(\mathrm{gr}_1(E), E) = \chi(\mathrm{gr}_1(E), \mathrm{gr}_1(E)) > 0 ,$$

ce qui contredit à nouveau l'hypothèse (S). □

Démonstration du théorème (4.7) – (a) Construction d'une grande famille de fibrés vectoriels de rang r sur $\mathbb{P}_2$. On reprend la construction proposée pour les fibrés de rang 2 dans [14].

La suite $H(m) = r(P(\mu + m) - \Delta)$ est croissante pour $m + \mu > -\frac{3}{2}$; si $-2 \leq \mu + m \leq 0$, elle est négative : en effet la condition (S) appliquée au fibré exceptionnel $\mathcal{O}(-m)$ (de discriminant nul) s'écrit pour $-1 \leq \mu + m \leq 0$

$$P(\mu + m) - \Delta \leq 0$$

et en outre $P(\mu + m - 1) = P(\mu + m) - (\mu + m + 1) \leq \Delta$.

Soit m_0 le plus petit des entiers $m > 0$ tels que $H(m) > 0$. On pose

$$N_0 \;=\; H(m_0)\ , \quad N_1 \;=\; -H(m_0-1)\ , \quad N_2 \;=\; -H(m_0-2)\ .$$

On a donc $N_0 > 0$, $N_1 \geq 0$, $N_2 \geq 0$. La relation $P(X) + P(X-2) - 2P(X-1) = 1$ montre que $N_0 + 2N_1 - N_2 = r$. Considérons les morphismes $\mathcal{O}(-1)^{N_2} \to Q^{*N_1} \oplus \mathcal{O}^{N_0}$.

Le fibré

$$V \;=\; \mathcal{H}om(\mathcal{O}(-1)^{N_2}, Q^{*N_1} \oplus \mathcal{O}^{N_0})$$

est engendré par ses sections, Par suite, les couples $(x,s) \in \mathbb{P}_2 \times \Gamma(V)$ tels que $s(x)$ ne soit pas injectif forment un sous-ensemble algébrique Y de codimension $2N_1 + N_0 - N_2 + 1 = r+1$. La projection de Y sur $\Gamma(V)$ est un sous-ensemble algébrique de codimension $\geq r-1$. Si $r > 1$, on voit donc qu'il existe des morphismes injectifs, comme morphismes de fibrés :

$$s : \mathcal{O}(-1)^{N_2} \to Q^{*N_1} \oplus \mathcal{O}^{N_0}\ .$$

Le conoyau $F(s)$ d'un tel morphisme est un fibré vectoriel algébrique de rang r, de pente $\mu + m$, de discriminant Δ. On pose $E(s) = F(s)(-m_0)$. On obtient ainsi une famille algébrique $E \to \Omega \times \mathbb{P}_2$ de fibrés vectoriels algébriques sur $\mathbb{P}_2$, de rang r, de pente μ, de discriminant Δ, paramétrée par l'ouvert Ω des morphismes injectifs.

Lemme (4.9) : (L) *Pour tout* $s \in \Omega$

$$\mathrm{Ext}^2(E(s), E(s)) \;=\; 0\ .$$

(KS) *Le morphisme de Kodaïra-Spencer* $\omega : T_s\Omega \to \mathrm{Ext}^1(E(s), E(s))$ *est surjectif en tout point* $s \in \Omega$.

De plus, si d est une droite de $\mathbb{P}_2$, l'ouvert S de Ω des s tels que $E(s)_{|d}$ soit rigide est non vide.

Démonstration. Soit K le complexe

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{N_2} \xrightarrow{\ s\ } Q^{*N_1} \oplus \mathcal{O}^{N_0} \longrightarrow 0\ .$$

Les espaces $\mathrm{Ext}^i(E(s), E(s))$ s'identifient à $\mathrm{Ext}^i(K,K)$ c'est-à-dire encore, puisque $H^q(\mathbb{P}_2, \mathcal{H}om^j(K,K)) = 0$ pour $q > 0$, à $H^i(\mathrm{Hom}^\bullet(K,K))$. Puisque $\mathrm{Hom}^q(K,K) = 0$ si $q \geq 2$, on obtient (L), et un épimorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-1)^{N_2}, Q^{*N_1} \oplus \mathcal{O}^{N_0}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(E(s), E(s))\ ,$$

qui n'est autre que le morphisme composé

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-1)^{N_2}, Q^{*N_1} \oplus \mathcal{O}^{N_0}) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-1)^{N_2}, F(s)) \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{Ext}^1(F(s), F(s))
\end{tikzcd}$$

où δ est l'opérateur de liaison associé à la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{N_2} \longrightarrow Q^{*N_1} \oplus \mathcal{O}^{N_0} \longrightarrow F(s) \longrightarrow 0\ .$$

D'après le lemme (1.6) ce morphisme composé n'est autre que le morphisme de Kodaïra-Spencer.

On peut en fait améliorer l'assertion (L), pour obtenir

$$\text{(L')} \qquad \operatorname{Ext}^2(E(s), E(s)(-1)) = 0 \ .$$

En effet, dans la suite spectrale

$$E_1^{p,q} \ = \ H^q(\mathbb{P}_2, \mathcal{H}om^p(K, K(-1))) \ ,$$

d'aboutissement $\operatorname{Ext}^{\bullet}(E(s), E(s)(-1))$, on a $E_1^{p,q} = 0$ si $p + q > 1$ ce qui entraîne (L').

L'argument qui suit s'inspire de Brun et Hirschowitz [4].

Soient $s_0 \in \Omega$ et M_0 l'espace de modules locaux de déformation de $E(s_0)_{|d}$ C'est une variété lisse dont l'espace tangent au point de base s'identifie à $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_d}(E(s_0)_{|d}, E(s_0)_{|d})$. La famille $E_{|\Omega\times\mathbb{P}_2}$ définit alors un morphisme au voisinage S' de s_0

$$\rho : S' \longrightarrow M_0$$

qui a pour application linéaire tangente en s_0 l'application

$$T_{s_0}\Omega \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(E(s_0)_{|d}, E(s_0)_{|d})$$

donnée par le morphisme de Kodaïra-Spencer. C'est aussi le morphisme composé

$$\begin{tikzcd} T_{s_0}\Omega \arrow[r, "\omega"] \arrow[dr] & \operatorname{Ext}^1(E(s_0), E(s_0)) \arrow[d] \\ & \operatorname{Ext}^1(E(s_0)_{|d}, E(s_0)_{|d}) \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale est la flèche canonique de restriction. Elle s'insère dans une suite exacte

$$\operatorname{Ext}^1(E(s_0), E(s_0)) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(E(s_0)_{|d}, E(s_0)_{|d}) \longrightarrow \operatorname{Ext}^2(E(s_0), E(s_0)(-1)) \ ,$$

ce qui montre qu'elle est surjective. Le morphisme ρ est donc une submersion au voisinage de s_0. Son image rencontre l'ouvert non vide d'après Brieskorn [3] des points de M_0 correspondant aux fibrés rigides sur d. □

(b) Construction de fibrés semi-stables – Les hypothèses de la proposition (3.3) sont satisfaites pour le $\mathcal{O}_{S\times\mathbb{P}_2}$-module E. Par conséquent, l'ensemble des points $s \in S$ tels que $E(s)$ soit de poids $(\mathbf{r}, \mathbf{H})$ est une sous-variété lisse de codimension égale à $\dim(\operatorname{Ext}^1_{F,+}(E(s), E(s)))$. D'après le lemme (4.8), cette codimension est > 0 si la longueur l de $(\mathbf{r}, \mathbf{H})$ est supérieure à 1. Les poids concaves étant en nombre fini, on voit que l'ouvert des points ses tels que $E(s)$ soit semi-stable est non vide.

4.5 – Densité des faisceaux stables. Dans l'énoncé suivant, on fait l'hypothèse $\Delta \neq \dfrac{1}{2}$. On verra au chapitre 5 qu'en fait il n'existe pas de faisceau semi-stable de discriminant $\dfrac{1}{2}$.

