DÉFORMATIONS DES EXTENSIONS LARGES DE FAISCEAUX

JEAN–MARC DRÉZET

Sommaire

1.	Introduction	1
2.	Préliminaires	11
3.	Déformations infinitésimales de faisceaux cohérents	24
4.	Extensions de faisceaux cohérents	30
5.	Faisceaux réguliers	39
6.	Extensions larges - Définition	49
7.	Propriétés des extensions larges	56
8.	Variétés de modules d'extensions larges	79
9.	Extensions larges sur les surfaces	86
Références		96

1. Introduction

Soient X une variété algébrique projective lisse irréductible sur $\mathbb{C}$, de dimension $d > 0$ et $\mathcal{O}_X(1)$ un fibré en droites très ample sur X. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X tel que $rg(\mathcal{F}) > 0$, on pose

$$\mu(\mathcal{F}) \ = \frac{c_1(\mathcal{F}).\mathcal{O}_X(1)^{d-1}}{rg(\mathcal{F})}.$$

Il est bien connu que les faisceaux semi-stables relativement à $\mathcal{O}_X(1)$, de rang et de classes de Chern donnés sur X admettent une variété de modules grossiers, qui est dans certains cas une variété de modules fins (cf. [33], [34], [46], [50]). D'autres ensembles de classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents sur X peuvent aussi avoir une variété de modules fins (cf. [5]). Les cas traités dans [5] concernent des faisceaux qui ne sont pas loin d'être semi-stables (par exemple les faisceaux *prioritaires* sur $\mathbb{P}_2$ définis dans [19]). On s'intéresse ici à des faisceaux *très instables* : on va étudier des fibrés vectoriels E possèdant un sous-faisceau Γ tel que $\mu(\Gamma) \gg \mu(E)$. On s'intéresse aux déformations de tels fibrés.

Rappelons qu'un faisceau cohérent Γ sur X possède une *déformation semi-universelle* $\mathcal{G}$, qui est un faisceau analytique sur $S \times X$, (S, s_0) étant un germe de variété analytique, tel que $\mathcal{G}_{s_0} \simeq \Gamma$. De plus, l'espace tangent $T_{s_0}S$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Ext}^1(\Gamma, \Gamma)$ (cf. 3.1, [47]). Le germe (S, s_0) s'appelle la *base* de la déformation semi-universelle de Γ. Dans cet article on dira que Γ est *lisse* si S est lisse en s_0. On dit que Γ est *2-lisse* si le morphisme trace $\mathrm{Ext}^2(\Gamma,\Gamma)\to H^2(\mathcal{O}_X)$ est injectif (cf. 2.3). Un faisceau 2-lisse est lisse.

1.1. FIBRÉS INSTABLES DE RANG 2 SUR $\mathbb{P}_n$

Les fibrés vectoriels instables de rang 2 sur $\mathbb{P}_2$ ou $\mathbb{P}_3$ ont déjà été étudiés. Soit $n\geq 2$ un entier. Pour étudier les fibrés vectoriels algébriques de rang 2 sur $\mathbb{P}_n$ on utilise la *construction de Serre* qui établit un lien entre ces fibrés et les sous-variétés localement intersections complètes de codimension 2 de $\mathbb{P}_n$ (cf. [38], chap. I, § 5, [20], [3], [16]). Soit E un fibré vectoriel algébrique de rang 2 et de classes de Chern $c_1=0$ ou 1, c_2 sur $\mathbb{P}_n$. Soit d le plus grand entier δ tel que $h^0(E(-\delta))>0$. Alors E est non semi-stable si et seulement si $d>0$. Si c'est le cas on dit que d est le *degré d'instabilité* de E. On a une suite exacte

$$(*)\qquad 0\longrightarrow\mathcal{O}(d)\longrightarrow E\longrightarrow\mathcal{I}_Z(c_1-d)\longrightarrow 0$$

Z étant une sous-variété fermée localement intersection complète de codimension 2 de $\mathbb{P}_n$, $\mathcal{I}_Z$ désignant son faisceau d'idéaux.

Le cas a de $\mathbb{P}_2$ été traité par S.A. Strømme dans [48] (Z est alors un sous-schéma de dimension 0, de longueur $m=c_2+d(d-c_1)$). La construction de Serre permet de construire une "variété de modules" pour de tels fibrés : c'est la variété $M(d,c_1,c_2)$ des paires (Z,σ) avec $Z\in\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$, σ parcourant l'ouvert de $\mathbb{P}(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_Z(c_1-d),\mathcal{O}(d)))$ correspondant aux extensions $(*)$ telles que E soit localement libre. Strømme montre que les déformations d'un fibré de rang 2 de degré d'instabilité d générique sont aussi des fibrés de degré d'instabilité d. Cependant on a

$$\dim(\mathrm{Ext}^1(E,E))\ >\ \dim(M(d,c_1,c_2)),$$

ce qui signifie que la base d'une déformation universelle de E n'est pas réduite. En particulier, $M(d,c_1,c_2)$ ne peut pas être une variété de modules fins.

Le cas de $\mathbb{P}_3$ a été traité par C. Bănică dans [2] (voir aussi [18], § 1). La construction de Serre permet aussi dans ce cas de construire une sorte de variété de modules pour les fibrés de degré d'instabilité donné.

1.2. EXTENSIONS LARGES

Si T est un faisceau pur sur X, on note

$$\widetilde{T}\ =\ T^\vee\otimes\omega_X^{-1}.$$

On dit que T est *parfait* si $\mathcal{E}xt^q(T,\mathcal{O}_X)=0$ pour $q>\mathrm{codim}(T)$ (cf. 2.7).

Soit F un faisceau cohérent non nul sur X. On dit que F est *régulier* si F est sans torsion, F^{**} simple, F^{**} 2-lisse, et si F^{**}/F est nul ou parfait de codimension 2 (cf. 5).

Soient Γ un faisceau localement libre, F un faisceau régulier sur X, $T=F^{**}/F$. On considére une extension

$$0\longrightarrow\Gamma\longrightarrow\mathcal{E}\longrightarrow F\longrightarrow 0.$$

On en déduit un morphisme $\phi : \Gamma^* \to \mathcal{E}xt^1(F, \mathcal{O}_X) \simeq \widetilde{T}$. Il est aisé de voir que $\mathcal{E}$ est localement libre si et seulement si ϕ est surjectif. Supposons que ce soit le cas et que $G = \ker(\phi)$ soit régulier. On obtient alors deux extensions

$$\begin{array}{ll} (L) & 0 \longrightarrow G^* \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow F \longrightarrow 0, \\ (L^*) & 0 \longrightarrow F^* \longrightarrow \mathcal{E}^* \longrightarrow G \longrightarrow 0. \end{array}$$

On dit que (L) (ou $\mathcal{E}$) est une *extension large* si on a :

$$\begin{array}{c} \mathrm{Ext}^i(F^{**}, G^*) \ = \ \{0\} \quad \text{si} \ \ i \geq 1, \\ \mathrm{Ext}^i(F, G^*) \ = \ \mathrm{Ext}^i(G, F^*) \ = \ \{0\} \quad \text{si} \ \ i \geq 2, \\ \mathrm{Ext}^i(G^*, F^{**}) \ = \ \{0\} \quad \text{si} \ \ i < \dim(X). \end{array}$$

Remarquons que ces conditions impliquent que T est non trivial et qu'on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Ext}^1(F, G^*) \simeq \mathrm{Hom}(G^{**}, \widetilde{T}), \qquad \mathrm{Ext}^1(G, F^*) \simeq \mathrm{Hom}(F^{**}, T).$$

Le morphisme $G^{**} \to \widetilde{T}$ correspondant à (L) n'est autre que ϕ, et le morphisme $F^{**} \to T$ correspondant à (L') est le morphisme quotient.

Les fibrés instables de rang 2 sur $\mathbb{P}_2$ sont des extensions larges, ainsi que certains fibrés instables de rang 2 sur $\mathbb{P}_3$.

Le but de cet article est de commencer l'étude des extensions larges, et plus particulièrement des espaces $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$. On verra que $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ possède des filtrations canoniques induites par (L) et (L^*), et on étudiera les interactions entre ces filtrations.

1.3. ÉTUDE DE $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$

Si on utilise la suite exacte (L) on obtient le diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(F, G^*)/\mathbb{C}\rho \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(G^*, G^*) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(F, F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, F) \arrow[r] \arrow[d] & A_2(\rho) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

avec $M = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, G^*)$, $N_* = \mathrm{Ext}^1(F, \mathcal{E})$, K étant un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Ext}^1(G^*, \mathcal{E})$, $A_2(\rho)$ désignant le noyau de la multiplication par ρ

$$\mathrm{Ext}^1(G^*, F) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(F, F).$$

On obtient de même en utilisant (L^*) le diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(G,F^*)/\mathbb{C}\pi \arrow[r] \arrow[d] & M_* \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(F^*,F^*) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & K_* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(G,G) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*,G) \arrow[r] \arrow[d] & A_2(\pi) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

avec $M_* = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*, F^*)$, $N = \mathrm{Ext}^1(G, \mathcal{E}^*)$, K_* étant un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Ext}^1(F^*, \mathcal{E}^*)$, $A_2(\pi)$ désignant le noyau de la multiplication par π

$$\mathrm{Ext}^1(F^*, G) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(G, G).$$

Remarquons qu'on a $M \subset N$ et $M_* \subset N_*$. Les deux filtrations $0 \subset M \subset N \subset \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, $0 \subset M_* \subset N_* \subset \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ et leur interaction sont utilisées dans 7 pour étudier $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$. On montre dans 7.6 que le sous-espace vectoriel

$$\mathbf{T} \ = \ (N \cap N_*) + M + M_* \ = \ (N + M_*) \cap (N_* + M)$$

de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ est le *tangent à l'espace des extensions*, c'est-à-dire qu'il correspond aux déformations de $\mathcal{E}$ obtenues en déformant F^{**}, G^{**}, T, π et ρ.

Si X est une surface on a toujours $\mathbf{T} \neq \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, mais si $\dim(X) > 2$ on peut avoir l'égalité (cf. 1.5, 1.6).

La double définition de $\mathcal{E}$, au moyen des suites exactes (L) et (L^*), produit deux définitions de certains morphismes canoniques, et il n'est pas évident que ces deux définitions coïncident (c'est même parfois faux). Par exemple on définit dans 7 deux morphismes canoniques

$$\xi_0, \xi_0^* : \mathrm{End}(T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$$

et on montre (proposition 7.1.1) que $\xi_0 = \xi_0^*$. De même on a deux morphismes canoniques

$$\xi_2, \xi_2^* : \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(T, T)$$

mais ici on a $\xi_2 = -\xi_2^*$ (cf. proposition 7.2.2).

On décrit et on étudie en 7.5 plusieurs sous-espaces vectoriels canoniques de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$:

- Le sous-espace vectoriel Q correspondant aux déformations de $\mathcal{E}$ obtenues en déformant G^{**}, π et ρ, et le sous-espace vectoriel analogue Q_* correspondant aux déformations de $\mathcal{E}$ obtenues en déformant F^{**}, π et ρ.
- Le sous-espace vectoriel $Q + M_* = Q_* + M = M + M_*$ correspondant aux déformations de $\mathcal{E}$ obtenues en déformant F^{**}, G^{**}, π et ρ.
- Le sous-espace vectoriel correspondant aux déformations de $\mathcal{E}$ obtenues en déformant T, π et ρ. On montre que c'est $N \cap N_*$.

1.4. Variétés de modules d'extensions larges

Soient $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ des ensembles ouverts de faisceaux cohérents sur X, admettant des variétés de modules fins $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ respectivement (cf. 2.6), les faisceaux de $\mathcal{Z}$ étant parfaits de codimension 2. On suppose que les extensions non triviales de type (L), avec F^{**} dans $\mathcal{X}$, G^{**} dans $\mathcal{Y}$, T dans $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{E}$ localement libre, sont des extensions larges. Soit $\text{Larg}(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des fibrés $\mathcal{E}$ obtenus. On peut construire sous certaines hypothèses une *variété de modules* $\mathbb{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})$ pour les extensions larges de $\text{Larg}(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})$. On obtient même un *fibré universel* sur $\mathbb{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})\times X$ (défini localement, cf. 2.6). Pour obtenir ces résultats on munit $\text{Larg}(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})$ d'une structure de variété algébrique intègre naturelle. Au point q de $\mathbb{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})$ correspondant à l'extension large $\mathcal{E}$, le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer

$$\omega_q : T\mathbb{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})_q \longrightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$$

(cf. 3.2.6) est injectif et son image est le sous-espace vectoriel $\mathbf{T}$ défini précédemment.

On définit en 8.2 les *familles pures* d'extensions larges du type précédent (cette définition est une généralisation de celle de [48]), et la variété $\mathbb{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})$ représente le foncteur F de la catégorie des variétés algébriques complexes dans celle des ensembles défini par

$$F(S) \;=\; \Big\{\text{familles pures de fibrés de } \text{Larg}(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}) \text{ paramétrées par } S\Big\}\Big/\sim$$

où $\sim$ est la relation déquivalence suivante : deux familles pures d'extensions larges $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$ paramétrées par S sont équivalentes si et seulement si il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de S et tel que pour tout $i\in I$ on ait $\mathcal{F}_{1|U_i\times X}\simeq\mathcal{F}_{0|U_i\times X}$.

Si X est une surface $\mathbb{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})$ n'est pas une variété de modules fins (c'est-à-dire que les fibrés universels locaux ne sont pas des déformations complètes). Dans ce cas on a en effet $\mathbf{T}\neq\text{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$. Cette inégalité peut avoir plusieurs causes (cf. 1.5).

Si $\dim(X)>2$, $\mathbb{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})$ est une variété de modules fins si les conditions suivantes sont réalisées : pour tous faisceaux $\mathbb{F}$ de $\mathcal{X}$, $\mathbb{G}$ de $\mathcal{Y}$, $\mathbb{T}$ de $\mathcal{Z}$ on a

$$\text{Ext}^i(\mathbb{F},\mathbb{T}) \;=\; \text{Ext}^i(\mathbb{G},\widetilde{T}) \;=\; \{0\} \quad \text{si } i\geq 1,$$
$$H^0(\mathbb{F}\otimes\mathbb{T}) \;=\; H^0(\mathbb{G}\otimes\widetilde{T}) \;=\; \{0\}.$$

Dans ce cas on a en effet $\mathbf{T}=\text{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$. On obtient ainsi de nouvelles variétés de modules fins constituées de fibrés vectoriels non simples (cf. [5]). Par exemple supposons que $X=\mathbb{P}_3$. Soit $n>4$ un entier. On prend pour $\mathbf{Z}$ la grassmannienne des droites de $\mathbb{P}_3$ ($\mathcal{Z}$ est constitué des faisceaux structuraux de ces droites), $\mathbf{M}$ la variété de modules des fibrés de corrélation nulle ($\mathcal{X}$ est constitué des $E(n)$, E étant un fibré de corrélation nulle) et pour $\mathbf{N}$ la variété réduite à un point correspondant au fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}$. On obtient des extensions larges du type

$$0\longrightarrow E(n)\longrightarrow\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{I}_\ell\longrightarrow 0,$$

où E est un fibré de corrélation nulle, ℓ une droite de $\mathbb{P}_3$ et $\mathcal{I}_\ell$ son faisceau d'idéaux. Le fibré $\mathcal{E}$ est de rang 3 et de classes de Chern $2n$, n^2+2, $2n+2$. Dans ce cas la variété $\mathbb{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})$ est lisse et c'est une variété de modules fins. On a

$$\dim(\mathbb{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})) \;=\; \dim(\text{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})) \;=\; 2n+14,$$
$$\dim(\text{End}(\mathcal{E}))=\frac{n(n+2)(n+4)}{3}+1,\quad \dim(\text{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E}))=2n+14.$$

1.5. EXTENSIONS LARGES SUR LES SURFACES

Supposons que X soit une surface. Si on considère une extension large (L), on a toujours $\mathbf{T} \neq \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$.

Dans le cas des fibrés instables de rang 2 sur $\mathbb{P}_2$ cela est dû au fait que la base d'une déformation semi-universelle de $\mathcal{E}$ n'est pas réduite. Dans ce cas $\mathbf{T}$ est l'espace tangent au point correspondant à $\mathcal{E}$ de la variété de modules des fibrés instables correspondante. Mais c'est un espace de modules grossier uniquement pour les familles *pures* de fibrés instables.

Dans le cas général, on a une situation analogue à la précédente dans le cas où $\mu(G^*) \gg \mu(F)$. On suppose que le groupe de Picard de X est isomorphe à $\mathbb{Z}$, de générateur ample $\mathcal{O}_X(1)$. Pour $i = 0, 1$ soit $\mathbf{M}_i$ une variété de modules des faisceaux semi-stables non vide sur X. On s'intéresse à des extensions larges du type

$$0 \longrightarrow G^*(d) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

où G^* (resp. F) est un faisceau semi-stable de $\mathbf{M}_0$ (resp. de $\mathbf{M}_1$). Il existe toujours de telles extensions larges si $d \gg 0$. On démontre en 9.3 le

Théorème : *Si $d \gg 0$ les déformations de $\mathcal{E}$ sont des extensions larges du même type.*

Il en découle que si $d \gg 0$, et si (S, s_0) est la base d'une déformation semi-universelle de $\mathcal{E}$, alors $\mathbf{T}$ est l'espace tangent en s_0 à la sous-variété réduite induite de S.