Théorème (4.10) : *Soient r un entier > 1, μ et Δ deux rationnels tels que $\Delta \neq \dfrac{1}{2}$ et satisfaisant aux conditions* (S). *Alors l'ouvert M_s de $M = M(r, \mu, \Delta)$ correspondant aux faisceaux stables est partout dense.*

Démonstration. Considérons le $\mathcal{O}_{\mathcal{M}\times\mathbb{P}_2}$-module universel $\mathbb{E}$ construit au paragraphe 2.4. Soient $r_1, \ldots, r_l$ des entiers > 0 tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{l} r_i = r$; posons

$$H_i(m) \;=\; r_i(P(\mu+m) - \Delta)\ .$$

Considérons le morphisme canonique

$$\pi : \mathrm{Drap}^{H_1,\ldots,H_l}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathcal{M}\ .$$

On a déjà vu dans la proposition (2.6) que le $\mathcal{O}_{\mathcal{M}\times\mathbb{P}_2}$-module $\mathbb{E}$ satisfait à la condition (L), et le morphisme de déformation de Kodaïra-Spencer ω est donné au point $(u, v) \in \mathcal{M}$ par la projection canonique

$$Z^1(K, K) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(K, K)\ ,$$

où $K = K(u, v)$ est le complexe de Kronecker défini par (u, v).

Par conséquent, la propriété (KS) est aussi satisfaite. Comme dans le lemme (3.5), on a pour $s \in \mathcal{M}$ et $F \in \mathrm{Drap}^{H_1,\ldots,H_l}(\mathbb{E}(s))$

$$\mathrm{Ext}^2_{F,-}(\mathbb{E}(s), \mathbb{E}(s)) \;=\; 0\ ,$$

car les faisceaux gr_i associés à la filtration F de $\mathbb{E}(s)$ sont obligatoirement semi-stables de même pente μ ; par suite ω_+ est surjectif.

D'après la proposition (1.7), $\mathrm{Drap}^{H_1,\ldots,H_l}(\mathbb{E})$ est lisse et le morphisme π est de rang $\leq \dim(\mathcal{M}) - \dim(\mathrm{Ext}^1_{F,+}(E(s), E(s))$ en F. Si gr_i est le gradué associé à F, on a d'après le théorème de Riemann-Roch (1.1) et la suite spectrale (1.3)

$$\sum_i (-1)^i \dim(\mathrm{Ext}^i_{F,+}(\mathbb{E}(s), \mathbb{E}(s))) \;=\; \sum_{1\leq i<j\leq l} \chi(\mathrm{gr}_i, \mathrm{gr}_j) \;=\; \sum_{1\leq i<j\leq l} r_i r_j (1 - 2\Delta)\ .$$

Par suite $\dim(\mathrm{Ext}^1_{F,+}(\mathbb{E}(s), \mathbb{E}(s))) \geq \displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq l} r_i r_j (2\Delta - 1)$.

Supposons d'abord $2\Delta > 1$. L'image de π est alors un fermé de dimension $< \dim(\mathcal{M})$. Quand $(r_1, \ldots, r_l)$ varient, on obtient un nombre fini de tels fermés. Le complémentaire de leur réunion est un ouvert partout dense, qui n'est autre que l'ouvert $\mathcal{M}_s$ des points $s \in \mathcal{M}$ tels que $\mathbb{E}(s)$ soit stable. Par suite, M_s est un ouvert partout dense.

Si $2\Delta < 1$, pour $s \in \mathcal{M}$, $\mathbb{E}(s)$ serait un fibré semi-exceptionnel de pente μ, donc d'après la proposition (4.4) somme directe de fibrés exceptionnels de même pente μ. Les conditions (S) imposent en fait à $\mathbb{E}(s)$ d'être exceptionnel. Par suite $\mathcal{M}_s = \mathcal{M}$, et donc $M_s = M$. □

On verra au chapitre 5 (proposition (5.8)) que les conditions (S) imposent $\Delta \neq \dfrac{1}{2}$.

Démonstration du théorème C – Les conditions (S) sont nécessaires d'après la proposition (4.5) si $\Delta \geq \dfrac{1}{2}$, ou la remarque (4.6) si $\mu \in \mathfrak{E}$.

Réciproquement, si $\Delta \neq \dfrac{1}{2}$, et si les conditions (S) sont satisfaites, il existe au moins un fibré stable de rang r, de pente μ, de discriminant Δ. En effet, d'après le théorème (4.7) M n'est pas vide et l'intersection des ouverts partout denses M_0 (défini au paragraphe 2.5) et M_s (cf. théorème (4.10)) est encore un ouvert partout dense.

4.6 – Densité des faisceaux p-stables. Le résultat suivant précise le théorème (4.10) ; la démonstration en est voisine.

Théorème (4.11) : *Soient r un entier > 1, μ et Δ deux rationnels tels que $\Delta > \dfrac{1}{2}$ et satisfaisant aux conditions* (S). *Alors l'ouvert M_{ps} de $M = M(r,\mu,\Delta)$ correspondant aux faisceaux p-stables est partout dense.*

Démonstration. Considérons le module $\mathbb{E}_{|\mathcal{M}_s\times\mathbb{P}_2}$, déjà envisagé dans la démonstration du théorème (4,10). Soit $t \in \mathcal{M}_s$; si $\mathbb{E}(t)$ n'est pas p-stable, il a un sous-module cohérent $F_1 \subset \mathbb{E}(t)$ de pente μ, de rang $0 < r_1 < r$, et tel que pour tout sous-module cohérent $F' \subset \mathbb{E}(t)$ de même pente μ, de rang $0 < r' < r$ on ait

$$\frac{\chi(F')}{r'} \leq \frac{\chi(F_1)}{r_1} .$$

Le faisceau F_1 est alors semi-stable de pente μ ; de même, le quotient $\mathrm{gr}_2 = F/F_1$ est sans torsion et semi-stable, de pente μ. En effet, si $G_2 \subset \mathrm{gr}_2$ est un sous-module cohérent, il définit par image réciproque un sous-module G_2' de $\mathbb{E}(t)$, et on a la suite exacte $0 \to F_1 \to G_2' \to G_2 \to 0$. Alors $\mu(G_2) \leq \mu$ et en cas d'égalité

$$\frac{\chi(G_2)}{r(G_2)} \leq \frac{\chi(F_1)}{r_1} < \frac{\chi}{r} < \frac{\chi(\mathrm{gr}_2)}{r(\mathrm{gr}_2)} .$$

Soient r_1 et r_2 deux entiers positifs, Δ_1 et Δ_2 deux rationnels tels que

$$r_1 + r_2 = r , \qquad r_1\Delta_1 + r_2\Delta_2 = r\Delta , \qquad \Delta_1 > \Delta_2 \geq 0 .$$

Posons

$$H_i(m) = r_i(P(\mu+m) - \Delta_i) .$$

Considérons le morphisme canonique

$$\pi : \mathrm{Drap}^{H_1,H_2}(\mathbb{E}_{|\mathcal{M}_s\times\mathbb{P}_2}) \longrightarrow \mathcal{M}_s$$

et montrons que l'image de π est un fermé de codimension > 0.

Comme dans la démonstration du théorème (4.10), $\mathbb{E}$ satisfait aux conditions (L), (KS), et pour $t \in \mathcal{M}_s$ et $F \in \mathrm{Drap}^{H_1,H_2}(\mathbb{E}(t))$ on a $\mathrm{Ext}^2_{F,-}(\mathbb{E}(t),\mathbb{E}(t)) = 0$, pourvu que F_1 et $\mathrm{gr}_2 = F/F_1$ soient semi-stables. Ces conditions définissent un ouvert D de $\mathrm{Drap}^{H_1,H_2}(\mathbb{E}_{|\mathcal{M}_s\times\mathbb{P}_2})$ sur lequel ω_+ est surjectif. Par suite D est lisse (proposition (1.7)) et π est de rang $\leq \dim(\mathcal{M}) - \dim(\mathrm{Ext}^1_{F,+}(\mathbb{E}(t),\mathbb{E}(t))$ au point F de D. Quand r_i et Δ_i varient, les images des ouverts D ainsi construits, en nombre fini, recouvrent l'image de π. On est donc ramené à minorer, pour $F \in D$, la dimension de $\mathrm{Ext}^1_{F,+}(\mathbb{E}(t),\mathbb{E}(t))$.

D'après le théorème de Riemann-Roch (1.1), on a

$$\dim(\mathrm{Ext}^1_{F,+}(\mathbb{E}(t),\mathbb{E}(t))) = \dim(\mathrm{Ext}^1(F_1,\mathrm{gr}_2)) \geq r_1 r_2(\Delta_1 + \Delta_2 - 1) .$$

Vérifions que cette dimension est strictement positive. Si elle était nulle, on aurait $\Delta_1 + \Delta_2 \leq 1$ et par suite $\Delta_2 < \dfrac{1}{2}$. Par suite, gr_2 serait semi-exceptionnel. D'autre part, $\chi(F_1, \mathrm{gr}_2)$ serait ≥ 0. De la formule

$$\chi(\mathbb{E}(t), \mathrm{gr}_2) \ = \ \chi(F_1, \mathrm{gr}_2) + \chi(\mathrm{gr}_2, \mathrm{gr}_2) \ ,$$

on déduit alors $\chi(\mathbb{E}(t), \mathrm{gr}_2) > 0$. Mais ceci contredit les conditions (S).

Ainsi, l'image de π est un fermé de codimension > 0. Les fermés obtenus, déterminés par r_1 et Δ_1, sont en nombre fini. Le complémentaire de la réunion de ces fermés est un ouvert partout dense, qui n'est autre que l'ouvert $\mathcal{M}_{ps}$ des points t tels que $\mathbb{E}(t)$ soit p-stable. □

Corollaire (4.12) : *Sous les mêmes conditions, l'ouvert M^0_{ps} des fibrés p-stables est dense dans M et non vide.*

Démonstration. On a $M^0_{ps} = M_{ps} \cap M_0$, avec M_0 dense dans M d'après le corollaire (2.9). □

Démonstration du thèorème D – Supposons d'abord $r > 1$.

Il s'agit de démontrer que la variété $M = M(r, \mu, \Delta)$ est irréductible. Si M n'est pas vide et si $\Delta > \dfrac{1}{2}$, les conditions (S) sont satisfaites d'après la proposition (4.5). D'après le résultat d'Ellingsrud, M^0_{ps} est irréductible ; il est dense dans M d'après le corollaire (4.12). Donc M est irréductible. Si $\Delta \leq \dfrac{1}{2}$, M est réduite à un point ou vide (cf. proposition (4.4) et corollaire (5.9)).

Si $r = 1$ et si M est non vide, Δ est un entier ≥ 0. Si $\Delta > 0$, $M \simeq \mathrm{Hilb}_\Delta(\mathbb{P}_2)$; d'après Fogarty [9], M est encore irréductible. Si $\Delta = 0$, M est réduite à un seul point.

5. Pente des fibrés exceptionnels

Comme au chapitre précédent, $\mathfrak{E}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels qui sont pentes de fibrés exceptionnels. On se propose dans ce chapitre de décrire $\mathfrak{E}$ (théorème A) et de démontrer le théorème B.

5.1 – Arithmétique : l'application $\epsilon : \mathfrak{D} \to \mathbb{Q}$. Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$; on appelle *rang* r_α de α le plus petit entier $r > 0$ tel que $r\alpha \in \mathbb{Z}$; les nombres rationnels

$$\Delta_\alpha \ = \ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r_\alpha^2}\right) \ , \qquad \chi_\alpha \ = \ r_\alpha(P(\alpha) - \Delta_\alpha) \ ,$$

seront appelés respectivement *discriminant* et *caractéristique* de α.

Pour tout couple (α,β) de rationnels tels que $3+\alpha-\beta\neq 0$, l'équation en t : $P(\alpha-t)-\Delta_\alpha=P(t-\beta)-\Delta_\beta$ a une solution unique qu'on notera $t=\alpha.\beta$ donnée par

$$\alpha.\beta \;=\; \frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\Delta_\beta-\Delta_\alpha}{3+\alpha-\beta}\ .$$

Un couple (α,β) de nombres rationnels est dit *admissible* s'il satisfait aux conditions suivantes :

$$\text{(A)}\qquad\qquad \begin{cases} 0 \;<\; \beta-\alpha \;\leq\; 1\ , \\ P(\alpha-\beta) \;=\; \Delta_\alpha+\Delta_\beta\ , \\ \chi_\alpha\in\mathbb{Z}\ ,\quad \chi_\beta\in\mathbb{Z}\ . \end{cases}$$

Proposition (5.1) : *Soit (α,β) un couple admissible de rationnels. Alors :*

(a) $\alpha<\alpha.\beta<\beta$ *;*

(b) *le rationnel $\alpha.\beta$ est de rang $r_{\alpha.\beta}=r_\alpha r_\beta(3+\alpha-\beta)$;*

(c) *les couples $(\alpha,\alpha.\beta)$ et $(\alpha.\beta,\beta)$ sont admissibles.*

Démonstration. Pour vérifier (a) il suffit de constater que

$$\frac{|\Delta_\alpha-\Delta_\beta|}{3+\alpha-\beta}\;<\;\frac{\beta-\alpha}{2}\ .$$

Or, la condition $P(\alpha-\beta)=\Delta_\alpha+\Delta_\beta$ se lit aussi de manière équivalente

$$\begin{aligned}\Delta_\beta-\Delta_\alpha &\;=\; 1-2\Delta_\alpha+\frac{\alpha-\beta}{2}(3+\alpha-\beta)\ ,\\ \Delta_\alpha-\Delta_\beta &\;=\; 1-2\Delta_\beta+\frac{\alpha-\beta}{2}(3+\alpha-\beta)\ .\end{aligned}$$

Puisque $1-2\Delta_\alpha>0$ et $1-2\Delta_\beta>0$, ceci entraîne l'assertion (a).

Posons $\mu=\alpha.\beta$, $r=r_\alpha r_\beta(3+\alpha-\beta)$, $\Delta=P(\alpha-\mu)-\Delta_\alpha=P(\mu-\beta)-\Delta_\beta$.

Lemme (5.2) : *Si (α,β) est un couple admissible, on a*

$$\Delta\;=\;\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\ .$$

Démonstration. Par définition de μ et Δ on a

$$\Delta\;=\;P\left(\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\Delta_\beta-\Delta_\alpha}{3+\alpha-\beta}\right)-\Delta_\alpha\;=\;P\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\frac{1}{2}(\Delta_\alpha+\Delta_\beta)+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_\alpha-\Delta_\beta}{3+\alpha-\beta}\right)^2\ ,$$

par application de la formule de Taylor au polynôme P. D'autre part, par définition du polynôme P

$$P\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\;=\;1+\frac{3}{4}(\alpha-\beta)+\frac{1}{8}(\alpha-\beta)^2\;=\;\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P(\alpha-\beta)-\frac{1}{8}(\alpha-\beta)^2\ .$$

D'après l'hypothèse, on a $P(\alpha-\beta)=\Delta_\alpha+\Delta_\beta$, puisque (α,β) est admissible ; par suite, on obtient successivement

$$\Delta\;=\;\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_\alpha-\Delta_\beta}{3+\alpha-\beta}\right)^2-\frac{(\alpha-\beta)^2}{8}\;=\;\frac{1}{2}-\frac{(1-2\Delta_\alpha)(1-2\Delta_\beta)}{2(3+\alpha-\beta)^2}\;=\;\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\ .$$

$\square$

Lemme (5.3) : *Soient* $c_1 = r\mu$, $\chi = r(P(\mu) - \Delta)$. *Alors* c_1 *et* χ *sont entiers.*

Démonstration. Par définition de μ, on a

$$\mu \;=\; \frac{(P(\alpha) - \Delta_\alpha) - (P(-\beta) - \Delta_\beta)}{3 + \alpha - \beta} \;.$$

Par suite,

$$c_1 \;=\; r_\beta \chi_\alpha - r_\alpha \chi_{-\beta} \;.$$

Par hypothèse, χ_α et χ_β sont entiers ; $\chi_{-\beta}$ est aussi entier. et par suite c_1 est lui aussi entier. Par définition de Δ, on a

$$\frac{\chi}{r} \;=\; P(\mu) - P(\mu - \beta) + \Delta_\beta \;=\; 1 + \beta\mu - (P(-\beta) - \Delta_\beta) \;,$$

d'où

$$\frac{\chi}{r} + \frac{\chi_{-\beta}}{r_\beta} \;=\; \beta\mu + 1 \;,$$

ce qui donne d'après la formule donnant c_1

$$\chi \;=\; r - (3 + \alpha) r_\alpha \chi_{-\beta} + \beta r_\beta \chi_\alpha \;.$$

Par suite, χ est lui aussi entier. $\square$

Fin de la démonstration de la proposition (5.1) – Vérifions (b). D'après le lemme (5.3), $c_1 = r\mu$ est entier ; il suffit donc de vérifier que c_1 et r sont premiers entre eux. D'après le lemme (5.2) et la définition de χ, on a le système

$$(2\Delta - 1) r^2 \;=\; 1 \;, \quad r(P(\mu) - \Delta) \;=\; \chi \;.$$

Par élimination de Δ, on obtient $2r^2 P(\mu) - r^2 - 2r\chi = 1$, c'est-à-dire en introduisant c_1 :

$$c_1(c_1 + 3) + r(r - 2\chi) \;=\; 1 \;.$$

Par suite, c_1 et r sont premiers entre eux et donc $r_\mu = r$.