On donne cependant en 6.3.3 des exemple d'extensions larges (L) sur $\mathbb{P}_2$, où $\mathcal{E}$ est instable mais *prioritaire* (c'est-à-dire que $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E}(-1)) = \{0\}$, cf. [19]), donc 2-lisse, et se déforme en fibrés stables.

On calcule en 9.2 le produit canonique

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \times \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E}).$$

On peut en déduire des informations sur le *module formel* (cf. 3.4) A de $\mathcal{E}$. On peut sous certaines hypothèses obtenir une description complète de A/m_A^3 (prop. 9.2.3) comme dans [49] pour les fibrés instables de rang 2 sur $\mathbb{P}_2$.

1.6. EXTENSIONS LARGES SUR LES VARIÉTÉS DE DIMENSION SUPÉRIEURE À 2

On suppose que $\dim(X) > 2$. Contrairement à ce qui se passe sur les surfaces il se peut que les faisceaux réguliers ne se déforment pas en faisceaux localement libres. Soit F un faisceau régulier sur X et $T = F^{**}/F$. On montre dans 5.4 que si

$$\mathrm{Ext}^1(F^{**},T) = \mathrm{Ext}^2(F^{**},T) = \mathrm{Hom}(F^{**},\widetilde{T}) = \{0\}$$

toutes les déformations de F s'obtiennent en déformant F^{**}, T et le morphisme surjectif $F^{**} \to T$. De plus F est lisse, mais pas 2-lisse en général.

Soit maintenant une extension large (L) telle que

$$\mathrm{Ext}^1(F^{**},T) = \mathrm{Ext}^2(F^{**},T) = \mathrm{Hom}(F^{**},\widetilde{T}) = \{0\},$$

$$\mathrm{Ext}^1(G^{**},\widetilde{T}) = \mathrm{Ext}^2(G^{**},\widetilde{T}) = \mathrm{Hom}(G^{**},T) = \{0\}.$$

On montre dans 7.6 que les déformations de $\mathcal{E}$ sont encore des extensions larges du même type, c'est-à-dire s'obtiennent en déformant F^{**}, G^{**}, T et les morphismes surjectifs $F^{**} \to T$, $G^{**} \to \widetilde{T}$. Si T est lisse alors on montre que $\mathcal{E}$ l'est aussi.

1.7. QUESTIONS

Les extensions larges sur les variétés de dimension supérieure à 2 sont relativement simples à étudier, on trouve de nombreux cas où les fibrés obtenus sont lisses et où leurs déformations sont des extensions larges du même type. Il faut bien entendu faire des hypothèses sur les constituants de ces extensions larges, en particulier sur les faisceaux parfaits de codimension 2. Mais cela est inévitable.

Le situation est beaucoup plus compliquée sur les surfaces. Considérons l'extension large (L) sur une surface. On détermine au chapitre 9 le produit canonique

$$\mu_0 : \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \times \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E})$$

et le lieu $\sigma \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$ tels que $\mu_0(\sigma,\sigma) = 0$ est une réunion finie de sous-espaces vectoriels contenant $\mathbf{T}$. Rappelons qu'on a $\mu_0(\sigma,\sigma) = 0$ si et seulement si la déformation infinitésimale double de $\mathcal{E}$ définie par σ s'étend en une déformation triple (cf. 3.3). On peut aussi étudier les déformations n-tuples de $\mathcal{E}$. Ce sont par définition les fibrés vectoriels $\mathcal{F}$ sur $X \times \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[t]/(t^n))$ dont la restriction à $X \times \{*\}$ ($*$ désignant le point fermé de $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[t]/(t^n))$) est isomorphe à $\mathcal{E}$.

Question : *Quel est le lieu V_n des $\sigma \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$ tels que la déformation infinitésimale double de $\mathcal{E}$ définie par σ s'étende en une déformation n-tuple ?*

Les déformations n-tuples de $\mathcal{E}$ correspondent aux *extensions multiples d'ordre n* de $\mathcal{E}$. Ce sont des fibrés vectoriels $\mathcal{F}$ sur X munis d'une filtration

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$$

telle que $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1} \simeq \mathcal{E}$ pour $1 \leq i \leq n$, et possèdant des propriétés supplémentaires. Le cas le plus simple est celui des déformations triples. Soit $\sigma \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$ tel que $\mu_0(\sigma,\sigma) = 0$. Soit

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_\sigma \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

l'extension correspondante. Une déformation triple de $\mathcal{E}$ étendant la déformation double correspondant à σ correspond à un fibré vectoriel $\mathcal{F}$ s'insérant dans un diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{E}_\sigma \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E}_\sigma \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & \mathcal{E} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[d] & \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où la suite exacte horizontale du haut et la suite exacte verticale de droite sont identiques à $(*)$. Soient α l'élément de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}_\sigma)$ correspondant à la suite exacte verticale du milieu et β l'élément de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_\sigma, \mathcal{E})$ correspondant à la suite exacte horizontale du milieu. Alors la déformation triple de $\mathcal{E}$ correspondant à $\mathcal{F}$ s'étend en une déformation quadruple si et seulement si le produit de α et β dans $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ est nul. On peut donc ramener le problème de l'extension des déformations triples en extensions quadruples à l'étude des espaces vectoriels $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}_\sigma)$, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_\sigma, \mathcal{E})$ et du produit

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}_\sigma) \times \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_\sigma, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}, \mathcal{E}).$$

Dans le cas où les hypothèses du théorème 1.5 sont vérifiées on peut s'attendre à ce que $\cap_{n\geq 2} V_n = \mathbf{T}$.

Question : *Quel est le plus petit entier n tel que $V_n = V_{n+p}$ pour $p > 0$?*

1.8. PLAN DES CHAPITRES SUIVANTS

Chapitre 2

Le chapitre 2 est consacré à des rappels de notations et de notions utilisées dans cet article.

On donne en 2.3 la définition et quelques propriétés du morphisme trace.

On rappelle en 2.4 la construction des Ext de faisceaux cohérents au moyen de résolutions localement libres, qui est utilisée au chapitre 7.

On donne 2.5 la définition et les propriétés du polygône de Harder-Narasimhan d'un faisceau cohérent sur une surface et au 2.6 celles des variétés de modules fins de faisceaux cohérents.

Au 2.7 on définit les faisceaux parfaits, après quelques rappels sur les faisceaux purs et réflexifs.

On donne en 2.8 la définition des fibrés exceptionnels et de la fonction d'existence des fibrés stables sur $\mathbb{P}_2$. Ces résultats sont utilisés en 6.3.3 pour produire des exemples d'extensions larges se déformant en fibrés stables.

En 2.9 on étudie des quotients algébriques par un groupe réductif qui seront utilisés en 8 pour construire les variétés de modules d'extensions larges sur les surfaces.

Au 2.10 on donne un résultat sur les fonctions réelles concaves qu'on utilise pour prouver le théorème énoncé en 1.5.

Chapitre 3

Le chapitre 3 est consacré aux déformations des faisceaux cohérents sur une variété algébrique projective lisse. On rappelle en particulier ce que sont une déformation semi-universelle et le module formel d'un faisceau cohérent, ainsi le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer d'une famille de faisceaux. On termine le chapitre par une étude des déformations d'une extension de faisceaux cohérents.

Chapitre 4

Le chapitre 4 est une étude détaillée des extensions de faisceaux cohérents. Je pense que certains résultats (comme ceux sur les morphismes d'extensions ou les extensions duales) sont bien connus, mais j'ai inclus les énoncés précis et les démonstrations faute d'avoir trouvé une référence. Les résultats de 4.4 sont utilisés en 5.2 dans l'étude des déformations des faisceaux réguliers.

Chapitre 5

Le chapitre 5 est consacré à l'étude des faisceaux réguliers. On étudie leurs déformations en 5.2 : si F est un faisceau régulier et $T=F^{**}/F$, on détermine le sous-espace vectoriel de $\mathrm{Ext}^1(F,F)$ correspondant aux déformations obtenues en déformant F^{**}, T et le morphisme surjectif $F^{**}\to T$.

En 5.3 on étudie les faisceaux réguliers sur une surface et on construit dans certains cas des variétés de modules de tels faisceaux.

En 5.4 on étudie les faisceaux réguliers sur une variété de dimension supérieure à 2. On donne des conditions suffisantes pour que si F est un faisceau régulier et $T=F^{**}/F$, les seules déformations de F s'obtiennent en déformant F^{**}, T et le morphisme surjectif $F^{**}\to T$. Ces conditions impliquent aussi la lissité de F. Pour cela il faut partir de bons faisceaux parfaits T (ils doivent être lisses). Sur $\mathbb{P}_3$ on peut obtenir de tels faisceaux en partant d'ouverts lisses de schémas de Hilbert de courbes lisses (il en existe beaucoup même si d'après [32] les schémas de Hilbert de courbes ne sont pas en général réduits). On considère ensuite la jacobienne relative au dessus de ces ouverts, qui est une sorte de variété de modules de faisceaux parfaits. En général cependant les déformations de F porteront la trace des pathologies des déformations de T.

Chapitre 6

Dans le chapitre 6 on définit les extensions larges, et plusieurs exemples en sont donnés en 6.3. On donne en 6.4 une description des extensions larges utilisant des résolutions localement libres de faisceaux qui est utilisée dans le chapitre 7.

Chapitre 7

Le chapitre 7 est consacré à l'étude de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$, où $\mathcal{E}$ est une extension large correspondant à (L).

Dans 7.1 on déduit de (L) un morphisme canonique $\xi_0 : \mathrm{End}(T) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$ et on montre qu'il est égal au morphisme analogue provenant de (L^*) (compte tenu de l'identification $\mathrm{End}(T) = \mathrm{End}(\widetilde{T})$). De même dans 7.2 on déduit de (L) un morphisme canonique $\xi_2 : \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \to \mathrm{Ext}^2(T,T)$ et on montre que le morphisme analogue $\xi_2^* : \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*,\mathcal{E}^*) \to \mathrm{Ext}^2(\widetilde{T},\widetilde{T})$ déduit de (L^*) est égal à $-\xi_2$.

Dans 7.4 et 7.7 on considère d'autres diagrammes canoniques, certains commutatifs, et d'autres anticommutatifs. La plupart des démonstrations sont omises, elles sont analogues à celles de 7.1 et 7.2.

Les diagrammes commutatifs évoqués en 1.3 sont construits en 7.3. On les utilise, ansi que certains résultats des sections précédentes pour étudier dans 7.5 des sous-espaces vectoriels canoniques de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$, comme ceux évoqués à la fin de 1.3.

On étudie en 7.6 le sous-espace vectoriel $\mathbf{T}$ de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$. On montre en particulier que si $\dim(X) > 2$ on peut obtenir $\mathbf{T} = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$ faisant des hypothèses convenables.

On détermine en 7.8 les produits canoniques

$$\mu_G : \mathrm{End}(\mathcal{E}) \times \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}), \quad \mu_D : \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \times \mathrm{End}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}).$$

En particulier il en découle que $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ agit trivialement sur $\mathbf{T}$.

Chapitre 8

Le chapitre 8 est consacré ̀la constrution des variétés de modules d'extensions larges.

On définit en 8.2 les familles *pures* d'extensions larges. Les variétés de modules d'extensions larges sont en fait des espaces de modules grossiers pour les familles pures d'extensions larges.

On montre en 8.3 qu'il existe des *fibrés universels définis localement* pour les variétés de modules d'extensions larges. Quand $\dim(X) > 2$ il peut même se produire que ces dernières soient des variétés de modules fins. On en donne deux exemples en 8.4 sur $\mathbb{P}_3$.

Chapitre 9

Le chapitre 9 est consacré aux extensions larges sur les surfaces.

On détermine en 9.2 le produit canonique

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \times \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E}).$$

Le théorème énoncé en 1.5 est démontré en 9.3.

2. Préliminaires

2.1. Notations

2.1.1. *Produits dans les* Ext. Soient E, F, G des faisceaux cohérents sur une variété algébrique. Soient p, q des entiers, $u \in \mathrm{Ext}^p(E,F)$, $v \in \mathrm{Ext}^q(F,G)$. On notera

$$l_u^{p,q} : \mathrm{Ext}^q(F,G) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(E,G), \qquad r_v^{p,q} : \mathrm{Ext}^q(E,F) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(E,G)$$

les multiplications par u, v respectivement. Si aucune confusion n'est à craindre on notera $l_u = l_u^{p,q}$, $r_v = r_v^{p,q}$.

2.1.2. *Invariants logarithmiques.* Soient X une variété algébrique projective lisse et irréductible de dimension $n > 0$, $\mathcal{O}_X(1)$ un fibré en droites très ample sur X. Soit E un faisceau cohérent sur X, tel que $rg(E) > 0$. Le nombre rationnel

$$\mu_0(E) \ = \ \frac{c_1(E)}{rg(E)} \ \in A^1(X) \otimes \mathbb{Q}$$

s'appelle la *pente* de E (relativement à $\mathcal{O}_X(1)$), et

$$\Delta(E) \ = \ \frac{1}{r}(c_2 - \frac{r-1}{2r}c_1(E)^2) \ \in A^2(X) \otimes \mathbb{Q}$$

est le *discriminant* de E. Plus généralement on définit formellement les *invariants logarithmiques* $\Delta_i(E) \in A^i(E) \otimes \mathbb{Q}$ de E par

$$\log(ch(E)) \ = \ \log(r) + \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{i+1} \Delta_i(E)$$

$ch(E)$ désignant le caractère de Chern de E (cf. [8]). On a $\Delta_1(E) = \mu(E)$, $\Delta_2(E) = \Delta(E)$, et

$$\Delta_3(E) \ = \ \frac{1}{r}(\frac{c_3(E)}{2} + c_1(E)c_2(E)(\frac{1}{r} - \frac{1}{2}) + c_1(E)^3(\frac{1}{3r^2} - \frac{1}{2r} + \frac{1}{6})).$$

Ces invariants ont les propriétés suivantes :

(i) Si L est un fibré en droites sur X, on a $\Delta_i(E) = 0$ si $i \geq 2$.

(ii) Si E, F sont des faisceaux cohérents de rang positif sur X, on a $\Delta_i(E \otimes F) = \Delta_i(E) + \Delta_i(F)$ pour $1 \leq i \leq n$.

(iii) Si E est un faisceau localement libre non nul sur X, on a $\Delta_i(E^*) = (-1)^i \Delta_i(E)$ pour $1 \leq i \leq n$.

Pour tous faisceaux cohérents E, F sur X on note

$$\chi(E,F) \ = \ \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i \dim(\mathrm{Ext}^i(E,F)).$$

Il existe un polynôme P_X à n indéterminées tel que pour tout faisceau cohérent E de rang positif sur X on ait

$$\chi(E) \ = \ rg(E) P_X(\Delta_1(E), \ldots, \Delta_n(E)).$$

Si E et F sont des faisceaux cohérents de rang positif sur X on a

$$\chi(E,F) \ = \ rg(E) rg(F) P_X(\Delta_1(F) - \Delta_1(E), \ldots, \Delta_n(F) - \Delta_n(E)).$$

2.1.3. *Théorème de Riemann-Roch sur les surfaces.* On suppose que $\dim(X) = 2$. On a alors

$$P_X(\alpha_1, \alpha_2) \;=\; \frac{\alpha_1(\alpha_1 - \omega_X)}{2} + \chi(\mathcal{O}_X) - \alpha_2.$$

ω_X désignant le fibré canonique sur X. Si E, F sont des faisceaux cohérents sur X tels que $rg(E) > 0$ et $rg(F) > 0$, on a donc

$$\chi(E, F) \;=\; rg(E).rg(F).\big(\frac{(\mu(F) - \mu(E))(\mu(F) - \mu(E) - \omega_X)}{2} + \chi(\mathcal{O}_X) - \Delta(E) - \Delta(F)\big).$$

Si E et F ne sont plus nécessairement de rang positif, on a

$$\begin{aligned}\chi(E, F) \;=\; & -c_1(E)c_1(F) - rg(E)c_2(F) - rg(F)c_2(E) + rg(E)rg(F)\chi(\mathcal{O}_X) \\ & + \frac{1}{2}(rg(F).\omega_X c_1(E) - rg(E).\omega_X c_1(F) + rg(E)c_1(F)^2 + rg(F)c_1(E)^2).\end{aligned}$$

2.1.4. *Théorème de Riemann-Roch sur* $\mathbb{P}_3$*.* On a

$$\mathbb{P}_{\mathbb{P}_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \;=\; \alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_2 + \frac{(\alpha_1 + 3)(\alpha_1 + 2)(\alpha_1 + 1)}{6}.$$

Si E un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_3$ de rang $r > 0$, on a donc

$$\chi(E) \;=\; r\big(\Delta_3 - \Delta_1\Delta_2 - 2\Delta_2 + \frac{(\Delta_1 + 3)(\Delta_1 + 2)(\Delta_1 + 1)}{6}\big)$$

avec $\Delta_i = \Delta_i(E)$ pour $i = 1, 2, 3$.