Vérifions (c), par exemple que le couple (α, μ) est admissible. D'après le lemme (5.2), on a aussi $\Delta_\mu = \Delta$. Compte tenu de l'assertion (a) et du lemme (5.3), il reste seulement à vérifier que $P(\alpha - \mu) = \Delta_\alpha + \Delta_\mu$; mais ceci se lit sur la définition de Δ. $\square$

Le lemme suivant servira dans la démonstration du théorème B.

Lemme (5.4) : *Soit* (α, β) *un couple admissible. Alors*

$$\alpha.\beta - \alpha \;\leq\; \frac{1}{2r_\alpha^2} \quad \textit{et} \quad \beta - \alpha.\beta \;\leq\; \frac{1}{2r_\beta^2} \;.$$

Démonstration. Les formules déjà utilisées pour un couple admissible

$$\Delta_\beta - \Delta_\alpha \;=\; \frac{1}{r_\alpha^2} + \frac{\alpha-\beta}{2}(3+\alpha-\beta)\ , \quad \Delta_\alpha - \Delta_\beta \;=\; \frac{1}{r_\beta^2} + \frac{\alpha-\beta}{2}(3+\alpha-\beta)\ ,$$

permettent d'écrire aussi

$$\alpha.\beta \;=\; \alpha + \frac{1}{r_\alpha^2(3+\alpha-\beta)} \;=\; \beta - \frac{1}{r_\beta^2(3+\alpha-\beta)}\ .$$

Le lemme résulte donc de la majoration $\beta-\alpha \leq 1$. □

Soit $\mathfrak{D}$ l'ensemble des nombres rationnels de la forme $p/2^q$, où $p \in \mathbb{Z}$, et où q est un entier ≥ 0. Considérons l'application $\epsilon : \mathfrak{D} \to \mathbb{Q}$ définie par récurrence sur q, en posant

(1) $\epsilon(n) = n$ pour $n \in \mathbb{Z}$,

(2) $\epsilon\left(\dfrac{2p+1}{2^{q+1}}\right) = \epsilon\left(\dfrac{p}{2^q}\right).\epsilon\left(\dfrac{p+1}{2^q}\right)$.

La proposition suivante montre que cette construction est possible :

Proposition (5.5) : (1) *L'application ϵ est bien définie et strictement croissante.*

(2) *Les couples* $\left(\epsilon\left(\dfrac{p}{2^q}\right), \epsilon\left(\dfrac{p+1}{2^q}\right)\right)$ *sont admissibles.*

(3) *Si p est impair, le rang de $\epsilon\left(\dfrac{p}{2^q}\right)$ est $\geq 2^q$.*

(4) *Pour $\rho \in \mathfrak{D}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $\epsilon(\rho+n) = \epsilon(\rho)+n$, et $\epsilon(-\rho) = -\epsilon(\rho)$.*

Démonstration. L'injection $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ satisfait sur $\mathbb{Z}$ aux propriétés (1), (2), (3), (4). Soit q un entier ≥ 0 ; désignons par $\mathfrak{D}_q$ l'ensemble des nombres rationnels de la forme $p/2^{q'}$, avec $q' \leq q$. Supposons l'application $\epsilon : \mathfrak{D}_q \to \mathbb{Q}$ construite, satisfaisant sur $\mathfrak{D}_q$ aux propriétés (1), (2), (3), (4). Le couple $\left(\epsilon\left(\dfrac{p}{2^q}\right), \epsilon\left(\dfrac{p+1}{2^q}\right)\right)$ est admissible ; par suite la formule $\epsilon\left(\dfrac{p}{2^q}\right).\epsilon\left(\dfrac{p+1}{2^q}\right)$ a bien un sens, ce qui permet de définir $\epsilon\left(\dfrac{2p+1}{2^{q+1}}\right)$. D'après la proposition (5.1), les couples

$$\left(\epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right), \epsilon\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right)\right) \quad \text{et} \quad \left(\epsilon\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right), \epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right)\right)$$

sont admissibles. En outre, l'assertion (b) de la proposition (5.1) montre que $\epsilon\left(\dfrac{2p+1}{2^{q+1}}\right)$ est de rang $r_\alpha \geq 2^q.2 = 2^{q+1}$. Reste à vérifier l'assertion (4). Par hypothèse de récurrence, pour $\rho \in \mathfrak{D}_q$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $\epsilon(\rho+n) = \epsilon(\rho)+n$, et $\epsilon(-\rho) = -\epsilon(\rho)$; par conséquent $\epsilon(\rho)$, $\epsilon(-\rho)$ et $\epsilon(\rho+n)$ ont même rang et par suite même discriminant. Il résulte de la définition de l'opération . que les formules $\epsilon(\rho+n) = \epsilon(\rho)+n$, et $\epsilon(-\rho) = -\epsilon(\rho)$ restent vraies si $\rho \in \mathfrak{D}_{q+1}$. D'où la proposition. □

5.2 – Description de $\mathfrak{E}$.

Lemme (5.6) : *Soient*

$$\alpha \;=\; \epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right) \;,\quad \beta \;=\; \epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right) \;,\quad \mu \;=\; \epsilon\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right) \;.$$

On suppose que α et $\beta \in \mathfrak{E}$. Alors :

(1) *Pour tout $\mu' \in \mathfrak{E}$ tel que $\alpha < \mu' < \beta$, on a $r_{\mu'} \geq r_\mu$.*

(2) *$\mu \in \mathfrak{E}$.*

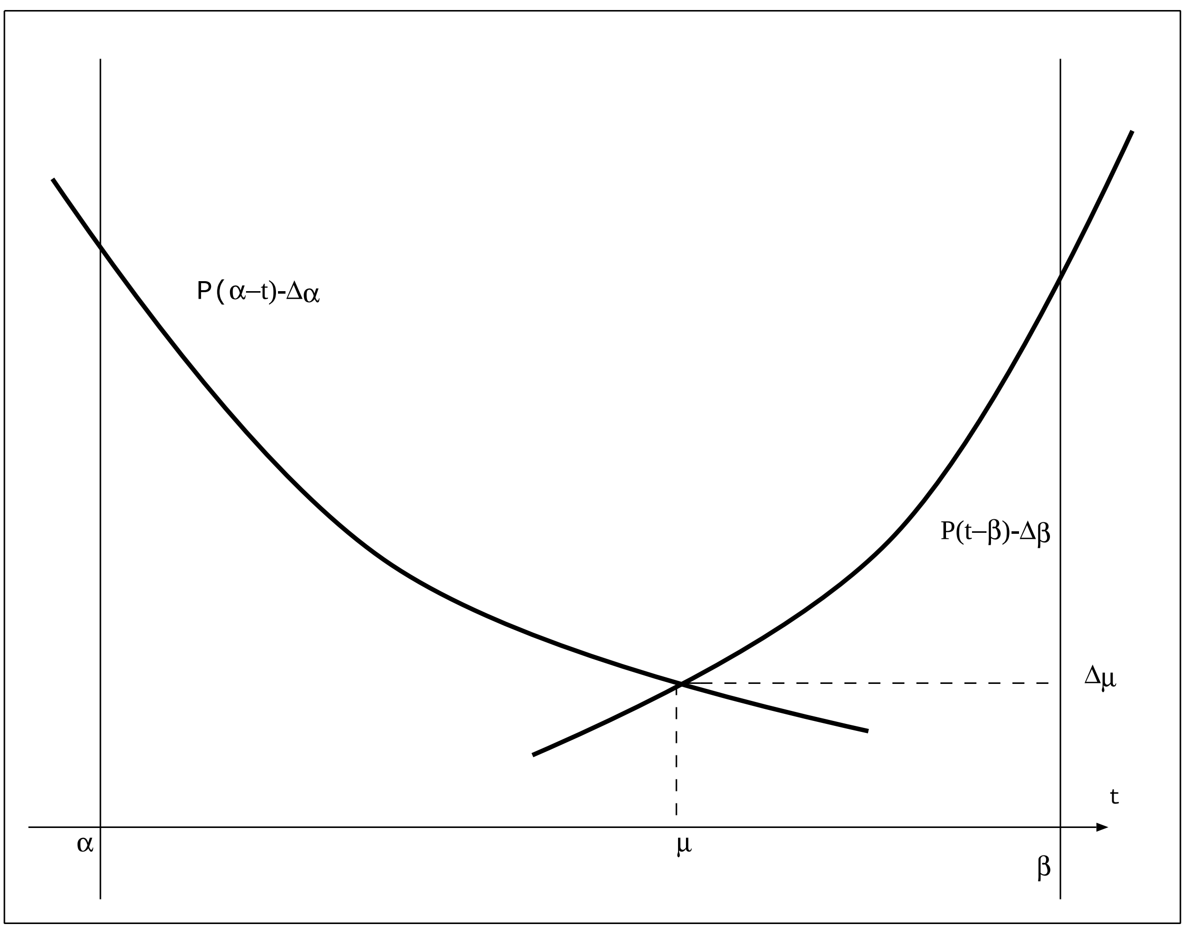
Démonstration. **(1)** – Soit E' un fibré exceptionnel de pente μ', avec $\alpha < \mu' < \beta$. Son rang est $r_{\mu'}$, et son discriminant $\Delta' = \Delta_{\mu'}$, d'après le paragraphe 4.2. D'après la remarque (4.6), on a puisque α et $\beta \in \mathfrak{E}$ et $|\mu' - \alpha| < 3$, $|\mu' - \beta| < 3$