2.2. Diagrammes 3x3

On appelle *diagramme 3x3* (dans une catégorie abélienne) un diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes du type

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme est isomorphe au diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M\cap N \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M/(M\cap N) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & E/N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N/(M\cap N) \arrow[r] \arrow[d] & E/M \arrow[r] \arrow[d] & E/(M+N) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

2.3. Morphisme trace

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur une variété algébrique projective lisse connexe X de dimension n. Pour tout entier i on note

$$tr_i(\mathcal{E}) : \mathrm{Ext}^i(\mathcal{E},\mathcal{E}) \longrightarrow H^i(\mathcal{O}_X)$$

le morphisme trace , ou tr_i et même tr s'il n'y a pas d'ambiguïté. On note $\mathrm{Ad}^i(\mathcal{E}) \ = \ \ker(tr_i(\mathcal{E}))$.

Pour tous entiers $p, q \leq 0$, on note

$$\mu_{pq} : \mathrm{Ext}^p(\mathcal{E},\mathcal{E}) \times \mathrm{Ext}^q(\mathcal{E},\mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(\mathcal{E},\mathcal{E})$$

$$i_{pq} : \mathrm{Ext}^p(\mathcal{E},\mathcal{E}) \times \mathrm{Ext}^q(\mathcal{E},\mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^q(\mathcal{E},\mathcal{E}) \times \mathrm{Ext}^p(\mathcal{E},\mathcal{E})$$

les applications canoniques. Rappelons qu'on a

$$tr_{p+q} \circ i_{qp} \ = \ (-1)^{pq} tr_{p+q} \circ i_{pq}.$$

Plus généralement, si $\mathcal{F}$ est un autre faisceau cohérent sur X, le diagramme canonique suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^p(\mathcal{E},\mathcal{F}) \times \mathrm{Ext}^q(\mathcal{F},\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^{p+q}(\mathcal{E},\mathcal{E}) \arrow[d, "tr_{p+q}(\mathcal{E})"] \\
\mathrm{Ext}^{p+q}(\mathcal{F},\mathcal{F}) \arrow[r, "tr_{p+q}(\mathcal{F})"] & H^{p+q}(\mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

est commutatif si pq est pair et anticommutatif si pq est impair.

2.3.1. Définition : *Soit E un faisceau cohérent sur X. On dit que E est* 2-lisse *si le morphisme trace*

$$\mathrm{Ext}^2(E,E) \longrightarrow H^2(\mathcal{O}_X)$$

est injectif. C'est alors un isomorphisme si $\mathcal{E}$ est sans torsion.

2.3.2. Proposition : *Soient $x \in X$ et $\mathbb{C}_x$ le faisceau gratte-ciel sur X concentré en x et de fibre $\mathbb{C}$ en x. Alors compte tenu des isomorphismes canoniques donnés par la dualité de Serre*

$$\mathrm{Ext}^n(\mathbb{C}_x, \mathbb{C}_x) \simeq \omega^*_{X,x}, \quad H^n(\mathcal{O}_X) \simeq H^0(\omega_X)^*$$

la transposée de $tr^n : \mathrm{Ext}^n(\mathbb{C}_x, \mathbb{C}_x) \to H^n(\mathcal{O}_X)$ *est l'évaluation* $H^0(\omega_X) \to \omega_{X,x}$.

Démonstration. Cela découle des définitions de la trace et de la dualité de Serre (cf. [9], 1.4). □

2.4. Construction des Ext de faisceaux cohérents

Soient E, F des faisceaux cohérents sur une variété projective X. On suppose donnés des faisceaux cohérents F_i, $i \in \mathbb{N}$ sur X et une résolution de F

$$\begin{tikzcd} \cdots F_2 \arrow[r, "f_2"] & F_1 \arrow[r, "f_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] & F \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Alors on en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$ une application

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Im}(f_n), E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n(F, E)$$

qui est surjective si on a $\mathrm{Ext}^{n-i}(F_i, E) = \{0\}$ pour $0 \leq i < n$. Si $\mathrm{Ext}^{n-1-i}(F_i, E) = \{0\}$ pour $0 \leq i < n-1$, le noyau de cette application est constitué de l'image de $\mathrm{Hom}(F_{n-1}, E)$ dans $\mathrm{Hom}(\mathrm{Im}(f_n), E)$. Dans ce cas $\mathrm{Ext}^n(F, E)$ s'identifie à l'espace vectoriel quotient de l'espace des morphismes $F_n \to E$ s'annulant sur $\mathrm{Im}(f_{n+1})$ par l'espace de ceux qui se factorisent par F_{n-1}. On peut choisir une résolution de F qui est finie, localement libre, et telle que les propriétés précédentes soient vérifiées (pour tout n). Plus généralement, en choisissant une résolution localement libre adéquate de E

$$\begin{tikzcd} \cdots E_2 \arrow[r, "e_2"] & E_1 \arrow[r, "e_1"] & E_0 \arrow[r, "e_0"] & E \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

on peut représenter les éléments de $\mathrm{Ext}^n(F, E)$ par des morphismes de complexes de degré $-n$ de la résolution de F vers celle de E, c'est-à-dire par des suites $(\phi_i)_{i \geq 0}$ de morphismes, avec $\phi_i : F_{i+n} \to E_i$, telles que pour tout $i \geq 0$ on ait

$$\phi_i f_{i+n+1} + (-1)^n e_{i+1} \phi_{i+1} \ = \ 0,$$

c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif ou anticommutatif suivant la parité de n

$$\begin{tikzcd} E_{i+1} \arrow[r, "e_{i+1}"] & E_i \\ F_{i+n+1} \arrow[u, "\phi_{i+1}"] \arrow[r, "f_{i+n+1}"] & F_{i+n} \arrow[u, "\phi_i"'] \end{tikzcd}$$

2.5. Polygone de Harder-Narasimhan

Soient X une surface algébrique projective irréductible et lisse, et $\mathcal{O}_X(1)$ un fibré en droites très ample sur X. Soit E un faisceau cohérent sans torsion sur X. Alors E possède une *filtration de Harder-Narasimhan*

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = E$$

telle que pour $1 \leq i \leq n$, E_1/E_{i-1} soit semi-stable, que

$$\mu(E_i/E_{i-1}) \ \geq \ \mu(E_{i+1}/E_i)$$

(si $i \geq 1$), et qu'en cas d'égalité

$$\frac{\chi(E_i/E_{i-1})}{rg(E_i/E_{i-1})} \ > \ \frac{\chi(E_{i+1}/E_i)}{rg(E_{i+1}/E_i)}.$$

Cette filtration est unique et E est semi-stable si et seulement si $n = 1$. On dit que n est la *longueur* de E.

On considère le polygone convexe dans $\mathbb{R}^2$ de sommets $O, Q_1 = (rg(E_1), c_1(E_1).\mathcal{O}_X(1)), \ldots,$ $Q_n = (rg(E_n), c_1(E_n).\mathcal{O}_X(1))$.

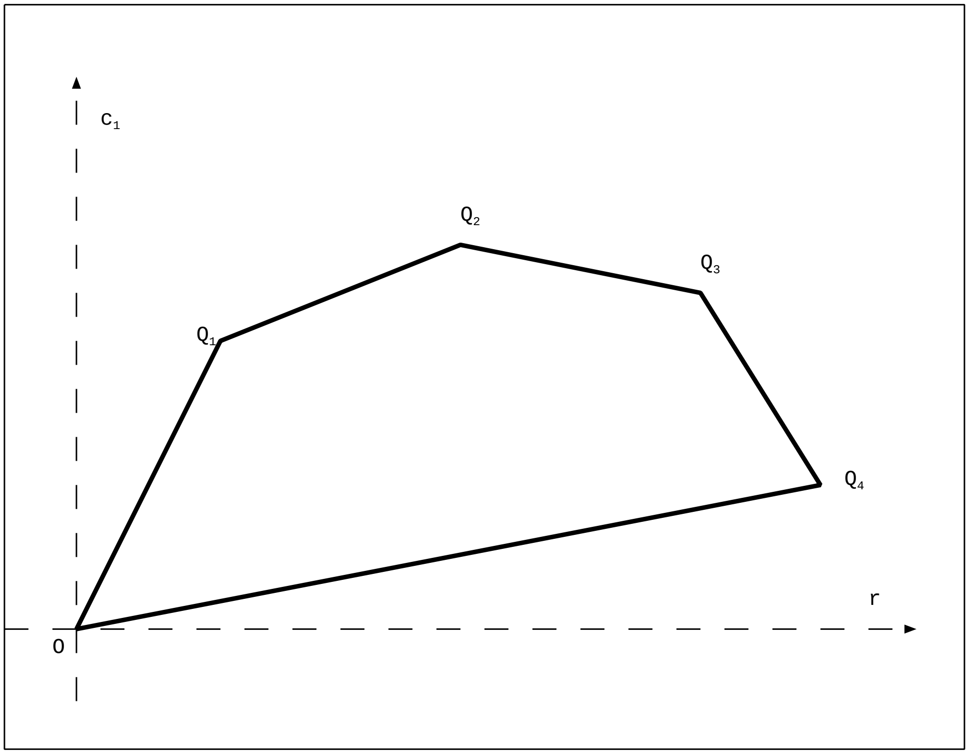

Figure 1 - Polygone de Harder-Narasimhan d'un faisceau de longueur 4

On l'appelle le *polygone de Harder-Narasimhan* de E et on le note $P(E)$. Cette définition est légèrement différente de celle de [9], et s'inspire de celle de polygones de Harder-Narasimhan des fibrés vectoriels sur les courbes (cf. [45], [27]).

Soient $r = rg(E)$, $c_1 = c_1(E).\mathcal{O}_X(1)$. Soit $\mathcal{P}(r, c_1)$ l'ensemble des polygones convexes de sommets O, $(x_1, y_1), \ldots, (x_p, y_p) = (r, c_1)$ à coordonnées entières et tels que $0 < x_1 < \cdots < x_p$. Si $P \in \mathcal{P}(r, c_1)$ on notera aussi P la fonction $[0, r] \to \mathbb{R}$ associée. Si $P, P' \in \mathcal{P}(r, c_1)$ on écrira

$P < P'$ lorsque l'inégalité est vérifiée par les fonctions associées, et de même pour les autres types d'inégalités.

2.5.1. Proposition : *Soient* $P \in \mathcal{P}(r, c_1)$*,* S *une variété algébrique irréductible,* $s_0 \in S$*,* $\mathcal{F}$ *un faisceau cohérent sur* $S \times X$*, plat sur* S*, tel que* $\mathcal{F}_{s_0} \simeq E$ *et que pour* $s \in S \backslash \{s_0\}$*, on ait* $P(\mathcal{F}_s) = P$*. Alors on a* $P \leq P(E)$*.*

Autrement dit si E est une spécialisation de faiceaux de polygone de Harder-Narasimhan P, alors on a $P \leq P(E)$.

Démonstration. Analogue au cas de $\mathbb{P}_2$ traité dans [9]. Voir aussi [45], [27], exposé 4, pour le cas des courbes. ☐

2.6. VARIÉTÉS DE MODULES FINS DE FAISCEAUX COHÉRENTS

Les définitions et résultats de 2.6 proviennent de [5]. Soit X une variété projective lisse et irréductible.

2.6.1. Définition : *On appelle* famille de faisceaux sur X paramétrée par S *un faisceau cohérent* $\mathcal{F}$ *sur* $S \times X$*, plat sur* S*.*

2.6.2. Définition : *On appelle* polyfamille de faisceaux sur X paramétrée par S *la donnée d'un recouvrement ouvert* $(U_i)_{i \in I}$ *de* S*, et pour tout* $i \in I$ *d'une famille* $\mathcal{E}_i$ *de faisceaux sur* X *paramétrée par* U_i*, tels que pour tous* $i, j \in I$ *et tout* $x \in U_i \cap U_j$ *on ait* $\mathcal{E}_{i,x} \simeq \mathcal{E}_{j,x}$*.*

Notations : Pour toute sous-variété localement fermée S' de S, on note

$$\mathcal{F}_{S'} \ = \ \mathcal{F}_{|S' \times X}.$$

Si S' est réduite à un point s on notera plus simplement $\mathcal{F}_{S'} = \mathcal{F}_s$. On note p_S (resp. p_X) la projection $S \times X \longrightarrow S$ (resp. $S \times X \longrightarrow X$). Si $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sont des faisceaux cohérents sur $S \times X$, S et X respectivement, on notera plus simplement

$$\mathcal{E} \otimes p_S^*(\mathcal{F}) \otimes p_X^*(\mathcal{G}) \ = \ \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}.$$

Si $f : T \longrightarrow S$ est un morphisme de variétés algébriques, et $\mathcal{F}$ une famille de faisceaux sur X paramétrée par S, on note

$$f^\sharp(\mathcal{F}) \ = \ (f \times I_X)^*(\mathcal{F}).$$

C'est une famille de faisceaux sur X paramétrée par T.

Si $\mathcal{X}$ est un ensemble non vide de classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents sur X, on appelle *famille de faisceaux de* $\mathcal{X}$ *paramétrée par* S une famille $\mathcal{F}$ de faisceaux cohérents sur X paramétrée par S telle que pour tout point s de S la classe d'isomorphisme de $\mathcal{F}_s$ soit dans $\mathcal{X}$.

Soient r, $c_i \in H^i(X,\mathbb{Z})$, $1 \leq i \leq d$, avec $r \geq 0$. Soit $\mathcal{X}$ un ensemble non vide de classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents sur X, de rang r et de classes de Chern c_i.

2.6.3. Définition : *On dit que $\mathcal{X}$ est un* ensemble ouvert *si pour toute variété algébrique S et toute famille $\mathcal{F}$ de faisceaux cohérents sur X de rang r et de classes de Chern c_i paramétrée par S, l'ensemble des points s de S tels que la classe d'isomorphisme de $\mathcal{F}_s$ soit dans $\mathcal{X}$ est un ouvert de Zariski de S.*

2.6.4. Définition : *Supposons que $\mathcal{X}$ soit un ensemble ouvert. On dit que $\mathcal{X}$ est* irréductible *si pour toutes polyfamilles de faisceaux de $\mathcal{X}$ paramétrées par des variétés algébriques X_1, X_2 respectivement, il existe un polyfamille de faisceaux de $\mathcal{X}$ paramétrée par une variété algébrique irréductible Y contenant tous les faisceaux des polyfamilles paramétrées par X_1 et X_2.*

Soient r, $c_i \in H^i(X,\mathbb{Z})$, $1 \leq i \leq d$, avec $r \geq 0$. Soit $\mathcal{X}$ un ensemble ouvert de faisceaux cohérents sur X de rang r et de classes de Chern c_i.

2.6.5. Définition : *On appelle* variété de modules fins globale, *ou plus simplement* variété de modules fins *pour $\mathcal{X}$ la donnée d'une variété algébrique intègre M et d'une famille $\mathcal{E}$ de faisceaux de $\mathcal{X}$ paramétrée par M telles que :*

(i) Pour tout élément x de $\mathcal{X}$, il existe un unique point m de M tel que la classe d'isomorphisme de $\mathcal{E}_m$ soit x.

(ii) Pour toute famille $\mathcal{F}$ de faisceaux de $\mathcal{X}$ paramétrée par une variété algébrique S, il existe un morphisme $f : S \longrightarrow M$ tel que pour tout point s de S il existe un ouvert U de S contenant s et un isomorphisme $\mathcal{F}_U \simeq f^\sharp(\mathcal{E})_U$.

On dit aussi dans ce cas que $(M,\mathcal{E})$ est une variété de modules fins pour $\mathcal{X}$. On remarquera que d'après (i), il existe une bijection canonique entre $\mathcal{X}$ et l'ensemble des points de M. D'autre part le morphisme f de (ii) est unique : l'image d'un point s de S est le point de M correspondant à $\mathcal{F}_s$.

On appelle variété de modules fins définie localement *pour $\mathcal{X}$ la donnée d'une variété algébrique intègre M, d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de M, et pour tout $i \in I$ d'une famille $\mathcal{E}_i$ de faisceaux de $\mathcal{X}$ paramétrée par U_i tels que*

(i) Pour tout élément x de $\mathcal{X}$, il existe un unique point m de M tel que pour tout $i \in I$ tel que $x \in U_i$, la classe d'isomorphisme de $\mathcal{E}_{im}$ soit x.

(ii) Pour toute famille $\mathcal{F}$ de faisceaux de $\mathcal{X}$ paramétrée par une variété algébrique S, il existe un morphisme $f : S \longrightarrow M$ tel que pour tout point s de S et tout $i \in I$ tel qu'il existe un $x \in U_i$ tel que $\mathcal{E}_{ix} \simeq \mathcal{F}_s$ il existe un ouvert U de S contenant s tel que $f(U) \subset U_i$ et un isomorphisme $\mathcal{F}_U \simeq f^\sharp(\mathcal{E}_i)_U$.

2.7. FAISCEAUX PURS, FAISCEAUX RÉFLÉXIFS ET FAISCEAUX PARFAITS

(cf. [28], 8.1 et [21], 1.1)

Soit X une variété algébrique projective et irréductible de dimension $n > 0$.

Soit T un faisceau cohérent sur X. Rappelons qu'on appelle *dimension* de T celle de son support $\mathrm{Supp}(T)$, et on la note $\dim(T)$. On appelle *codimension* de E la codimension de $\mathrm{Supp}(T)$, et on la note $\mathrm{codim}(T)$.

On dit qu'un faisceau T de dimension d est *pur* si pour tout sous-faisceau cohérent non trivial S de E on a $\dim(S) = d$.