$$\Delta' \;\geq\; P(\alpha - \mu') - \Delta_\alpha \quad \text{et} \quad \Delta' \;\geq\; P(\mu' - \beta) - \Delta_\beta \;.$$

Or, les fonctions $t \mapsto P(\alpha - t) - \Delta_\alpha$ et $t \mapsto P(t - \beta) - \Delta_\beta$ ont respectivement pour dérivée

$$-\left(\frac{3}{2} + \alpha - t\right) \quad et \quad \frac{3}{2} + t - \beta \;;$$

elles sont donc respectivement décroissante et croissante sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ et égales pour $t = \mu$, où elles valent Δ_μ d'après le paragraphe 5.1.



Il en résulte que $\Delta' \geq \Delta_\mu$. Par définition du discriminant, on obtient

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r_{\mu'}^2}\right) \;\geq\; \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r_\mu^2}\right) \;,$$

c'est-à-dire $r_{\mu'} \geq r_\mu$.

(2) – Il s'agit de montrer qu'il existe un fibré stable de rang $r = r_\mu$, de pente μ, de discriminant $\Delta = \Delta_\mu$; puisque $\Delta \neq \dfrac{1}{2}$, on peut appliquer le théorème C (cf. §4.5). On doit donc vérifier que les conditions (S) sont satisfaites pour le triplet (r, μ, Δ) :

– $r\mu \in \mathbb{Z}$ et $r(P(\mu) - \Delta) \in \mathbb{Z}$: ceci résulte de la définition de r, et de la proposition (5.5) ;

– pour tout $\alpha' \in \mathfrak{E}$, tel que $|\alpha' - \mu| < 1$ et $r_{\alpha'} < r$,

$$P(-|\alpha'-\mu|) - \Delta_{\alpha'} \;\leq\; \Delta \;.$$

Soit un tel élément α'. D'après la partie (1) on a $\alpha' \notin]\alpha, \beta]$. Supposons d'abord $\alpha' \leq \alpha$. La fonction $t \mapsto P(\alpha' - t) - \Delta_{\alpha'} - (P(\alpha - t) - \Delta_\alpha)$ a pour dérivée $\alpha - \alpha'$ et donc est croissante. Le couple (α, β) étant admissible, pour $t = \beta$ elle vaut $P(\alpha' - \beta) - \Delta_{\alpha'} - \Delta_\beta$. Puisque $|\alpha' - \beta| \leq 2$, cette quantité est négative d'après la remarque (4.6). Pour $t = \mu$, on obtient, compte tenu du fait que le couple (α, μ) est admissible, $P(\alpha' - \mu) - \Delta_{\alpha'} - \Delta \leq 0$.

De même, si $\beta \leq \alpha'$, la fonction $t \mapsto P(t - \alpha') - \Delta_{\alpha'} - (P(t - \beta) - \Delta_\beta)$ de dérivée $\beta - \alpha'$ est décroissante, et négative pour $t = \alpha$. Pour $t = \mu$, en utilisant le fait que le couple (μ, β) est admissible, on obtient $P(\mu - \alpha') \leq \Delta_{\alpha'} + \Delta$, ce qui achève la démonstration. □

Démonstration du théorème A (cf. introduction) – Soit $\mathfrak{D}_q$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{D}$ de la forme $p/2^{q'}$, avec $q' \leq q$. Montrons d'abord par récurrence sur q que $\epsilon(\mathfrak{D}_q) \subset \mathfrak{E}$. On a par définition $\epsilon(\mathfrak{D}_0) = \mathbb{Z}$, et $\mathbb{Z} \subset \mathfrak{E}$ puisque tout entier est la pente d'un fibré de rang 1, lequel est exceptionnel. Supposons le résultat démontré pour $\mathfrak{D}_q$, et considérons l'élément $\rho = \dfrac{2p+1}{2^{q+1}} \in \mathfrak{D}_{q+1}$. D'après le lemme ci-dessus, $\epsilon(\rho) \in \mathfrak{E}$. Par suite $\epsilon(\mathfrak{D}_{q+1}) \subset \mathfrak{E}$.

Montrons que $\mathfrak{E} \subset \epsilon(\mathfrak{D})$. Soient $\mu \in \mathfrak{E}$, et q un entier tel que $2^q \geq r_\mu$. Soit $\dfrac{p}{2^q}$ l'élément de $\mathfrak{D}$ tel que

$$\epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right) \;\leq \mu < \; \epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right) \;.$$

D'après la proposition (5.5), $\epsilon\left(\dfrac{2p+1}{2^{q+1}}\right)$ est de rang $\geq 2^{q+1}$, donc supérieur à r_μ. La partie (1) du lemme (5.6) impose $\mu = \epsilon\left(\dfrac{p}{2^q}\right)$ et par suite $\mu \in \epsilon(\mathfrak{D})$.

5.3 – La condition $\Delta \neq \dfrac{1}{2}$. Soient R un réel > 1, $\mathfrak{E}(R)$ l'ensemble des $\alpha \in \mathfrak{E} = \epsilon(\mathfrak{D})$ tels que $r_\alpha \leq R$. Cet ensemble est localement fini d'après la proposition (5.5). Soient $\mu \in \mathbb{Q}$, et $\alpha \leq \mu \leq \beta$ les éléments de $\mathfrak{E}(R)$ qui encadrent μ : $\beta - \alpha$ est donc minimum.

Lemme (5.7) : *Si $\alpha \neq \beta$, iI existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que*

$$\alpha \;=\; \epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right) \;,\quad \beta \;=\; \epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right) \;.$$

Démonstration. Si α et $\beta \in \mathbb{Z}$, le résultat est trivial. Sinon, on peut écrire

$$\alpha \;=\; \epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right) \;,\quad \beta \;=\; \epsilon\left(\frac{p'}{2^q}\right) \quad \text{avec} \quad q \geq 1$$

et p ou p' impair, par exemple $p = 2m+1$. D'après la proposition (5.1), l'élément $\epsilon\left(\dfrac{m+1}{2^{q-1}}\right)$ est de rang $\leq R$ donc appartient à $\mathfrak{E}(R)$. Par définition de α et β, on a

$$\beta \;\leq\; \epsilon\left(\frac{m+1}{2^{q-1}}\right)$$

et par suite $p' \leq 2m+2$. □

L'énoncé suivant complète la démonstration du théorème C (cf. §4.5).