Supposons T pur de dimension d et codimension $c = n - d$. Alors pour tout faisceau localement libre E sur X, les faisceaux $\mathcal{E}xt^q(T, E)$ ont leur support contenu dans $\mathrm{Supp}(T)$ et sont nuls pour $q < c$. De plus on a $\mathrm{codim}(\mathcal{E}xt^q(T, E)) \ \geq \ q$ pour $q \geq c$.

Soit T un faisceau pur de dimension d et de codimension $c = n - d$. On pose

$$T^\vee \ = \ \mathcal{E}xt^c(T, \omega_X), \qquad \widetilde{T} \ = \ \mathcal{E}xt^c(T, \mathcal{O}_X) = T^\vee \otimes \omega_X^{-1}$$

et on appelle $T^\vee$ le *dual* de T. Il coïncide avec le dual habituel T^* de T dans le cas où $c = 0$.

Il existe en général un morphisme canonique $T \to T^{\vee\vee}$.

On appelle *faisceau réfléxif* sur X un faisceau pur T tel que le morphisme canonique $T \to T^{\vee\vee}$ soit un isomorphisme. Un faisceau pur de dimension 0 est toujours réfléxif (cf. [21], prop. 1.1.10).

2.7.1. Définition : *On appelle* faisceau parfait *un faisceau pur T sur X tel que* $\mathcal{E}xt^q(T, \mathcal{O}_X) \ = \ 0$ *pour* $q > \mathrm{codim}(T)$.

Un tel faisceau est alors réfléxif. Les faisceaux de dimension 0 sont parfaits, ainsi que les faisceaux localement libres.

2.7.2. Lemme : *Soient T un faisceau pur de codimension c et E un faisceau localement libre sur X. Alors on a* $\mathrm{Ext}^i(T, E) = \{0\}$ *si $i < c$ et des isomorphismes canoniques*

$$\mathrm{Ext}^c(T, E) \ \simeq \ H^0(E \otimes \widetilde{T}), \qquad \mathrm{Ext}^{c+1}(T, E) \ \simeq \ H^1(E \otimes \widetilde{T}).$$

Si T est parfait alors on a

$$\mathrm{Ext}^{c+k}(T, E) \ \simeq \ H^k(E \otimes \widetilde{T})$$

si $k \geq 0$. En particulier, pour tout faisceau ample $\mathcal{O}_X(1)$ sur X on a

$$\mathrm{Ext}^i(T, E \otimes \mathcal{O}_X(p)) \ = \ \{0\}$$

si $i > c$ *et* $p \gg 0$.

Démonstration. Cela découle de la suite spectrale

$$E_2^{pq} \ = \ H^p(X, \mathcal{E}xt^q(T, E)) \implies \mathrm{Ext}^{p+q}(T, E)$$

(cf. [13], théorème 7.3.3, [14], p. 706). La dernière assertion est une conséquence du théorème B de Serre. ☐

2.7.3. Lemme : *Soient Y est une sous-variété fermée localement intersection complète de X, $j : Y \to X$ l'inclusion et $\mathcal{F}$ un faisceau localement libre sur Y. Alors le faisceau $T = j_*(\mathcal{F})$ est parfait, et on a*

$$T^\vee \ \simeq \ j_*(\mathcal{F}^* \otimes \omega_Y).$$

Démonstration. Cela se voit facilement en utilisant le complexe de Koszul (cf. par exemple [23], XIV, 10, ou [17], p. 245). □

Les faisceaux localement libres sont parfaits. Les faisceaux purs de codimension maximale n sont aussi parfaits.

Soit T un faisceau parfait de codimension $c > 0$, et

$$\cdots T_2 \xrightarrow{t_2} T_1 \xrightarrow{t_1} T_0 \xrightarrow{t_0} T \longrightarrow 0$$

une résolution localement libre de T. Alors le complexe dual

$$T_0^* \xrightarrow{{}^t t_0} T_1^* \xrightarrow{{}^t t_1} T_2^* \xrightarrow{{}^t t_2} \cdots$$

est exact sauf en degré c, d'où il découle que $\ker({}^t t_{c+1})$ est localement libre, et on a une résolution de $\widetilde{T} = T^\vee \otimes \omega_X^{-1} = \mathcal{E}xt^c(T, \mathcal{O}_X)$

$$T_0^* \xrightarrow{{}^t t_1} T_1 \cdots\cdots T_{c-1}^* \xrightarrow{{}^t t_c} \ker({}^t t_{c+1}) \longrightarrow \widetilde{T} \longrightarrow 0$$

En utilisant la construction des Ext par des résolutions localement libres (cf. 2.4) on en déduit aisément le résultat suivant : si T, T' sont des faisceaux parfaits de codimension c, on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Ext}^k(T, T') \ \simeq \ \mathrm{Ext}^k(\widetilde{T'}, \widetilde{T}), \quad 0 \leq k \leq c.$$

Si $T = T'$, ces isomorphismes sont compatibles avec la trace, c'est-à-dire qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^k(T,T) \arrow[dd, "\simeq"] \arrow[dr, "tr_k(T)"] & \\
& H^k(\mathcal{O}_X) \\
\mathrm{Ext}^k(\widetilde{T},\widetilde{T}) \arrow[ur, "tr_k(\widetilde{T})"] &
\end{tikzcd}$$

On a, pour tout faisceau localement libre E et tout faisceau parfait de codimension c sur X un diagramme commutatif canonique

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^c(T,E) \otimes \mathrm{Hom}(E,T) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Ext}^c(T,T) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{Hom}(E^*,\widetilde{T}) \otimes \mathrm{Ext}^c(\widetilde{T},E^*) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^c(\widetilde{T},\widetilde{T})
\end{tikzcd}$$

2.8. FIBRÉS EXCEPTIONNELS SUR $\mathbb{P}_2$

Les conditions d'existence des faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$ (cf [9]) s'expriment en fonction des seules variables μ et Δ. On montre qu'il existe une unique fonction $\delta(\mu)$ telle qu'on ait $\dim(M(r,c_1,c_2)) > 0$ si et seulement si $\Delta \geq \delta(\mu)$. La fonction $\delta(\mu)$ est décrite à l'aide des *fibrés exceptionnels*.

On dit qu'un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{P}_2$ est *exceptionnel* si $\mathcal{E}$ est *simple* (c'est-à-dire si les seuls endomorphismes de $\mathcal{E}$ sont les homothéties), et si

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \ = \ \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E}) \ = \ \{0\}.$$

Un tel faisceau est alors localement libre et stable, et la variété de modules de faisceaux semi-stables correspondante contient l'unique point $\mathcal{E}$. Il existe une infinité dénombrable de fibrés exceptionnels, et un procédé simple permet de les obtenir tous à partir des fibrés en droites (cf. [6]). Notons qu'un fibré exceptionnel est uniquement déterminé par sa pente. Soit F un fibré exceptionnel. On note x_F la plus petite solution de l'équation

$$X^2 - 3X + \frac{1}{rg(F)^2} \ = \ 0.$$

Alors on montre que les intervalles $]\mu(F) - x_F, \mu(F) + x_F[$ constituent une partition de l'ensemble des nombres rationnels. On va décrire la fonction $\delta(\mu)$ sur cet intervalle. Posons

$$P(X) = \frac{X^2}{2} + \frac{3}{2}X + 1.$$

Sur l'intervalle $]\mu(F) - x_F, \mu(F)]$, on a

$$\delta(\mu) \ = \ P(\mu - \mu(F)) - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{rg(F)^2}),$$

et sur $[\mu(F), \mu(F) + x_F[$, on a

$$\delta(\mu) \ = \ P(\mu(F) - \mu) - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{rg(F)^2}).$$

On obtient les courbes représentées sur la figure qui suit. Ce sont des segments de coniques. La fonction $\delta(\mu)$ est la partie de ces courbes située au dessus de la droite d'équation $\Delta = 1/2$.

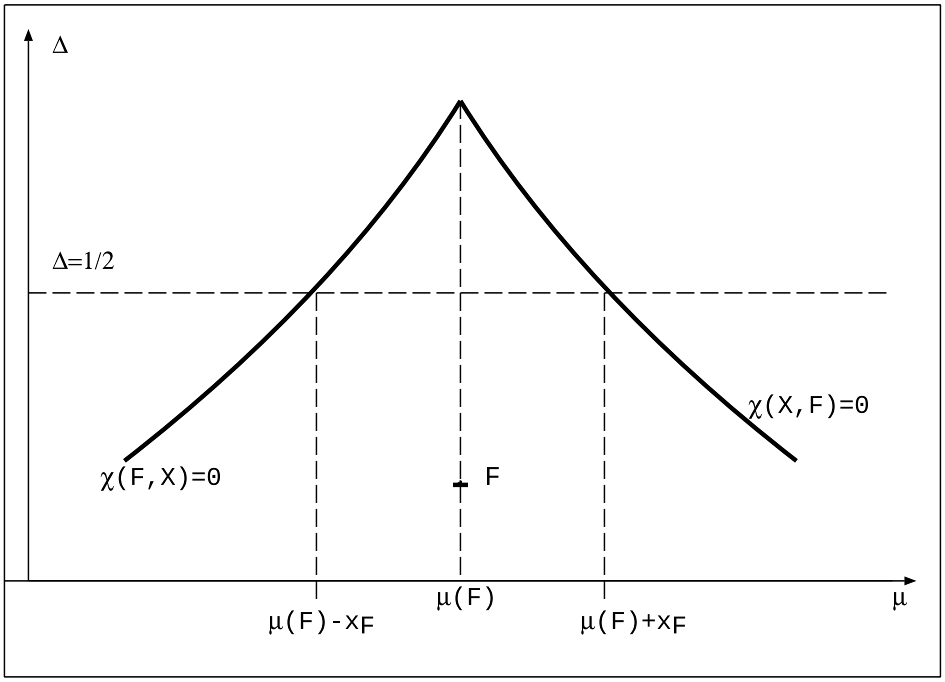

FIGURE 2 - La fonction $\delta(\mu)$

2.9. QUOTIENTS ALGÉBRIQUES

Soient k un entier, $k \geq 1$, $V_1, \ldots, V_k, W_1, \ldots, W_k$ des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie non nuls,

$$E = V_1 \times \cdots V_k \times W_1 \times \cdots \times W_k, \qquad G_0 = (\mathbb{C}^*)^{k+1}.$$

On considère l'action suivante de G_0 sur E :

$$(t, t_1, \ldots, t_k)(v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_k) \ = \ (t_1v_1, \ldots, t_kv_k, tt_1^{-1}w_1, \ldots, tt_k^{-1}w_k).$$

L'action induite sur $\mathbb{P}(E)$ se prolonge en une action sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$. Pour que le stabilisateur d'un point générique soit fini, il vaut mieux considérer l'action du sous-groupe G constitué des $(t, t_1, \ldots, t_k)$ tels que $tt_1 \cdots t_k = 1$, qui donne les mêmes orbites dans $\mathbb{P}(E)$ que l'action de G_0. On peut donc définir les notions de *points semi-stables* et *points stables* de $\mathbb{P}(E)$ (cf. [36], [37]). Soit $\mathbb{P}(E)^{ss}$ (resp. $\mathbb{P}(E)^s$) l'ouvert des points semi-stables (resp. stables) $\mathbb{P}(E)$. On sait qu'il existe un bon quotient $\mathbb{P}(E)^{ss}//G$ et un quotient géométrique $\mathbb{P}(E)^s/G$ qui est un ouvert du précédent.

2.9.1. Proposition : *Un point* $x = \mathbb{C}(v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_k)$ *de* $\mathbb{P}(E)$ *est stable si et seulement si pour* $1 \leq i \leq k$ *on a* $v_i \neq 0$, $w_i \neq 0$, *et* x *est semi-stable si et seulement si pour* $1 \leq i \leq k$, $v_i = 0$ *si et seulement si* $w_i = 0$.

Démonstration. Cela se voit aisément en utilisant les critères numériques de (semi-)stabilité (cf. [36], chapt. 2, [37], 4.2). ☐

On notera

$$M(V_1,\dots,V_k,W_1,\dots,W_k) \ = \ \mathbb{P}(E)^{ss}//G, \qquad M^s(V_1,\dots,V_k,W_1,\dots,W_k) \ = \ \mathbb{P}(E)^s//G.$$

La première variété est projective et normale, et la seconde est un ouvert lisse de la première.

Soit Y une variété algébrique intègre, $\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_k$, $\mathbb{W}_1,\dots,\mathbb{W}_k$ des fibrés vectoriels non nuls sur Y. Soit $\mathbb{E} = \mathbb{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_k \oplus \mathbb{W}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{W}_k$. On considère l'action de G sur $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ qui sur chaque fibre est l'action décrite précédemment. Soient $\mathbb{P}(\mathbb{E})^{ss}$, $\mathbb{P}(\mathbb{E})^s$ les ouverts de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ définis par : pour tout $y \in Y$, $\mathbb{P}(\mathbb{E})^{ss}_y = \mathbb{P}(\mathbb{E}_y)^{ss}$ et $\mathbb{P}(\mathbb{E})^s_y = \mathbb{P}(\mathbb{E}_y)^s$. On montre aisément qu'il existe un bon quotient

$$M(\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_k,\mathbb{W}_1,\dots,\mathbb{W}_k) \ = \ \mathbb{P}(\mathbb{E})^{ss}//G$$

et un quotient géométrique

$$M^s(\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_k,\mathbb{W}_1,\dots,\mathbb{W}_k) \ = \ \mathbb{P}(\mathbb{E})^s/G.$$

Les morphismes $\mathbb{P}(\mathbb{E})^{ss} \to Y$ et $\mathbb{P}(\mathbb{E})^s \to Y$ sont G-invariants et passent donc au quotient, et on a, pour tout $y \in Y$

$$M(\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_k,\mathbb{W}_1,\dots,\mathbb{W}_k)_y = M(\mathbb{V}_{1y},\dots,\mathbb{V}_{ky},\mathbb{W}_{1y},\dots,\mathbb{W}_{ky}),$$
$$M^s(\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_k,\mathbb{W}_1,\dots,\mathbb{W}_k)_y = M^s(\mathbb{V}_{1y},\dots,\mathbb{V}_{ky},\mathbb{W}_{1y},\dots,\mathbb{W}_{ky}).$$

Le morphisme $M(\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_k,\mathbb{W}_1,\dots,\mathbb{W}_k) \to Y$ est projectif et localement trivial, et $M^s(\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_k,\mathbb{W}_1,\dots,\mathbb{W}_k) \to Y$ est lisse et localement trivial.

On a

$$\dim(M(\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_k,\mathbb{W}_1,\dots,\mathbb{W}_k)) \ = \ \dim(Y) - k - 1 + \sum_{i=1}^{k} rg(\mathbb{V}_i) + \sum_{i=1}^{k} rg(\mathbb{W}_i).$$

2.9.2. Remarque : On peut aussi considérer

$$E' \ = \ \mathbb{P}(V_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_k) \times (W_1\backslash\{0\}) \times \cdots \times (W_k\backslash\{0\}),$$

muni de l'action de $\mathbb{C}^*$:

$$t.(l_1,\dots,l_k,w_1,\dots,w_k) \ = \ (l_1,\dots,l_k,tw_1,\dots,tw_k).$$

Alors il existe un quotient géométrique $E'/\mathbb{C}^*$ et on a $E'/\mathbb{C}^* \simeq \mathbb{P}(E)^s/G$. On peut construire de manière analogue $\mathbb{P}(\mathbb{E})^s/G$. Cette méthode cache cependant les rôles symétriques joués par les espaces vectoriels V_i et W_i.

2.10. Fonctions concaves

2.10.1. Définition : *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $a < b$*. On dit qu'une fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est* concave *si pour tous* $x, y \in [a, b]$ *tels que* $x < y$ *et tout* $t \in [0, 1]$ *on a*

$$f(tx + (1-t)y) \ \geq \ t.f(x) + (1-t).f(y).$$

Si f est deux fois dérivable par morceaux, alors f est concave si et seulement si on a $f"(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ où $f"$ est définie.

2.10.2. Proposition : *Soient* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *des fonctions de classes* C^2 *par morceaux et telles que* $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, $f \leq g$*. On suppose que* f *est concave. Alors on a*

$$\int_a^b f'(x)^2 dx \ \leq \ \int_a^b g'(x)^2 dx.$$

Démonstration. Posons, pour $1 \leq t \leq 1$, $f_t = (1-t).f + t.g$, et

$$\alpha(t) \ = \ \int_a^b f_t'(x)^2 dx.$$

On a

$$\alpha(0) \ = \ \int_a^b f'(x)^2 dx, \qquad \alpha(1) \ = \ \int_a^b g'(x)^2 dx.$$

Il suffit donc de montrer que α est croissante, c'est-à-dire que $\alpha' \geq 0$. On a

$$\alpha'(t) \ = \ 2t \int_a^b (f'(x) - g'(x))^2 dx + \int_a^b f'(x)(g'(x) - f'(x))dx.$$

En intégrant par parties on trouve

$$\int_a^b f'(x)(g'(x) - f'(x))dx \ = \ f'(g-f)\Big]_a^b - \int (g(x) - f(x))f"(x)dx.$$

On a $g - f \geq 0$, $f" \leq 0$, donc $\int_a^b f'(x)(g'(x) - f'(x))dx \geq 0$ et $\alpha'(t) \geq 0$. $\square$

3. Déformations infinitésimales de faisceaux cohérents

3.1. Déformation semi-universelle d'un faisceau cohérent

Les résultats de 3.1 proviennent de [47]. Soient X une variété algébrique projective et E un faisceau cohérent sur X. Une *déformation* de E est la donnée d'un germe (S, s_0) de variété analytique, d'un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur $S \times X$, plat sur S et d'un isomorphisme $\alpha : \mathcal{E}_{s_0} \simeq E$. C'est donc en fait un quadruplet $\mathcal{D} = (S, s_0, \mathcal{E}, \alpha)$.