Proposition (5.8) : *Soient r un entier > 1, μ et $\Delta \in \mathbb{Q}$ satisfaisant aux conditions* (S)*.Alors* $\Delta \neq \dfrac{1}{2}$.

Démonstration. Supposons $\Delta = \dfrac{1}{2}$. Soient $\alpha \leq \mu \leq \beta$ les éléments de $\mathfrak{E}(r-1)$ qui encadrent μ. D'après les conditions (S)

$$\Delta \;\geq\; P(\alpha-\mu) - \Delta_\alpha \quad \text{et} \quad \Delta \;\geq\; P(\mu-\beta) - \Delta_\beta \;.$$

Ceci entraîne $\alpha \neq \beta$. D'après le lemme (5.7) et la proposition (5.5), le couple (α, β) est admissible ; considérons l'élément $\alpha.\beta$, qui appartient à $\mathfrak{E}$ d'après le théorème A. Par définition de α et β, $r_{\alpha.\beta} \geq r$, car d'après la proposition (5.1), $\alpha \leq \alpha.\beta \leq \beta$.

On a $\mu \neq \alpha.\beta$: sinon $\mu = \alpha.\beta$ et $r_{\alpha.\beta}$ diviserait r, et par suite $r_{\alpha.\beta} \leq r$ et on pourrait écrire

$$r_{\alpha.\beta}(P(\alpha.\beta) - \Delta_{\alpha.\beta}) - r(P(\mu) - \Delta) \;=\; r(\Delta - \Delta_{\alpha.\beta}) \;=\; \frac{1}{2r} \;,$$

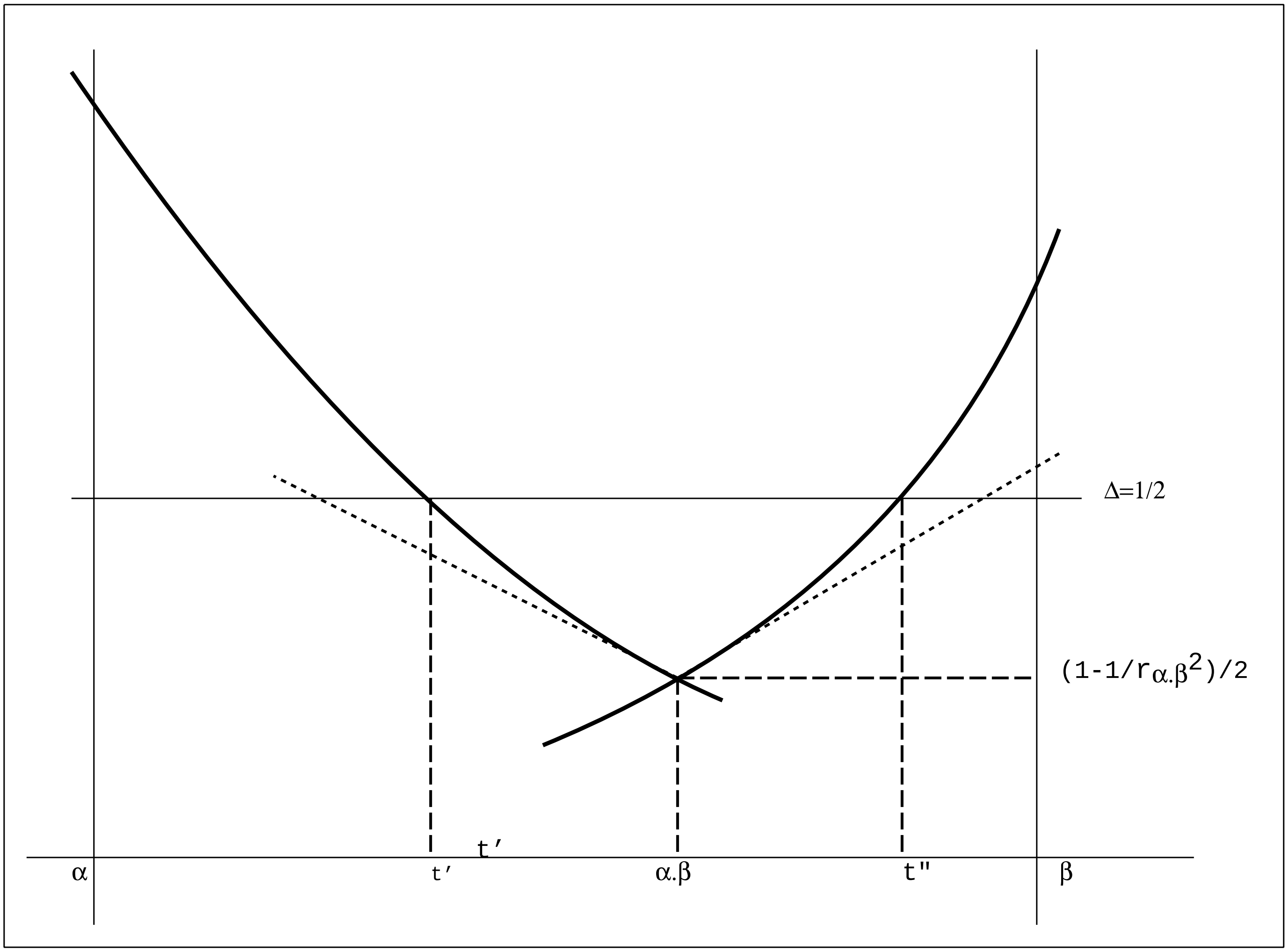
ce qui est absurde puisque cette quantité doit être entière. Donc $\mu \neq \alpha.\beta$, et puisque $r \leq r_{\alpha.\beta}$:

$$|\mu - \alpha.\beta| \;\geq\; \frac{1}{r_{\alpha.\beta} r} \;\geq\; \frac{1}{r_{\alpha.\beta}^2} \;.$$

Les équations $P(\alpha - t) = \Delta_\alpha + \dfrac{1}{2}$ et $P(t-\beta) = \Delta_\beta + \dfrac{1}{2}$ ont chacune une solution, respectivement t' et t'', telle que $\alpha \leq t' \leq \alpha.\beta$ et $\alpha.\beta \leq t'' \leq \beta$. Alors

$$\alpha.\beta - t' \;\leq\; \frac{1}{2r_{\alpha.\beta}^2} \;,\quad t'' - \alpha.\beta \;\leq\; \frac{1}{2r_{\alpha.\beta}^2} \;.$$

En effet, les pentes des deux tangentes en $\alpha.\beta$ sont respectivement $-\left(\dfrac{3}{2}+\alpha-\alpha.\beta\right)$ et $\dfrac{3}{2}-\beta+\alpha.\beta$, donc minorées par 1 en valeur absolue (cf. lemme (5.4)). L'assertion en résulte par convexité.



Par suite, $\mu \notin [t', t'']$. Ceci implique $\Delta > \dfrac{1}{2}$, ce qui contredit l'hypothèse. □

Corollaire (5.9) : *Il n'existe pas de faisceau semi-stable de discriminant* $\dfrac{1}{2}$.

Démonstration. Si E est un faisceau semi-stable de rang r, de pente μ, de discriminant $\Delta = \dfrac{1}{2}$, le triplet $(r, \mu, \dfrac{1}{2})$ satisfait aux conditions (S) d'après la proposition (4.5). Ceci contredit la proposition (5.8). □

5.4. – Démonstration du théorème B. (cf. introduction). Soient (α, β) les éléments de $\mathfrak{E}(\frac{r}{2})$ qui encadrent μ. D'après le théorème C, les conditions

$$\Delta \ \geq \ P(\alpha - \mu) - \Delta_\alpha \ , \quad \Delta \ \geq \ P(\mu - \beta) - \Delta_\beta$$

sont évidemment nécessaires pour qu'il existe un fibré stable de rang r, de pente μ, de discriminant Δ. Réciproquement, supposons $r\mu \in \mathbb{Z}$, $r(P(\mu) - \Delta) \in \mathbb{Z}$, et ces conditions satisfaites. D'après le théorème (C), pour obtenir l'existence d'un fibré stable de rang r, de pente μ, de discriminant Δ, il suffit de vérifier les conditions (S), c'est-à-dire : pour tout $\alpha' \in \mathfrak{E}$ tel que $r_{\alpha'} < r$ et $|\alpha' - \mu| \leq 1$, $P(-|\alpha' - \mu|) \leq \Delta_{\alpha'} + \Delta$.