Considérons deux déformations $\mathcal{D} = (S, s_0, \mathcal{E}, \alpha)$, $\mathcal{D}' = (S, s_0, \mathcal{E}', \alpha')$ de E (paramétrées par le même germe). Un *isomorphisme* $\mathcal{D} \simeq \mathcal{D}'$ est un isomorphisme $\sigma : \mathcal{E} \simeq \mathcal{E}'$ tel que $\alpha' \circ \sigma_{s_0} = \alpha$. Si $\mathcal{D} = f : (S', s_0') \to (S, s_0)$ est un morphisme de germes, on en déduit aisément la déformation $f^*(\mathcal{D}) = (S', s_0', f^\sharp(\mathcal{E}), f^\sharp(\alpha))$.

On dit qu'une déformation $\mathcal{D} = (S, s_0, \mathcal{E}, \alpha)$ de E est *semi-universelle* si elle est *complète* c'est-à-dire que si $\mathcal{D}'$ est une déformation de E (paramétrée par un germe (S', s_0')), il existe un morphisme de germes $f : (S', s_0') \to (S, s_0)$ et un isomorphisme $f^\sharp(\mathcal{D}) \simeq \mathcal{D}'$, et si l'application linéaire tangente $T_{s_0'}S' \to T_{s_0}S$ est uniquement déterminée. Il existe toujours une déformation semi-universelle $(S, s_0, \mathcal{E}, \alpha)$ de E ([47], theorem I).

3.2. Déformations infinitésimales

On pose $A_2 = \mathbb{C}[t]/(t^2)$ et $Z_2 = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_2)$.

3.2.1. *Faisceaux cohérents sur la variété double d'une variété algébrique*

Si X une variété algébrique sur $\mathbb{C}$, on note

$$X^{(2)} \ = \ X \times Z_2,$$

et on l'appelle la variété *double* de X. Le morphisme canonique $A_2 \to \mathbb{C}$ permet de voir X comme une sous-variété fermée de $X^{(2)}$. On note i_X l'inclusion $X \subset X^{(2)}$. On a $p_X \circ i_X = I_X$, p_X désignant la projection $X^{(2)} \longrightarrow X$. Si $\mathcal{E}$ est un faisceau cohérent sur $X^{(2)}$, on en déduit deux faisceaux cohérents sur X : $\mathcal{E}_{|X}$ et $\mathcal{E}/t\mathcal{E}$ (qui est un faisceau sur $X^{(2)}$ dont le support est contenu dans X).

3.2.2. Lemme : *Un A_2-module M est plat si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :*

(i) La multiplication par $t : M/tM \to tM$ est un isomorphisme.

(ii) M est libre.

Démonstration. On utilise pour cela le fait que M est plat si et seulement si le morphisme canonique $(t) \otimes_{A_2} M \to tM$ est injectif. ☐

3.2.3. Définition : *Soit E un faisceau cohérent sur X. On appelle* extension double *de E une extension de E par lui-même :* $0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow 0$.

On définit de manière évidente la notion d'*isomorphisme* d'extensions doubles, et on démontre sans peine la

3.2.4. Proposition : *Soient E un faisceau cohérent sur X et $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur $X^{(2)}$ plat sur Z_2 et tel que $\mathcal{E}_{|X} \simeq E$. Alors $p_{X*}(\mathcal{E})$ possède une structure naturelle d'extension double de E et l'association*

$$\mathcal{E} \to p_{X*}(\mathcal{E})$$

définit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents sur $X^{(2)}$ plats sur Z_2 dont la restriction à X est isomorphe à E, et l'ensemble des classes d'isomorphismes d'extensions doubles de E.

3.2.5. Définition : *Soit E un faisceau cohérent sur X. On appelle* déformation infinitésimale double *(ou plus simplement* déformation infinitésimale*) de E un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur $X^{(2)}$ plat sur Z_2 et tel que $\mathcal{E}_{|X} \simeq E$.*

D'après la proposition 3.2.4, les déformations infinitésimales de E sont paramétrées naturellement par $\mathrm{Ext}^1(E, E)$.

3.2.6. *Morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer*

Soient S une variété algébrique et $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur $S \times X$ plat sur S. Soient $s \in S$, m_s l'idéal maximal de s, X_s la fibre de $S \times X$ au dessus de s, $X_{s,2}$ le voisinage infinitésimal d'ordre 2 de X_s et $\mathcal{E}_s$ la restriction de $\mathcal{E}$ à X_s, qu'on peut voir aussi comme un faisceau cohérent sur $X_{s,2}$. Sur $X_{s,2}$ on a une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow T_s^*S \otimes \mathcal{E}_s \longrightarrow \mathcal{E}/m_s^2\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_s \longrightarrow 0$$

(T_s^*S désignant l'espace tangent de S en s). En prenant l'image directe de cette suite exacte sur X_s on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow T_s^*S \otimes \mathcal{E}_s \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{E}_s \longrightarrow 0,$$

d'où une application linéaire

$$\omega_s : T_sS \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{E}_s, \mathcal{E}_s)$$

appelée *morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer de $\mathcal{E}$ en s*. La relation avec la proposition 3.2.4 est la suivante : soit $\alpha \in T_sS$, $\alpha \neq 0$, qu'on peut voir comme une forme $\mathbb{C}$-linéaire sur m_s/m_s^2. On en déduit un morphisme

$$\overline{\alpha} : Z_2 \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_s/m_s^2)$$

provenant du morphisme d'anneaux $f : \mathcal{O}_s/m_s^2 \longrightarrow \mathbb{C}[t]/(t^2)$ défini par

$$f(\phi) \;=\; \phi(s) + \alpha(\phi - \phi(s)).t.$$

Alors $\omega_s(\alpha)$ n'est autre que l'extension de $\mathcal{E}_s$ par lui-même provenant de la déformation $\overline{\alpha}^\sharp(\mathcal{E}_{|X_{s,2}})$ d'ordre 2 de $\mathcal{E}_s$.

On dit que $\mathcal{E}$ est une *déformation complète* de $\mathcal{E}_s$ si ω_s est surjective. On dit que $\mathcal{E}$ est une *famille complète* si pour tout point fermé s de S, $\mathcal{E}$ est une déformation complète de $\mathcal{E}_s$.

La notion de morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer s'étend aux familles plates de faisceaux analytiques cohérents sur X paramétrées par des variétés analytiques ou des germes de variétés analytiques. Si E est un faisceau cohérent sur X et $(S, s_0, \mathcal{E}, \alpha)$ une déformation semi-universelle de E (cf. 3.1), le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer en s_0 est un isomorphisme $T_{s_0}S \simeq \mathrm{Ext}^1(E, E)$ (cf. [47]).

3.3. Déformations triples

On pose $A_3 = \mathbb{C}[t]/(t^3)$ et $Z_3 = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_3)$.

3.3.1. Lemme : *Un A_3-module M est plat si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :*

(i) les multiplication par t $tM/t^2M \to t^2M$ et par t^2 $M/tM \to t^2M$ sont des isomorphismes.

(ii) M est libre.

(Analogue au lemme 3.2.2).

Soient X une variété algébrique projective et $X^{(3)} \;=\; X \times Z_3$. On a des immersions naturelles $X \subset X^{(2)} \subset X^{(3)}$.

3.3.2. Définition : *Soit E un faisceau cohérent sur X. On appelle* déformation infinitésimale triple *de E un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur $X^{(3)}$ plat sur Z_3 et tel que $\mathcal{E}_{|X} \simeq E$.*

Les restrictions à $X^{(2)}$ des déformations triples de E donnent des déformations doubles de E. Les déformations triples de E correspondent aux *extensions triples* de E, c'est-à-dire aux triplets $(F, (F_i), \tau)$ constitué de

- un faisceau cohérent F sur X,
- une filtration
$$0 = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset F_3 = F$$
dont tous les gradués F_i/F_{i-1} sont isomorphes à E,

- un isomorphisme $\tau : F_3/F_1 \to F_2$ dont la restriction à F_2/F_1 induit un isomorphisme $F_2/F_1 \simeq F_1$.

On démontre sans peine la

3.3.3. Proposition : *Une déformation double de E, définie par* $\sigma \in \mathrm{Ext}^1(E,E)$ *s'étend en une déformation triple de E si et seulement si on a* $\sigma^2 = 0$ *dans* $\mathrm{Ext}^2(E,E)$.

3.4. MODULE FORMEL

Soient E un faisceau cohérent sur X et $(S, s_0, \mathcal{E}, \alpha)$ une déformation semi-universelle de E. L'anneau

$$R_E \ = \ \widehat{\mathcal{O}}_{S,s_0}$$

s'appelle le *module formel* de E. Soient

$$A \ = \ \widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Ext}^1(E,E),0}$$

et m_A l'idéal maximal de A. D'après [25], il existe une application linéaire $\omega : \mathrm{Ext}^2(E,E)^* \to m_A^2$ telle que $R_E \simeq A/A\,\mathrm{Im}(\omega)$. On a un isomorphisme canonique

$$m_A^2/m_A^3 \ \simeq \ S^2(\mathrm{Ext}^1(E,E)^*).$$

Soit $\omega_2(E) : \mathrm{Ext}^2(E,E)^* \to S^2(\mathrm{Ext}^1(E,E)^*)$ la composée de l'application quotient $m_A^2 \to m_A^2/m_A^3$ et de ω. On a alors

3.4.1. Proposition : *Supposons que $X = \mathbb{P}_n$. Alors on a, pour tous* $\alpha, \beta \in \mathrm{Ext}^1(E,E)$,

$$^t\omega_2(E)(\alpha.\beta) \ = \ \frac{1}{2}(\mu_0(\alpha,\beta) + \mu_0(\beta,\alpha)),$$

μ_0 *désignant le produit canonique* $\mathrm{Ext}^1(E,E) \times \mathrm{Ext}^1(E,E) \to \mathrm{Ext}^2(E,E)$.

(cf. [25], [49]).

3.5. DÉFORMATIONS D'EXTENSIONS

(Voir le chapitre 4 pour la définition et des propriétés des extensions)

Soit X une variété algébrique projective lisse et connexe.

3.5.1. Proposition : *Soient E, F des faisceaux cohérents simples sur X. On suppose que* $\mathrm{Hom}(E,F)=\mathrm{Ext}^2(F,E)=\{0\}$. *Soit*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] & F \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

une extension, associée à $\sigma\in\mathrm{Ext}^1(F,E)$. *Soient*

$$f_\sigma:\mathrm{Ext}^1(E,\mathcal{E})\longrightarrow\mathrm{Ext}^2(F,\mathcal{E}),\quad g_\sigma:\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},F)\longrightarrow\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},F)$$

les multiplications par σ. Alors il existe un diagramme commutatif canonique avec lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(F,E)/\mathbb{C}\sigma \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},E) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(E,E) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(F,\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(f_\sigma) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(F,F) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(g_\sigma) \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Immédiat. □

On note $D(\sigma)$ le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},E)+\mathrm{Ext}^1(F,\mathcal{E})$ de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$.

Soit $\mathbb{E}$ (resp. $\mathbb{F}$) une famille de faisceaux cohérents lisses et simples sur X paramétrée par une variété algébrique affine S (resp. T). On suppose que pour tous points fermés $s\in S$, $t\in T$, on a

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{E}_s,\mathbb{F}_t)\ =\ \mathrm{Ext}^2(\mathbb{F}_t,\mathbb{E}_s)\ =\ \{0\}.$$

On suppose que la dimension de $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{F}_t,\mathbb{E}_s)$ est indépendante de $s\in S$ et $t\in T$. On démontre alors comme dans le lemme 5.2.1 que

$$\mathcal{V}\ =\ \mathcal{E}xt^1_{p_{S\times T}}(p_S^\sharp(\mathbb{F}),p_T^\sharp(\mathbb{E}))$$

est un faisceau localement libre sur $S\times T$ (en chaque $(s,t)\in S\times T$ la fibre $\mathcal{V}_{(s,t)}$ du fibré vectoriel correspondant s'identifie à $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{F}_t,\mathbb{E}_s)$). Soit $\pi:\mathcal{V}\to S\times T$ la projection. Il existe une *extension universelle* sur $\mathcal{V}\times X$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \pi^\sharp(p_S^\sharp(\mathbb{E})) \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] & \pi^\sharp(p_T^\sharp(\mathbb{F})) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

telle que pour tout $v\in\mathcal{V}$ au dessus de $(s,t)\in S\times T$ la restriction de la suite exacte précédente à $\{v\}\times X$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{E}_s \arrow[r] & \mathcal{E}_v \arrow[r] & \mathbb{F}_t \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

soit associée à $v\in\mathrm{Ext}^1(\mathbb{F}_t,\mathbb{E}_s)$.

3.5.2. Proposition : *Soit v un point fermé de $\mathcal{V}$, au dessus de $(s,t)\in S\times T$. Alors*

1 - Le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer

$$\omega_v : T\mathcal{V}_v \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}_v,\mathcal{V}_v)$$

est à valeurs dans $D(v)$.

2 - Si $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ sont des déformations complètes de $\mathbb{E}_s$, $\mathbb{F}_t$ respectivement, l'image de ω_v est égale à $D(v)$.

La proposition 3.5.2 est une conséquence immédiate des deux lemmes qui suivent.

Soient $\mathcal{V}^s=\mathcal{V}_{|\{s\}\times T}$, $\mathcal{E}^s=\mathcal{E}_{|\mathcal{V}^s}$, $\mathcal{V}^t=\mathcal{V}_{|S\times\{t\}}$, $\mathcal{E}^t=\mathcal{E}_{|\mathcal{V}^t}$. Soient

$$\omega^s_v : T\mathcal{V}^s_v \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}_v,\mathcal{V}_v), \qquad \omega^t_v : T\mathcal{V}^t_v \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}_v,\mathcal{V}_v)$$

les morphismes de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer de $\mathcal{E}^s$, $\mathcal{E}^t$ respectivement, au point h, qui sont des restrictions de ω_v. Soient enfin

$$\omega_s : T\mathcal{V}^s_v \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathbb{F}_t,\mathbb{F}_t), \qquad \omega_t : T\mathcal{V}^t_v \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathbb{E}_s,\mathbb{E}_s)$$

les morphismes de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer de $p_S^\sharp(\mathbb{F})$, $p_T^\sharp(\mathbb{E})$ respectivement, au point v.

3.5.3. Lemme : *(i) L'application ω^s_v est à valeurs dans le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{F}_t,\mathcal{E}_v)$ de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_v,\mathcal{E}_v)$.*

(ii) La composée

$$T\mathcal{V}^s_v \xrightarrow{\omega^s_v} \mathrm{Ext}^1(\mathbb{F}_t,\mathcal{E}_v) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathbb{F}_t,\mathbb{F}_t)$$

est égale à ω_s.

(iii) L'image de ω^s_v est exactement $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{F}_t,\mathcal{E}_v)$ si $\mathbb{F}$ est une déformation complète de $\mathbb{F}_t$.

3.5.4. Lemme : *(i) L'application ω^t_v est à valeurs dans le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_v,\mathbb{E}_s)$ de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_v,\mathcal{E}_v)$.*

(ii) La composée

$$T\mathcal{V}^t_v \xrightarrow{\omega^t_v} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_v,\mathbb{E}_s) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathbb{E}_s,\mathbb{E}_s)$$

est égale à ω_t.

(iii) L'image de ω^t_v est exactement $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_v,\mathbb{E}_s)$ si $\mathbb{E}$ est une déformation complète de $\mathbb{E}_s$.

Les démonstrations de ces deux lemmes sont analogues à celles des lemmes 5.2.3 et 5.2.4.

4. EXTENSIONS DE FAISCEAUX COHÉRENTS

4.1. DÉFINITION

Soient E, F des faisceaux cohérents sur une variété projective lisse X. Rappelons qu'une *extension* de F par E est une suite exacte

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{E}$ est un faisceau cohérent sur X. Deux extensions

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow F \longrightarrow 0, \qquad 0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

sont dites *isomorphes* s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r] & \mathcal{E}' \arrow[r] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

la flèche verticale du milieu étant alors un isomorphisme. Il est bien connu qu'il existe une bijection canonique entre l'ensemble des classes d'isomorphisme d'extensions de F par E et l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1(F,E)$. On va construire explicitement cette bijection (la construction s'inspire de celle donnée dans [14]).

4.2. CONSTRUCTION DES EXTENSIONS

Si $0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow F \longrightarrow 0$ est une extension de F par E, on en déduit le morphisme de liaison $\delta : \mathrm{End}(E) \to \mathrm{Ext}^1(F,E)$ provenant de l'application du foncteur $\mathrm{Hom}(-,E)$ à la suite exacte précédente, et l'élément de $\mathrm{Ext}^1(F,E)$ associé à l'extension précédente est $\delta(I_E)$.

Réciproquement soit $\sigma \in \mathrm{Ext}^1(F,E)$. Soit

$$\cdots F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} F \longrightarrow 0$$

une résolution localement libre de F. On en déduit une suite exacte

$$\mathrm{Hom}(F_0,E) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}(F_1,E) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Hom}(F_2,E).$$

On peut d'après 2.4 choisir cette résolution de telle sorte que $\mathrm{Ext}^1(F,E)$ soit canoniquement isomorphe à $\ker(\beta)/\mathrm{Im}(\alpha)$. Donc σ est représenté par un morphisme $\lambda : F_1/\mathrm{Im}(f_2) \longrightarrow E$. Soit

$$\mu = \lambda \oplus \overline{f_1} : F_1/\mathrm{Im}(f_2) \longrightarrow E \oplus F_0,$$

($\overline{f_1}$ étant induit par f_1) qui est injectif. Soit $\mathcal{E} = (E \oplus F_0)/\mathrm{Im}(\mu)$. On a alors une extension

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} \mathcal{E} \xrightarrow{p} F \longrightarrow 0,$$

avec $i(e) = [(e,0)]$ et $p([(u,v)]) = f_0(v)$. C'est l'extension associée à σ.

Plus généralement, si

$$F'_2 \xrightarrow{f'_2} F'_1 \xrightarrow{f'_1} F'_0 \xrightarrow{f'_0} F' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de faisceaux cohérents, on en déduit le complexe

$$\mathrm{Hom}(F'_0, E) \xrightarrow{\alpha'} \mathrm{Hom}(F'_1, E) \xrightarrow{\beta'} \mathrm{Hom}(F'_2, E).$$

Il existe toujours une application canonique $\ker(\beta')/\operatorname{Im}(\alpha') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(F, E)$ qui n'est pas en général un isomorphisme.

L'extension induite par un morphisme $F'_1/\operatorname{Im}(f'_2) \to E$ se construit de la même manière que précédemment.

4.3. Morphismes d'extensions

4.3.1. Proposition : *Soient E, F, F' des faisceaux cohérents sur X, $f : F \to F'$ un morphisme, et*

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} \mathcal{E} \xrightarrow{p} F \longrightarrow 0 \quad , \quad 0 \longrightarrow E \xrightarrow{i'} \mathcal{E}' \xrightarrow{p'} F' \longrightarrow 0$$

des extensions, associées respectivement à $\sigma \in \mathrm{Ext}^1(F, E)$ et $\sigma' \in \mathrm{Ext}^1(F', E)$. Alors il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & \mathcal{E} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\phi"] & F \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "i'"] & \mathcal{E}' \arrow[r, "p'"] & F' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

si et seulement si on a $l_f(\sigma') = \sigma$. Dans ce cas ϕ est injectif (resp. surjectif) si et seulement si f l'est.

Démonstration. Supposons qu'un tel diagramme commutatif existe. L'égalité $l_f(\sigma') = \sigma$ découle du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}(E) \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^1(E, F') \arrow[d, "l_f"] \\
\mathrm{End}(E) \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{Ext}^1(E, F)
\end{tikzcd}$$

(δ' et δ étant les morphismes de liaison provenant des suites exactes obtenues par l'application du foncteur $\mathrm{Hom}(E, -)$) et des définitions de σ et σ'. Réciproquement, supposons que $l_f(\sigma') = \sigma$. On considère des résolutions localement libres de F et F' (cf. 4.1) pour calculer $\mathrm{Ext}^1(F, E)$ et $\mathrm{Ext}^1(F', E)$. D'après la définition de ces résolutions on peut les choisir de telle sorte qu'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
F_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\phi_2"] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\phi_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\phi_0"] & F \arrow[d, "f"] \\
F'_2 \arrow[r, "f'_2"] & F'_1 \arrow[r, "f'_1"] & F'_0 \arrow[r, "f'_0"] & F'
\end{tikzcd}$$

Supposons que σ' soit représenté par un morphisme $\lambda' : F'_1/\operatorname{Im}(f'_2) \to E$. Alors $\overline{f}(\sigma')$ est représenté par $\lambda = \lambda' \circ \overline{\phi_1} : F_1/\operatorname{Im}(f_2) \to E$, $\overline{\phi_1}$ désignant le morphisme $F_1/\operatorname{Im}(f_2) \to F'_1/\operatorname{Im}(f'_2)$ induit par ϕ_1. Soient

$$\mu = \lambda \oplus \overline{f_1} : F_1/\operatorname{Im}(f_2) \longrightarrow E \oplus F_0, \qquad \mu' = \lambda' \oplus \overline{f'_1} : F'_1/\operatorname{Im}(f'_2) \longrightarrow E \oplus F'_0.$$

Alors on a $\mathcal{E} = (E \oplus F_0)/\operatorname{Im}(\mu)$, $\mathcal{E}' = (E \oplus F'_0)/\operatorname{Im}(\mu')$. Soit $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ le morphisme induit par $I_E \oplus \phi_0$. Il est aisé de voir que le diagramme de la proposition 4.3.1 est commutatif. La dernière assertion de la proposition 4.3.1 est évidente. □

4.3.2. Proposition : *Soient G, $\mathcal{E}$, F des faisceaux cohérents sur X, $h : \mathcal{E} \to F$ un morphisme, et*

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{i} F' \xrightarrow{p} G \longrightarrow 0 \quad , \quad 0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{i'} \mathcal{E}' \xrightarrow{p'} G \longrightarrow 0$$

des extensions, associées respectivement à $\sigma \in \operatorname{Ext}^1(G, F)$ et $\sigma' \in \operatorname{Ext}^1(G, \mathcal{E})$. Alors il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\mathcal{E} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i'"] & F \arrow[d, "i"] \\
\mathcal{E}' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "p'"] & F' \arrow[d, "p"] \\
G \arrow[r, equal] \arrow[d] & G \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

si et seulement si on a $r_h(\sigma') = \sigma$. Dans ce cas ψ est injectif (resp. surjectif) si et seulement si h l'est.

Démonstration. Analogue à la proposition 4.3.1. □

4.3.3. Corollaire : *Soient A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1 des faisceaux cohérents sur X et*

$$0 \longrightarrow A_0 \xrightarrow{i_0} B_0 \xrightarrow{p_0} C_0 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{i_1} B_1 \xrightarrow{p_1} C_1 \longrightarrow 0$$

des suites exactes. Soient $\alpha : A_0 \to A_1$, $\gamma : C_0 \to C_1$ des morphismes. Soit $\eta_0 \in \operatorname{Ext}^1(C_0, A_0)$ (resp. $\eta_1 \in \operatorname{Ext}^1(C_1, A_1)$) l'élément associé à la première (resp. seconde) suite exacte. Alors il *existe un morphisme* $\beta : B_0 \to B_1$ *tel que le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "\alpha"] & B_0 \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "\beta"] & C_0 \arrow[d, "\gamma"] \\
A_1 \arrow[r, "i_1"'] & B_1 \arrow[r, "p_1"'] & C_1
\end{tikzcd}$$

soit commutatif si et seulement si on a $r_\alpha(\eta_0) = l_\gamma(\eta_1)$.

4.4. Extensions et diagrammes 3x3

4.4.1. Proposition : *Soient* A, A', E, F *des faisceaux cohérents sur* X,

$$(S) \qquad 0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow A' \longrightarrow 0$$

une suite exacte.

1 - Soit $\delta : \mathrm{Hom}(A,F) \to \mathrm{Ext}^1(A',F)$ *l'application induite par* (S). *Soit* $\phi \in \mathrm{Hom}(A,F)$. *Alors il existe un diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes*

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & A \arrow[r, equal] \arrow[d, "i"] & A \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d, equal] & F \oplus E \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

tel que la la suite exacte verticale de droite soit l'extension (S), *que la suite exacte horizontale du bas soit associée à* $\delta(\phi)$, *que celle du milieu soit triviale, que le morphisme* $A \to F$ *induit par* $\psi_{|E} : E \to U$ *soit égal à* ϕ, *et que celui qui provient de* i *soit égal à* $-\phi$.

Réciproquement, supposons donné un tel diagramme, tel que la suite exacte verticale de droite soit l'extension (S), *et que la suite exacte horizontale du milieu soit triviale. Soit* $\phi : A \to F$ *le morphisme induit par* $\psi_{|E} : E \to U$. *Alors le morphisme* $A \to F$ *défini par* i *est égal à* $-\phi$ *et la suite exacte horizontale du bas est associée à* $\delta(\phi)$.

2 - Soit $\delta' : \mathrm{Hom}(F, A') \to \mathrm{Ext}^1(F, A)$ *l'application induite par* (S)*. Soit* $\phi' \in \mathrm{Hom}(F, A')$*. Alors il existe un diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d, "\psi'"] & F \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d] & E \oplus F \arrow[r] \arrow[d, "p"] & F \arrow[r] & 0 \\
 & A' \arrow[r, equal] \arrow[d] & A' \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

tel que la la suite exacte verticale de gauche soit l'extension (S)*, que la suite exacte horizontale du haut soit associée à* $\delta'(\phi')$*, que celle du milieu soit triviale, que le morphisme* $\alpha' : F \to A'$ *induit par la composante* $V \to E$ *de* ψ' *soit égal à* ϕ'*, et que celui qui provient de* p *soit égal à* $-\phi'$*.*

Réciproquement, supposons donné un tel diagramme, tel que la suite exacte verticale de gauche soit l'extension (S)*, et que la suite exacte horizontale du milieu soit triviale. Soit* $\phi' : F \to A'$ *le morphisme induit par la composante* $V \to E$ *de* ψ'*. Alors le morphisme* $F \to A'$ *défini par* p *est égal à* $-\phi'$ *et la suite exacte horizontale du haut est associée à* $\delta'(\phi')$*.*

Démonstration. On ne démontrera que 1-, 2- étant analogue. On utilise la construction explicite des extensions donnée dans 4.1. On utilise une résolution localement libre adéquate de A' :

$$A'_2 \xrightarrow{f'_2} A'_1 \xrightarrow{f'_1} A'_0 \xrightarrow{f'_0} A'$$

L'extension de de A' par A de la proposition 4.4.1 provient d'un élément de $\mathrm{Ext}^1(A', A)$ défini par un morphisme

$$f : A'_1/\,\mathrm{Im}(f'_2) \longrightarrow A.$$

Soit $\mu = f \oplus \overline{f'_1} : A'_1/\,\mathrm{Im}(f'_2) \to A \oplus A'_0$. Alors on a $E = (A \oplus A'_0)/\,\mathrm{Im}(\mu)$.

On construit maintenant le diagramme commutatif de la proposition 4.4.1. Soit

$$\eta \;=\; (\phi \circ f) \oplus \overline{f'_1} \;:\; A'_1/\,\mathrm{Im}(f'_2) \longrightarrow F \oplus A'_0.$$

Alors on a $U = (F \oplus A'_0)/\,\mathrm{Im}(\eta)$. On définit maintenant $\psi : F \oplus E \to U$, c'est-à-dire

$$\psi : (A \oplus A'_0)/\,\mathrm{Im}(\mu) \longrightarrow ((A \oplus A'_0)/\,\mathrm{Im}(\mu) \oplus A'_0).$$

On considère le morphisme

$$\begin{aligned} \psi_0 : F \oplus A \oplus A'_0 &\longrightarrow F \oplus A'_0 \\ (v, a, a'_0) &\longmapsto (v + \phi(a), a'_0) \end{aligned}$$

Il est clair qu'on a $\psi_0(F \oplus \mathrm{Im}(\mu)) \subset \mathrm{Im}(\eta)$. On en déduit ψ. La vérification du fait que le diagramme de la proposition 4.4.1 est commutatif ainsi que les démonstrations des autres assertions sont laissées au lecteur. ☐

4.4.2. Corollaire : *Soient A, E, A' des faisceaux cohérents sur X,*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow A' \longrightarrow 0$$

une suite exacte, et $\delta' : \mathrm{Hom}(A, A') \to \mathrm{Ext}^1(A', A')$, $\delta : \mathrm{Hom}(A, A') \to \mathrm{Ext}^1(A, A)$ *les applications induites. Soit* $\phi \in \mathrm{Hom}(A, A')$. *Alors il existe un diagramme 3x3*

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d] & E \oplus E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

tel que les suites exactes verticales de gauche et de droite soient identiques à la suite exacte précédente, que la suite exacte horizontale du milieu soit triviale, que celle du haut soit associée à $\delta(\phi)$, que celle du bas soit associée à $\delta'(\phi)$, et que le morphisme $\alpha : A \to A'$ *induit par la seconde composante du morphisme* $E \oplus E \to B'$ *soit égal à ϕ.*

Réciproquement, étant donné un tel diagramme, la suite exacte horizontale du haut est associée à $\delta(\alpha)$ et celle du bas est associée à $\delta'(\alpha)$.

Démonstration. On applique la proposition 4.4.1 (avec $F = E$) et on déduit de ϕ un premier diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes :

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
& & A \arrow[r, equal] \arrow[d] & A \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, equal] & A' \oplus E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

On en déduit le diagramme 3x3 du corollaire 4.4.2 en remplaçant le morphisme $A' \to B'$ par la composée $E \to A' \to B'$. Il reste á vérifier que la suite exacte horizontale du haut est associée à $\delta(\phi)$. Pour cela on déduit du diagramme 3x3 le diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d] & E \oplus A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] & 0 \\
 & A' \arrow[r, equal] \arrow[d] & A' \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

où le morphisme induit $A \to A'$ est ϕ et la suite exacte horizontale du haut est celle du diagramme 3x3. Toujours d'aprés la proposition 4.4.1, cette suite exacte est associée à $\delta(\phi)$.

Le reste du corollaire 4.4.2 est laissé au lecteur. □

4.5. Extensions duales

4.5.1. Proposition : *Soit*

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

une extension de faisceaux localement libres sur X, *associée à* $\sigma \in \mathrm{Ext}^1(F, E)$. *Soit*

$$F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} F \longrightarrow 0$$

une résolution localement libre de F. *On suppose que* σ *provient d'un morphisme* $\eta : F_1 \to E$ *tel que* $\eta \circ f_2 = 0$. *Supposons qu'on ait une résolution localement libre de* E^*

$$D_2 \longrightarrow D_1 \xrightarrow{d_1} D_0 \xrightarrow{d_0} E^* \longrightarrow 0$$

telle qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F^* \arrow[r, hook, "{}^t f_0"] & F_0^* \arrow[r, "{}^t f_1"] & F_1^* \\
D_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[u] & D_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[u, "\lambda"] & D_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[u, "\alpha"] & E^* \arrow[u, "{}^t \eta"]
\end{tikzcd}$$

Alors le morphisme $D_1/\operatorname{Im}(d_2) \to F^*$ *induit par* λ *est associé à l'extension*

$$0 \longrightarrow F^* \longrightarrow \mathcal{E}^* \longrightarrow E^* \longrightarrow 0$$

duale de σ.

Il existe toujours une telle résolution localement libre de E^*.

Démonstration. Pour démontrer l'existence de la résolution donnant un tel diagramme commutatif on prend le même type de résolutions que dans 4.2. Les constructions de la résolution et du diagramme se font pas à pas en appliquant le théorème B de Serre.