D'après le lemme (5.7), ou $\alpha = \beta$, ou il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que

$$\alpha \ = \ \epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right) \quad \text{et} \quad \beta \ = \ \epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right) \ .$$

Le même argument que dans la démonstration du lemme (5.6) montre que

$$\text{si} \quad \alpha' \leq \alpha \ , \quad P(\alpha' - \mu) - \Delta_{\alpha'} \ \leq \ P(\alpha - \mu) - \Delta_\alpha \ ,$$

et

$$\text{si} \quad \alpha' \geq \beta \ , \quad P(\mu - \alpha') - \Delta_{\alpha'} \ \leq \ P(\mu - \beta) - \Delta_\beta \ .$$

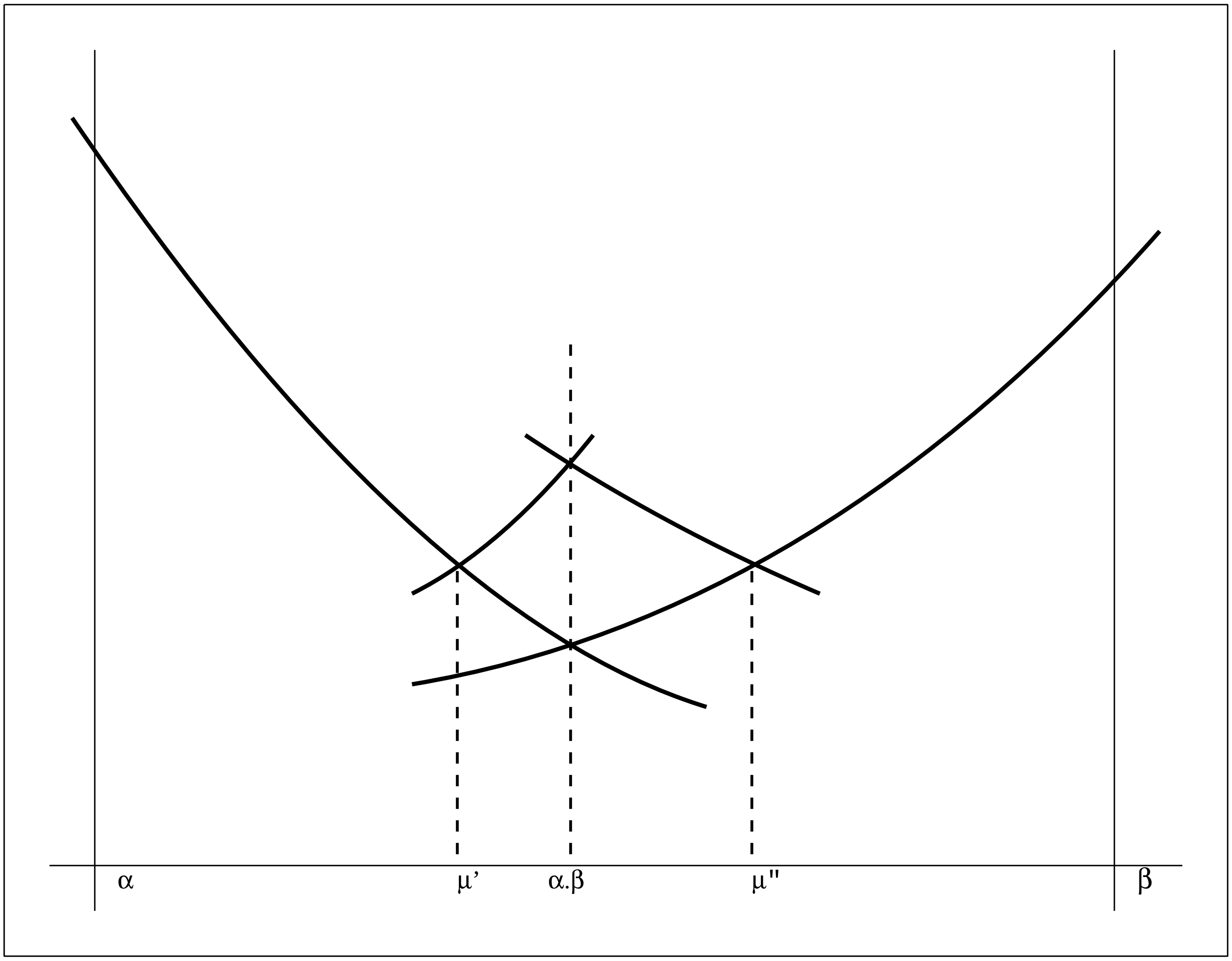
Pour ces α', l'hypothèse entraîne donc $P(-|\mu - \alpha'|) \leq \Delta_{\alpha'} + \Delta$.

Reste à examiner le cas où $\alpha < \beta$ et où il existe $\alpha' \in \mathfrak{E}$ tel que $r_{\alpha'} < r$ et $\alpha < \alpha' < \beta$. Par définition de α et β, on doit avoir

$$(*) \qquad \frac{r}{2} \ < \ r_{\alpha'} \ < \ r$$

et la seule possibilité est $\alpha' = \alpha.\beta = \epsilon\left(\dfrac{2p+1}{2^{q+1}}\right)$. Mais alors $\mu \neq \alpha.\beta$ car sinon $r_{\alpha.\beta}$ diviserait r, et donc $r \geq 2r_{\alpha.\beta}$, ce qui contredit (*). Par suite

$$|\mu - \alpha.\beta| \geq \ \frac{1}{r_{\alpha.\beta} r} \ > \ \frac{1}{2r^2_{\alpha.\beta}} \ .$$



Considérons $\mu' = \alpha.(\alpha.\beta)$ et $\mu'' = (\alpha.\beta).\beta$. D'après le lemme (5.4), on a

$$\alpha.\beta - \mu' \ \leq\ \frac{1}{2r_{\alpha.\beta}^2}\ , \quad \mu'' - \alpha.\beta\ \leq\ \frac{1}{2r_{\alpha.\beta}^2}\ .$$