Soit $0 \longrightarrow F^* \longrightarrow V \longrightarrow E^* \longrightarrow 0$ l'extension déduite de λ. On va voir que V est isomorphe à $\mathcal{E}^*$. Rappelons les définitions de $\mathcal{E}$ et V. Soient

$$\mu = \eta \oplus f_1 : F_1 \longrightarrow E \oplus F_0, \qquad \nu = \lambda \oplus d_1 : D_1 \longrightarrow F^* \oplus D_0,$$

Alors on a $\mathcal{E} = (E \oplus F_0)/\operatorname{Im}(\mu)$ et $V = (F^* \oplus D_0)/\operatorname{Im}(\nu)$. Soit

$$\begin{tikzcd}
I : F^* \oplus D_0 \arrow[r] & E^* \oplus F_0^* \\
(\phi, \delta_0) \arrow[r, mapsto] & (d_0(\delta_0), {}^t f_0(\phi) - \alpha(\delta_0))
\end{tikzcd}$$

Il est aisé de montrer que I induit un isomorphisme $\overline{I} : V \simeq \mathcal{E}^*$. Pour achever la démonstration on vérifie aisément qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & V \arrow[r] \arrow[d, "\overline{I}"] & E^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^* \arrow[r] & \mathcal{E}^* \arrow[r] & E^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

□

4.5.2. Remarque : On peut obtenir un diagramme comme celui de la proposition 4.5.1 pour tout morphisme $D_1 \to F^*$ représentant l'extension duale. En effet, si $\psi : D_0 \to F^*$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F^* \arrow[r, hook, "{}^t f_0"] & F_0^* \arrow[r, "{}^t f_1"] & F_1^* \\
D_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[u] & D_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[u, "\lambda + \psi d_1"'] & D_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[u, "\alpha + {}^t f_0 \psi"'] & E^* \arrow[u, "{}^t \eta"']
\end{tikzcd}$$

4.6. Résolutions d'extensions

Soit

$$\begin{tikzcd}
(L) \qquad 0 \arrow[r] & E \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

une extension de faisceaux cohérents sur X. Soit

$$\cdots E_2 \xrightarrow{e_2} E_1 \xrightarrow{e_1} E_0 \xrightarrow{e_0} E \longrightarrow 0$$

une résolution localement libre de E. Soit

$$\cdots F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} F \longrightarrow 0$$

une résolution localement libre de F telle que (L) provienne d'un morphisme $\sigma_1 : F_1 \longrightarrow E$ s'annulant sur $\mathrm{Im}(f_2)$. (cf. 4.2). On en déduit une résolution localement libre de $\mathcal{E}$:

$$\cdots F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{(f_1,\sigma_1)} F_0 \oplus E \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

Cette résolution n'est malheureusement pas arbitrairement négative (à cause du terme $F_0 \oplus E$), et ne peut donc pas être utilisée pour calculer des espaces du type $\mathrm{Ext}^p(\mathcal{E},\mathcal{U})$, où $\mathcal{U}$ est un faisceau cohérent sur X. En fait seuls les éléments qui proviennent de $\mathrm{Ext}^1(F,\mathcal{U})$ peuvent être construits (si $p > 0$). Cependant, si on prend les F_i suffisamment négatifs, on déduit aisément de la résolution précédente de $\mathcal{E}$ une nouvelle résolution

$$\cdots F_2 \oplus E_2 \xrightarrow{\delta_2} F_1 \oplus E_1 \xrightarrow{\delta_1} F_0 \oplus E_0 \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

où δ_0 est la composée

$$F_0 \oplus E_0 \xrightarrow{(I,e_0)} F_0 \oplus E \longrightarrow \mathcal{E}$$

et δ_i pour $i > 1$ est représenté par une matrice

$$\begin{pmatrix} f_i & 0 \\ \theta_i & e_i \end{pmatrix}$$

avec $\theta_i : F_i \to E_{i-1}$. Les θ_i vérifient l'équation

$$\theta_i f_{i+1} + e_i \theta_{i+1} \;=\; 0$$

pour $i \geq 1$. Si les résolutions de E et F sont adéquates, tout élément u de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{U})$ peut être représenté par un morphisme

$$(\phi_p, \epsilon_p) : F_p \oplus E_p \to \mathcal{U}$$

s'annulant sur $\mathrm{Im}(\delta_{p+1})$, et u provient de $\mathrm{Ext}^p(F,\mathcal{U})$ si et seulement si on peut le représenter par un morphisme tel que $\epsilon_p = 0$. En général l'image de u dans $\mathrm{Ext}^p(E,\mathcal{U})$ est représentée par $\epsilon_p : E_p \to \mathcal{U}$.

On a une suite exacte de complexes

$$\begin{tikzcd}
\cdots E_2 \arrow[r, "e_2"] \arrow[d, hook] & E_1 \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, hook] & E_0 \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, hook] & E \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
\cdots F_2 \oplus E_2 \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, two heads] & F_1 \oplus E_1 \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, two heads] & F_0 \oplus E_0 \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, two heads] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
\cdots F_2 \arrow[r, "f_2"] & F_1 \arrow[r, "f_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Réciproquement, si on a une suite exacte du type précédent, les morphismes δ_i sont définis par des matrices $\begin{pmatrix} f_i & 0 \\ \theta_i & e_i \end{pmatrix}$, avec $\theta_i : F_i \to E_{i-1}$, et $(\theta_i)_{i\geq 1}$ définit un élément de $\mathrm{Ext}^1(F,E)$ qui est celui qui est associé à l'extension de F par E induite par la suite exacte de complexes.

5. Faisceaux réguliers

Soit X une variété algébrique projective lisse et irréductible

5.1. Définition des faisceaux réguliers

5.1.1. Définition : *Soit F un faisceau cohérent X. On dit que F est* régulier *si*

- *(i) F est sans torsion.*
- *(ii) F^{**} est simple et 2-lisse (cf. 2.3.1).*
- *(iii) Si F n'est pas localement libre, F^{**}/F est parfait de codimension 2 (cf 2.7).*

5.1.2. Remarques : 1 - La simplicité de F^{**} entraine celle de F.

2 - Si X est une surface, on voit aisément en utilisant la dualité de Serre que la 2-lissité de F^{**} entraine celle de F, et que la condition (iii) est une conséquence de (i). La définition d'un faisceau régulier est donc plus simple dans ce cas : c'est un faisceau isomorphe au noyau d'un morphisme $E \to T$, où T est un faisceau de dimension 0 et E un fibré vectoriel simple et 2-lisse.

5.1.3. Lemme : *Soient F un faisceau régulier non localement libre sur X et $T = F^{**}/F$. Alors on a un diagramme commutatif canonique avec lignes et colonnes exactes*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(F^{**},T)/\,\mathrm{End}(T) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(F^{**},F)/(\mathrm{End}(T)/\mathbb{C}) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(F,T) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(F,F)
\end{tikzcd}$$

Démonstration. On déduit de la suite exacte $0 \longrightarrow F \longrightarrow F^{**} \longrightarrow T \longrightarrow 0$ un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] \\
 & 0 \arrow[d] & \mathbb{C} \arrow[d] \\
 & \mathrm{End}(T) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(T,F) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(F^{**},T) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(F^{**},F) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(F,T) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(F,F)
\end{tikzcd}$$

dont découle aisément le lemme. □

Soit F un faisceau régulier sur X. On notera

$$T(F) \ = \ F^{**}/F,$$
$$D(F) \ = \ \mathrm{Ext}^1(F^{**},F)/(\mathrm{End}(T)/\mathbb{C}) \ + \ \mathrm{Hom}(F,T) \ \subset \ \mathrm{Ext}^1(F,F).$$

On va voir dans 5.2 que $D(F)$ correspond aux déformations de f obtenues en déformant F^{**}, T et le morphisme surjectif $F^{**} \to T$.

5.2. Déformations de faisceaux réguliers

Soit X une variété algébrique projective lisse et connexe. Soient $\mathcal{T}$ une famille de faisceaux parfaits de codimension 2 sur X, paramétrée par une variété algébrique irréductible Y et $\mathcal{F}$ une famille de faisceaux localement libres sur X paramétrée par une variété algébrique irréductible Z (cf. 2.6). On note $p_Y : Y \times Z \to Y$, $p_Z : Y \times Z \to Z$, $p_{Y\times Z} : Y \times Z \times X \to Y \times Z$ les projections. On suppose que les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) $\dim(\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_z, \mathcal{T}_y))$ est indépendant des points fermés y de Y et z de Z.

(ii) si Y n'est pas réduite, pour tout $y \in Y$, $\mathcal{T}_y$ est 2-lisse.

(iii) pour tout $z \in Z$, $\mathcal{F}_z$ est simple et 2-lisse.

5.2.1. Lemme : *Le faisceau cohérent* $\mathcal{H} = p_{Y\times Z*}(\mathcal{H}om(p_Y^\sharp(\mathcal{F}), p_Z^\sharp(\mathcal{T})))$ *sur* $Y \times Z$ *est localement libre.*

Démonstration. La dimension de $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_z, \mathcal{T}_y)$ ne dépend pas des points y de Y et z de Z d'après (i). Donc si Y et Z sont réduites $\mathcal{H}$ est bien localement libre (cf. par exemple [17], cor. II.12.9). Supposons que Y soit non réduite. Pour voir que $\mathcal{H}$ est localement libre on montre que c'est le cas au voisinage de toute paire de points fermés (y, z). On utilise des déformations semi-universelles de $\mathcal{T}_y$ et $\mathcal{F}_z$ (cf. 3.1). Elles sont paramétrées par des germes lisses U_y et V_z respectivement (car $\mathcal{F}_z$ est lisse et $\mathcal{T}_y$ aussi d'après (ii)). Le faisceau $\mathcal{H}'$ analogue à $\mathcal{H}$ sur $U_y \times V_z$ est alors localement libre. Il en est donc de même de $\mathcal{H}$ au voisinage de (x, y) puisque que c'est l'image réciproque de $\mathcal{H}'$ par le morphisme universel $Y \times Z \to U_y \times V_z$ défini au voisinage de (y, z). Dans le cas où est Y est réduite, il suffit de considérer une déformation semi-universelle de $\mathcal{F}_z$. □

On note $\mathcal{H}^0$ l'ouvert de $\mathcal{H}$ (vu comme fibré vectoriel sur $Y \times Z$) constitué des morphismes surjectifs $\mathcal{F}_z \to \mathcal{T}_y$. Si p désigne la projection $\mathcal{H}^0 \to Y \times Z$ on a donc un morphisme universel surjectif de faisceaux sur $\mathcal{H}^0 \times X$

$$p^\sharp(p_Z^\sharp(\mathcal{F})) \longrightarrow p^\sharp(p_Y^\sharp(\mathcal{T}))$$

dont le noyau $\mathcal{G}$ est une famille de faisceaux réguliers sur X.

Soient $\mathbb{P}(\mathcal{H}^0)$ l'ouvert du fibré en espaces projectifs $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ constitué des points au dessus de $\mathcal{H}^0$ et $q : \mathbb{P}(\mathcal{H}^0) \to Y \times Z$, $p_{\mathbb{P}} : \mathbb{P}(\mathcal{H}^0) \times X \to \mathbb{P}(\mathcal{H}^0)$ les projections. On a comme précédemment un morphisme universel surjectif de faisceaux sur $\mathbb{P}(\mathcal{H}^0) \times X$

$$q^\sharp(p_Z^\sharp(\mathcal{F})) \otimes p_{\mathbb{P}}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{H})}(-1)) \longrightarrow q^\sharp(p_Y^\sharp(\mathcal{T}))$$

dont le noyau $\mathcal{G}'$ est une famille de faisceaux réguliers sur X.

5.2.2. Proposition : *Soit h un point fermé de $\mathcal{H}^0$, au dessus de $(y, z) \in Y \times Z$. Alors*

1 - Le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer

$$\omega_h : T\mathcal{H}_h \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}_h, \mathcal{G}_h)$$

est à valeurs dans $D(\mathcal{G}_h)$.

2 - Si $\mathcal{T}$, $\mathcal{F}$ sont des déformations complètes de $\mathcal{T}_y$, $\mathcal{F}_z$ respectivement, l'image de ω_h est égale à $D(\mathcal{G}_h)$.

La proposition 5.2.2 est une conséquence immédiate des deux lemmes qui suivent.

Soient $\mathcal{H}^y = \mathcal{H}_{|\{y\} \times Z}$, $\mathcal{G}^y = \mathcal{G}_{|\mathcal{H}^y}$, $\mathcal{H}^z = \mathcal{H}_{|Y \times \{z\}}$, $\mathcal{G}^z = \mathcal{G}_{|\mathcal{H}^z}$. Soient

$$\omega_h^y : T\mathcal{H}_h^y \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}_h, \mathcal{G}_h), \qquad \omega_h^z : T\mathcal{H}_h^z \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}_h, \mathcal{G}_h)$$

les morphismes de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer de $\mathcal{G}^y$, $\mathcal{G}^z$ respectivement, au point h, qui sont des restrictions de ω_h. Soient enfin

$$\omega_z : T\mathcal{H}_h^y \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}_z, \mathcal{F}_z), \qquad \omega_y : T\mathcal{H}_h^z \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{T}_y, \mathcal{T}_y)$$

les morphismes de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer de $p_Z^\sharp(\mathcal{F})$, $p_Y^\sharp(\mathcal{T})$ respectivement, au point h.

5.2.3. Lemme : *(i) L'application* ω_h^y *est à valeurs dans le sous-espace vectoriel* $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}_h^{**},\mathcal{G}_h)/(\mathrm{End}(\mathcal{T}_y)/\mathbb{C})$ *de* $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}_h,\mathcal{G}_h)$.

(ii) La composée

$$T\mathcal{H}_h^y \xrightarrow{\omega_h^y} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}_h^{**},\mathcal{G}_h)/(\mathrm{End}(\mathcal{T}_y)/\mathbb{C}) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}_h^{**},\mathcal{G}_h^{**})$$

est égale à ω_z.

(iii) L'image de ω_h^y *est exactement* $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}_h^{**},\mathcal{G}_h)/(\mathrm{End}(\mathcal{T}_y)/\mathbb{C})$ *si* $\mathcal{F}$ *est une déformation complète de* $\mathcal{F}_z$.

Démonstration. Démontrons (i). Soit $\phi : Z_2 \to \mathcal{H}^y$ le morphisme correspondant à un élément u de $T\mathcal{H}_h$. On a une suite exacte sur $\mathcal{H}^y \times X$

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}^y \longrightarrow p_Z^\sharp(\mathcal{F}) \longrightarrow p_X^*(\mathcal{T}_y) \longrightarrow 0$$

(où $p_Z : \mathcal{H}_y \to Z$ et $p_X : \mathcal{H}_y \to X$ sont les projections). On en déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \phi^\sharp(\mathcal{G}^y) \longrightarrow \phi^\sharp(p_Z^\sharp(\mathcal{F})) \longrightarrow p_X^*(\mathcal{T}_y) \longrightarrow 0$$

sur $Z_2 \times X$. En projetant sur X on obtient le diagramme 3x3 suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G}_h \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{U} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}_h \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_z \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{V} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{T}_y \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{T}_y \oplus \mathcal{T}_y \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{T}_y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{U} = p_{X*}(\phi^\sharp(p_Z^\sharp(\mathcal{G}^y)))$, $\mathcal{V} = p_{X*}(\phi^\sharp(p_Z^\sharp(\mathcal{F})))$.

Dans le diagramme 3x3 précédent on a $\mathcal{T}_y \oplus \mathcal{T}_y = p_{X*}(p_X^*(\mathcal{T}_y))$, et la suite exacte horizontale du bas est la suite exacte triviale. L'élément de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}_h,\mathcal{G}_h)$ associé à la suite exacte horizontale du haut n'est autre que $\omega_h^y(u)$, d'après 3.2.6. Soit $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ le sous-faisceau image inverse du second facteur $\mathcal{T}_y$ par le morphisme $\mathcal{V} \to \mathcal{T}_y \oplus \mathcal{T}_y$. On a un diagramme commutatif canonique avec lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{G}_h \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{U} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}_h \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G}_h \arrow[r] & \mathcal{V}' \arrow[r] & \mathcal{F}_z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Soit η l'élément de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}_z,\mathcal{G}_h) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}_h^{**},\mathcal{G}_h)$ correspondant à la suite exacte du bas. Alors le diagramme commutatif précédent montre que $\omega_h^y(u)$ est l'image de η par l'application

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}_h^{**},\mathcal{G}_h) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}_h,\mathcal{G}_h)$$

provenant de l'inclusion $\mathcal{G}_h \subset \mathcal{G}_h^{**}$. Ceci démontre (i).

Pour démontrer l'assertion (ii) du lemme 5.2.3, on remarque que $\omega_z(u)$ n'est autre que l'extension horizontale du milieu du diagramme 3x3 précédent, et (ii) découle du diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{G}_h \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{V}' \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{F}_z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_z \arrow[r] & \mathcal{V} \arrow[r] & \mathcal{F}_z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pour démontrer (iii) on se restreint à l'ouvert U de $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_z, \mathcal{T}_y)$ correspondant aux morphismes surjectifs. On montre que la restriction de ω_h^y à TU_h est à valeurs dans

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_z, \mathcal{T}_y) \ \subset\ \mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}_h^{**}, \mathcal{G}_h)/(\mathrm{End}(\mathcal{T}_y)/\mathbb{C})$$

et que c'est même l'identité de $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_z, \mathcal{T}_y)$. On en déduit l'assertion (iii) à l'aide de (ii). $\square$

5.2.4. Lemme : *(i) L'application* ω_h^z *est à valeurs dans le sous-espace vectoriel* $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_h, \mathcal{T}_y)$ *de* $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}_h, \mathcal{G}_h)$.

(ii) La composée

$$T\mathcal{H}_h^z \xrightarrow{\omega_h^z} \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_h, \mathcal{T}_y) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{T}_y, \mathcal{T}_y)$$

est égale à ω_y.

(iii) L'image de ω_h^z *est exactement* $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_h, \mathcal{T}_y)$ *si* $\mathcal{T}$ *est une déformation complète de* $\mathcal{T}_y$.

Démonstration. La démonstration de (i) est analogue à celle du (i) du lemme 5.2.3. On aboutit à un diagramme 3x3

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G}_h \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{U} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}_h \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_z \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_z \oplus \mathcal{F}_z \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{T}_y \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{W} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{T}_y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où la suite exacte horizontale du haut est associée à $\omega_h^z(u)$. On en déduit un diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{G}_h \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{U} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}_h \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_z \arrow[r] & \mathcal{F}_z \oplus \mathcal{G}_h \arrow[r] & \mathcal{G}_h \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

qui montre que l'image de ω_h^z dans $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{G}_h, \mathcal{F}_z) = \operatorname{Ext}^1(\mathcal{G}_h, \mathcal{G}_h^{**})$ est nulle, et donc que $\omega_h^z(u)$ provient de $\operatorname{Hom}(\mathcal{G}_h, \mathcal{T}_y)$.

L'assertion (ii) est une conséquence du corollaire 4.4.2 et (iii) se démontre comme le (iii) du lemme 5.2.3. ☐

On a des résultats analogues à la proposition 5.2.2 et aux lemmes 5.2.3, 5.2.4, en remplaçant $\mathcal{H}^0$ et $\mathcal{G}$ par $\mathbb{P}(\mathcal{H}^0)$, $\mathcal{G}'$ respectivement.