Il en résulte que $\mu \notin [\mu', \mu'']$. Si $\mu < \mu'$, on a

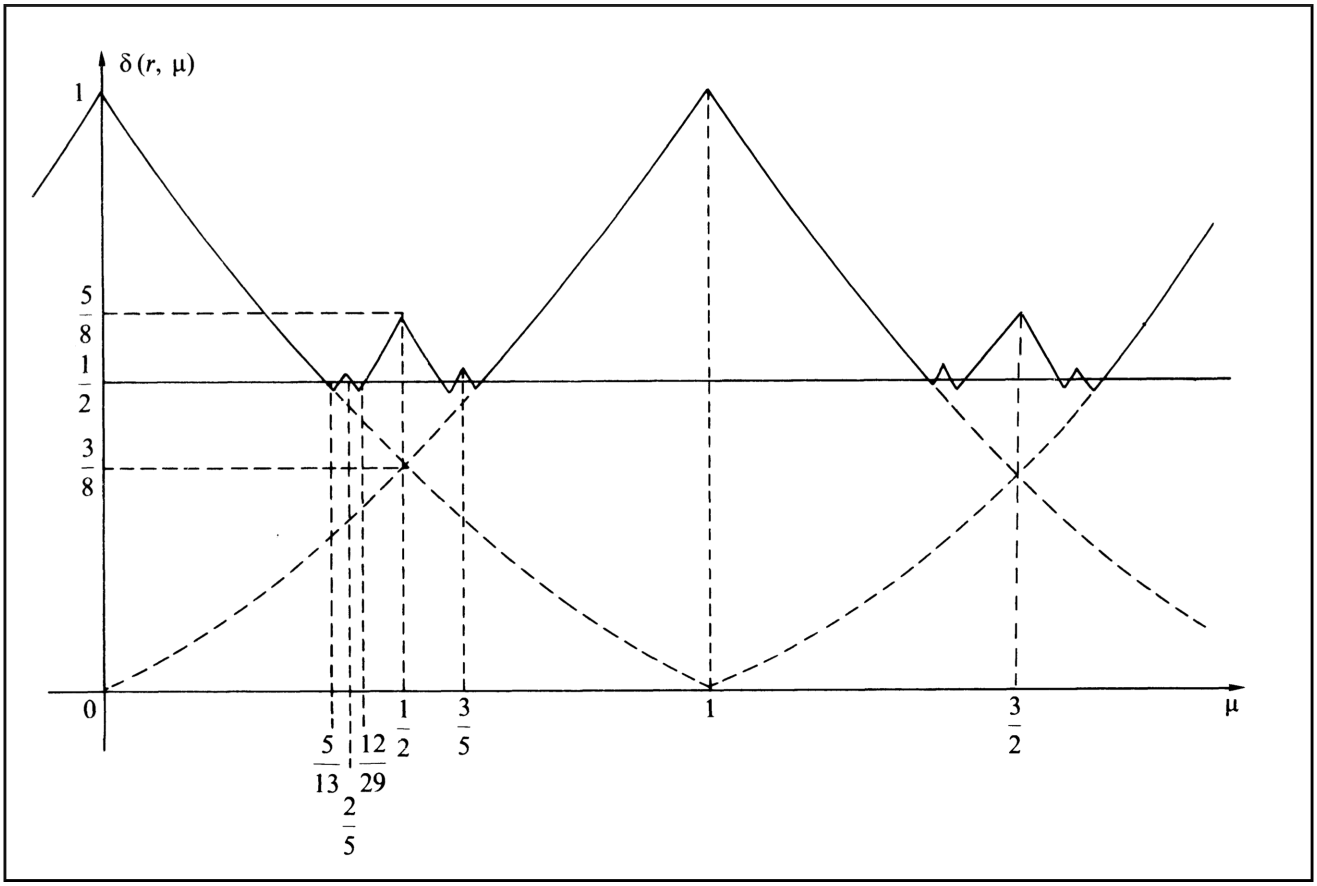
$$P(\mu - \alpha.\beta) - \Delta_{\alpha.\beta}\ \leq\ P(\mu' - \alpha.\beta) - \Delta_{\alpha.\beta}\ =\ P(\alpha - \mu') - \Delta_\alpha\ \leq\ P(\alpha - \mu) - \Delta_\alpha\ \leq\ \Delta\ .$$

De même, si $\mu'' < \mu$, $P(\alpha.\beta - \mu) - \Delta_{\alpha.\beta} \leq \Delta$. Ainsi, les conditions (S) sont satisfaites pour le triplet (r, μ, Δ), et le théorème est démontré.

5.5. – La fonction $\mu \mapsto \delta(r,\mu)$. Soit r un entier > 1 ; on pose

$$\delta(r,\mu)\ =\ \sup_{\alpha \in \mathfrak{E}\left(\frac{r}{2}\right);|\alpha-\mu|\leq 1} \big(P(-|\alpha-\mu|) - \Delta_\alpha\big)\ ,$$

de sorte que les conditions (S) se lisent aussi $r\mu \in \mathbb{Z}$, $r(P(\mu) - \Delta) \in \mathbb{Z}$ et $\Delta \geq \delta(r,\mu)$. Le graphe de la fonction $\mu \mapsto \delta(r,\mu)$ est formé d'arcs de paraboles se coupant en des points d'abcisse $\alpha \in \mathfrak{E}$. Le schéma suivant représente le graphe de $\mu \mapsto \delta(r,\mu)$, pour $10 \leq r \leq 25$.



Références

[1] M. F. Atiyah, M. F., Bott, R. *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces.* Phil. Trans. Roy. Soc. London A, 308, (1982), 523-615.

[2] Barth, W. *Moduli of vector bundles on the projective plane.* Invent. Math. 42 (1977) 63-91.

[3] Brieskorn, E. *Über holomorphe $\mathbb{P}_n$-Bündel über $\mathbb{P}_1$.* Math. Ann. 157 (1967), 343-357.

[4] Brun, J., Hirschowitz, A. *Droites de saut des fibrés stables de rang élevé sur $\mathbb{P}_2$.* Math. Z. 181, (1982), 171-178.

[5] Drézet, J.-M. *Fibrés uniformes de type* $(0, \ldots, 0, -1, \ldots, -1)$ *sur* $\mathbb{P}_2$. Journ. für die reine und angew. Math. 325 (1981), 1-27.

[6] Ellingsrud, G. *Sur l'irréductibilité du module des fibrés stables sur* $\mathbb{P}_2$. Math. Z. 192 (1983), 189-192.

[7] Gieseker, D. *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface.* Ann. of Math. 105 (1977) 45-60.

[8] Grothendieck, A. *Techniques de construction en géométrie algébrique.* Sém. Bourbaki 221 (1961).

[9] Fogarty, J. *Algebraic families on an algebraic surface.* Amer. Journ. of Math. 90 (1968), 511-521.

[10] Harder, G., Narasimhan, M.S. *On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves.* Math. Ann. 212 (1975) 215-248.

[11] Hartshorne. R. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New-York (1977).

[12] Hulek, K. *On the classification of stable rank-r vector bundles on the projective plane.* Vector bundles and differential Equations. (Proceedings, Nice, 1979). Progress in Math. 7 (1980) 113-144.

[13] Le Potier, J. *Fibrés stables de rang 2 sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Math. Ann. 241 (1979), 217-256.

[14] Le Potier, J. *Stabilité et amplitude sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Vector bundles and differential Equations. (Proceedings, Nice, 1979). Progress in Math. 7 (1980), 146-181.

[15] Le Potier, J. *Un critère de lissité pour le module de Douady-Grothendieck.* http ://www.institut.math.jussieu.fr/projets/tge/jlp/scandrezetX2.pdf

[16] Maruyama, M. *Moduli of stable sheaves II.* Journ. of Math. of Kyoto Univ. 18, 3 (1978), 557-614.

[17] Schwartzenberger, R.L.E. *Vector bundles on algebraic surfaces.* Proc. of London Math. Soc. (3), 11 (1961), 601-622.

[18] Schwartzenberger, R.L.E. *Vector bundles on the projective plane.* Proc. of London Math. Soc. (3), 11 (1961), 623-640.

[19] Seshadri, C.S. *Mumford's conjecture for* GL(2) *and applications.* Algebraic Geometry. Bombay Colloquium, 1968-1969, 347-371.

[20] Shatz, S. *The decomposition and specialization of algebraic families of vector bundles.* Compos. Math. 35, (2) (1977), 163-187.

[21] Verdier, J.-L. *Instantons.* Les équations de Yang-Mills. Astérisque 71-72 (1980), 105-134.

Note : Ce texte reproduit l'article

Drézet, J.-M., Le Potier, J. *Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur* $\mathbb{P}_2$. Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 18 (1985), 193-244.

La construction et des propriétés supplémentaires des fibrés exceptionnels ont ensuite été données dans

Drézet, J.-M. *Fibrés exceptionnels et suite spectrale de Beilinson généralisée sur* $\mathbb{P}_2$. Math. Ann 275 (1986), 25-48. (https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00832689v1)

et des applications aux variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$ dans

Drézet, J.-M. *Fibrés exceptionnels et variétés de modules de faisceaux semi-stables sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Journ. für die reine und angew. Math. 380 (1987), 14-58. (https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00864252v1)

La notion de fibré exceptionnel a été généralisée aux espaces projectifs $\mathbb{P}_n$, et à d'autres variétés dans

Gorodentsev, A.L., Rudakov, A.N. *Exceptional vector bundles on projective spaces.* Duke Math. Journ. 54 (1987), 115-130.

Rudakov A.N. et al. *Helices and Vector Bundles : séminaire Rudakov.* London Math. Soc. Lect. Note Series 148. Cambridge Univ. Press (1990)

Les conditions d'existence des faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, en fonction de leur classes de Chern, sont décrites dans

Rudakov A.N. *A description of Chern classes of semi-stable sheaveson a quadric surface.* J. reine angew. Math. 453 (1994), 113-135.

Elles s'expriment en fonction des fibrés exceptionnels sur $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$.

La construction des variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$ comme bon quotients de variétés de monades, donnée dans le chapitre 2, est obtenue par une autre méthode dans

Le Potier, J. *À propos de la construction de l'espace de modules des faisceaux semi-stables sur le plan projectif.* Bull. Soc. math. France 122 (1994), 363-369.

J.-M. Drézet – Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France

E-mail address: jean-marc.drezet@imj-prg.fr