5.3. Faisceaux réguliers sur les surfaces

5.3.1. Proposition : *On suppose que X est une surface. Soient F un faisceau régulier non localement libre sur X, et $T = F^{**}/F$.*

Soient

$$\eta : \operatorname{Ext}^1(F, F^{**}) \to \operatorname{Ext}^1(F, T) \simeq \operatorname{Ext}^2(T, T), \qquad \lambda : \operatorname{Ext}^2(T, F^{**}) \to \operatorname{Ext}^2(T, T)$$

les applications induites par π. Alors l'image de η est $\operatorname{Ad}^2(T)$ et λ est surjective. On pose $B(F) = \ker(\eta)$. Alors on a un diagramme 3x3 canonique

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}(F^{**}, T)/\operatorname{End}(T) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1(F^{**}, F)/(\operatorname{End}(T)/\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1(F^{**}, F^{**}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}(F, T) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1(F, F) \arrow[r] \arrow[d] & B(F) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1(T, T) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^2(T, F) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(\lambda) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. On a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ext}^1(F, F^{**}) \arrow[r, "\eta"] & \operatorname{Ext}^1(F, T) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \operatorname{Ext}^2(F, F) \arrow[d, "tr_2(F)"] \\
 & \operatorname{Ext}^2(T, T) \arrow[r, "tr_2(T)"] & H^2(\mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

où la ligne du haut est exacte et le carré est anticommutatif (cf. 2.3). Puisque $tr_2(F)$ est un isomorphisme on a $\operatorname{Im}(\eta) = \ker(tr_2(T))$. La seconde assertion découle du fait que $\operatorname{coker}(\lambda) \subset \operatorname{Ext}^3(T, F)$.

Montrons maintenant que l'application $\mathrm{Ext}^1(F,F)\to\mathrm{Ext}^2(T,F)$ est surjective. On a une suite exacte

$$\mathrm{Ext}^1(F,F)\longrightarrow\mathrm{Ext}^2(T,F)\longrightarrow\mathrm{Ext}^2(F^{**},F)\xrightarrow{\phi}\mathrm{Ext}^2(F,F)$$

donc il suffit de montrer que ϕ est injective, et c'est immédiat en utilisant la dualité de Serre et la lissité de F et F^{**}.

Le reste du lemme 5.3.1 découle aisément du lemme 5.1.3 et du diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(T,F) \arrow[r] \arrow[d] & \{0\}=\mathrm{Ext}^1(T,F^{**}) \arrow[d] & & \\
\mathrm{Ext}^1(F^{**},F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(F^{**},F^{**}) \arrow[r] \arrow[d] & \{0\}=\mathrm{Ext}^1(F^{**},T) \arrow[d] & \\
\mathrm{Ext}^1(F,F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(F,F^{**}) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(F,T) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Ext}^2(F,F) \\
\mathrm{Ext}^2(T,F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^2(T,F^{**}) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^2(T,T) \arrow[d] \arrow[dl, "tr_2(T)"] & \\
0 & \mathrm{Ext}^2(F^{**},F^{**})=H^2(\mathcal{O}_X) & \{0\}=\mathrm{Ext}^2(F^{**},T) &
\end{tikzcd}$$

□

5.3.2. Remarque : On voit que λ ne peut être bijective que si F est de rang 1. Donc si $rg(F)>1$, on a $D(F)\neq\mathrm{Ext}^1(F,F)$. On retrouve le fait bien connu que sur une surface les faisceaux sans torsion de rang supérieur à 1 peuvent être déformés en faisceaux localement libres.

5.3.3. *Déformation des faisceaux réguliers sur les surfaces.* La condition (i) de 5.2 est toujours vérifiée. Soient $k>0$ un entier, X_k l'ouvert de $\mathrm{Hilb}^k(X)$ correspondant aux sous-schémas constitués de k points distincts et $U_k\subset X^k$ l'ouvert au dessus de X_k. On suppose que $Y=U_k$, $\mathcal{T}$ étant le faisceau universel évident. Pour $1\leq i\leq k$, soient $p_i:U_k\to X$ la i-ème projection, et $\mathcal{F}_i=(I_Z\times p_i)^*(\mathcal{F})$. Soit enfin

$$W\ =\ \mathbb{P}(\mathcal{F}_1^*)\times_{U_k\times Z}\cdots\times_{U_k\times Z}\mathbb{P}(\mathcal{F}_k^*).$$

Pour tous $(x_i)\in U_k$ et $z\in Z$, la fibre de W au dessus de $((x_i),z)$ est $\mathbb{P}(\mathcal{F}^*_{z,x_1})\times\cdots\times\mathbb{P}(\mathcal{F}^*_{z,x_k})$. Pour $1\leq i\leq k$, on note $\pi_i:W\times X\to\mathbb{P}(\mathcal{F}_i)$ la i-ème projection. Soient p_Z la projection $W\to Z$ et p_U la projection $W\to U_k$. Alors on a un morphisme surjectif évident

$$p_Z^\sharp(\mathcal{F})\otimes\pi_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F}_1^*)}(-1))\otimes\cdots\otimes\pi_k^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F}_k^*)}(-1))\longrightarrow p_U^\sharp(\mathcal{T}).$$

Son noyau $\mathcal{V}$ est une famille de faisceaux réguliers.

Soit Σ_k le groupe des permutations de $\{1, \ldots, k\}$. On considère l'action évidente de Σ_k sur U_k, W et $\mathcal{V}$. Soient $\overline{W} = W/\Sigma_k$, $\overline{\mathcal{V}} = \mathcal{V}/\Sigma_k$, qui est une famille de faisceaux réguliers paramétrée par $\overline{W}$. Le résultat suivant découle aisément de la construction de $\overline{\mathcal{V}}$:

5.3.4. Proposition : *Pour tout point w de $\overline{W}$, le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer*

$$\omega_w : T\overline{W}_k \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(\overline{\mathcal{V}}_w, \overline{\mathcal{V}}_w)$$

est injectif et a pour image $D(\overline{\mathcal{V}}_w)$.

Soient F un faisceau régulier tel qu'il existe $w \in \overline{W}$ tel que $\overline{\mathcal{V}}_w \simeq F$, $\mathcal{U}$ une déformation semi-universelle de F paramétrée par un germe (S, s_0) et $f : (V, w) \to (S, s_0)$ un morphisme défini par $\mathcal{U}$ (V étant un voisinage adéquat de w dans $\overline{W}$). Alors l'image de f dans S ne dépend que de F et de $\mathcal{U}$, on la note $D(\mathcal{U}, F)$. Plus précisément, si $\mathcal{U}'$ est une autre déformation semi-universelle de F, paramétrée par un germe (S', s'_0), et si $\phi : (S', s'_0) \to (S, s_0)$ est un isomorphisme tel que $\phi^\sharp(\mathcal{U}) \simeq \mathcal{U}'$, on a $\phi(D(\mathcal{U}', F)) = D(\mathcal{U}, F)$. L'espace tangent de $D(\mathcal{U}, F)$ en s_0 est $D(F)$.

Soient T une variété algébrique, t un point fermé de T, $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur $T \times X$, plat qur T et tel que $\mathcal{E}_t \simeq F$. On dit que $\mathcal{E}$ est une *déformation régulière* de F en t si un morphisme $\psi : (T, t) \to (S, s_0)$ tel que $\psi^\sharp(\mathcal{U}) \simeq \mathcal{E}$ est à valeurs dans $D(\mathcal{U}, F)$. On montre aisément que $\mathcal{E}$ est une déformation régulière de F en t si et seulement si il existe un ouvert U de T contenant t tel que $\mathcal{E}^*_{U\times X}$ soit localement libre. Si c'est le cas on peut choisir U de telle sorte qu'il existe un unique morphisme $\Psi : U \to \overline{W}$ tel que $\Psi^\sharp(\overline{\mathcal{V}}) \simeq \mathcal{E}_{U\times X}$. C'est pourquoi on peut dire que $\overline{W}$, munie de $\overline{\mathcal{V}}$, est une sorte de *variété de modules* de faisceaux réguliers.

5.4. FAISCEAUX RÉGULIERS SUR LES VARIÉTÉS DE DIMENSION SUPÉRIEURE À 2

5.4.1. Proposition : *On suppose que* $\operatorname{Ext}^1(F^{**}, T) = \operatorname{Ext}^2(F^{**}, T) = \operatorname{Hom}(F^*, \widetilde{T}) = \{0\}$. *Alors on a un diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}(F^{**}, T)/\operatorname{End}(T) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1(F^{**}, F)/(\operatorname{End}(T)/\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1(F^{**}, F^{**}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}(F, T) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1(F, F) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1(F, F^{**}) \arrow[r] & 0 \\
 & \operatorname{Ext}^1(T, T) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^2(T, F) \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

On a donc $\mathrm{Ext}^1(F,F) = D(F)$*, et toute déformation de* F *s'obtient en déformant* F^{**}*,* T *et le morphisme surjectif* $F^{**} \to T$*.*

Démonstration. Le seul point non immédiat sont la surjectivité des morphismes $\alpha : \mathrm{Ext}^1(F,F) \to \mathrm{Ext}^1(F,F^{**})$ et $\beta : \mathrm{Ext}^1(F,F) \to \mathrm{Ext}^2(T,F)$. En ce qui concerne le premier on a une suite exacte

$$\mathrm{Ext}^1(F,F) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}^1(F,F^{**}) \xrightarrow{\eta} \mathrm{Ext}^1(F,T)$$

et il suffit de montrer que $\eta = 0$. Cela découle du carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(F^{**},F^{**}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Ext}^1(F^{**},T) = \{0\} \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}^1(F,F^{**}) \arrow[r, "\eta"] & \mathrm{Ext}^1(F,T)
\end{tikzcd}$$

où la flèche de gauche est un isomorphisme parce que $\mathrm{Ext}^1(T,F^{**}) = \mathrm{Ext}^2(T,F^{**}) = \{0\}$. On a une suite exacte

$$\mathrm{Ext}^1(F,F) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Ext}^2(T,F) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(F^{**},F) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Ext}^2(F,F)$$

et il suffit de montrer que γ est injective. Cela découle du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^2(F^{**},F) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathrm{Ext}^2(F^{**},F^{**}) \arrow[d, hook] \\
\mathrm{Ext}^2(F,F) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2(F,F^{**})
\end{tikzcd}$$

où la flèche du haut est un isomorphisme parce que $\mathrm{Ext}^1(F^{**},T) = \mathrm{Ext}^2(F^{**},T) = \{0\}$, et celle de droite une inclusion parce que $\mathrm{Ext}^2(T,F^{**}) = \{0\}$. □

On se place dans la situation de 5.2, les conditions (i), (ii), (iii) étant vérifiées. On déduit aisément de la proposition 5.4.1 la

5.4.2. Proposition : *Soient* h *un point fermé de* $\mathcal{H}^0$*, au dessus de* $(y,z) \in Y \times Z$ *et* q *le point correspondant de* $\mathbb{P}(\mathcal{H}^0)$*. On suppose que* $H^0(\mathcal{F}_z \otimes \widetilde{\mathcal{T}_y}) = \{0\}$*, et que* $\mathcal{T}$*,* $\mathcal{F}$ *sont des déformations complètes de* $\mathcal{T}_y$*,* $\mathcal{F}_z$*, respectivement. Alors on a*

(i) $\mathcal{G}$ *(resp.* $\mathcal{G}'$*) est une déformation complète de* $\mathcal{G}_h$ *(resp.* $\mathcal{G}'_q$*).*

(ii) Si de plus Y *est réduite en* y*, la base d'une déformation semi-universelle de* $\mathcal{G}_h$ *est aussi réduite.*

(iii) Si $\mathcal{T}_y$ *est simple et* Y *réduite en* y*, et si* $\mathcal{F}$*,* $\mathcal{T}$ *sont des déformations semi-universelles de* $\mathcal{F}_z$*,* $\mathcal{T}_y$ *respectivement,* $\mathcal{G}'$ *est une déformation semi-universelle de* $\mathcal{G}'_q$*.*

et le

5.4.3. Corollaire : *On suppose que* Y *munie de* $\mathcal{T}$ *et* Z *munie de* $\mathcal{F}$ *sont des variétés de modules fins (cf. 2.6), que* Y *est réduit et que pour tout* $y \in Y$ *le faisceau* $\mathcal{T}_y$ *est simple. Alors* $\mathbb{P}(\mathcal{H}^0)$ *muni de* $\mathcal{G}'$ *est une variété de modules fins. En particulier les faisceaux* $\mathcal{G}'_q$, $q \in \mathbb{P}(\mathcal{H}^0)$, *constituent un ensemble ouvert.*

5.4.4. *Exemples sur* $\mathbb{P}_3$. Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 4 et $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$. Soient Y_0 un ouvert lisse d'une composante irréductible d'un schéma de Hilbert de courbes sur $\mathbb{P}_3$, constitué de courbes lisses et irréductibles et $\mathbf{C} \to Y_0$ la courbe universelle. Soient d le degré des courbes de Y_0 et g leur genre. Soit m un entier tel que $1 - g + m$ et d soient premiers entre eux. Soit $\mathbf{J}^m \to Y_0$ la jacobienne relative de degré m. D'après [35] il existe un fibré de Poincaré $\mathcal{J}_m$ sur $\mathbf{J}^m \times_{Y_0} \mathbf{C}$. On peut voir $\mathcal{J}_m$ comme un famille de faisceaux parfaits de codimension 2 sur $\mathbb{P}_3$ paramétrée par $\mathbf{J}^m$. C'est même une variété de modules fins.

Soient d'autre part $\mathbf{M}$ une variété de modules fins de fibrés vectoriels simples et 2-lisses sur $\mathbb{P}_3$, $\mathcal{F}$ le fibré universel associé. Les conditions (i), (ii), (iii) de 5.2 et celles des propositions 5.4.1, 5.4.2 sont vérifiées si $m \gg 0$. Dans ce cas, d'après le corollaire 5.4.3, $\mathbb{P}(\mathcal{H}^0)$ muni de $\mathcal{G}'$ est une variété de modules fins, constituée de faisceaux réguliers non localement libres.

Par exemple on prend pour Y_0 la grassmannienne des droites de $\mathbb{P}_3$. Le fibré de Poincaré $\mathcal{J}_m$ existe quelque soit m. Soit $\mathbf{M}(2;0,1,0)$ la variété de modules des faisceaux semi-stables de rang 2 et de classes de Chern 0,1,0 sur $\mathbb{P}_3$. Soit $\mathbf{M}$ l'ouvert de $\mathbf{M}(2;0,1,0)$ correspondant aux faisceaux localement libres (ce sont les fibrés de corrélation nulle) (cf. [38], 4.3, ex. 3). Alors $\mathbf{M}$ est canoniquement isomorphe au complémentaire de la grassmannienne des droites de $\mathbb{P}_3$ dans $\mathbb{P}(\wedge^2 V^*)$ et il existe un fibré universel $\mathcal{F}$ sur $\mathbf{M} \times \mathbb{P}_3$. Alors les conditions (i), (ii), (iii) de 5.2 et celles des propositions 5.4.1, 5.4.2 sont vérifiées dés que $m \geq 0$.

Si on prend pour $\mathbf{M}$ la variété de modules fins constituée du seul fibré $\mathcal{O}$, toutes les hypothèses de la proposition 5.4.1 ne sont pas vérifiées (on a $h^0(\widetilde{\mathcal{O}_\ell}) = h^0(\mathcal{O}_\ell(2)) \neq 0$) mais on a quand même $D(\mathcal{I}_\ell) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_\ell, \mathcal{I}_\ell)$.

6. Extensions larges - Définition

Soient X une variété algébrique projective lisse connexe, $\mathcal{O}_X(1)$ un fibré en droites très ample sur X.

6.1. Motivation

Soient E_0 un faisceau localement libre, F un faisceau régulier sur X, non localement libre, et n un entier. On considère des extensions

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] & F \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

avec $E = E_0(n)$. Soit $T = F^{**}/F$.

6.1.1. Lemme : *Il existe un entier n_0 tel que si $n \geq n_0$, les propriétés suivantes soient vérifiées :*

1 - On a $\mathrm{Ext}^i(F^{**}, E) = \{0\}$ *pour $i \geq 1$ et* $\mathrm{Ext}^i(F, E) = \{0\}$ *pour $i \geq 2$.*

2 - On a $\mathrm{Ext}^i(E, F^{**}) = \{0\}$ *pour $i < \dim(X)$.*

3 - On a $\mathrm{Ext}^1(F', E) = \{0\}$ *pour toute déformation localement libre F' de F.*

Démonstration. Cela découle aisément du théorème B de Serre. Le fait que $\mathrm{Ext}^i(F, E)$ est nul si $i \geq 2$ découle du lemme 2.7.2 : on choisit d'abord n_0 suffisamment grand pour qu'on ait $\mathrm{Ext}^i(F^{**}, E) = 0$ pour $i \geq 1$, et on obtient alors des isomorphismes

$$\mathrm{Ext}^i(F, E) \simeq \mathrm{Ext}^{i+1}(T, E)$$

pour $i \geq 2$, et $\mathrm{Ext}^{i+1}(T, E)$ est nul si n_0 est assez grand. □

Il découle de 3- que les extensions non triviales de F par E proviennent essentiellement des singularités de F. On a d'ailleurs d'après le lemme précédent un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^1(F, E) \ \simeq \ \mathrm{Ext}^2(T, E) \ \simeq H^0(E \otimes \omega_X^{-1} \otimes T^\vee).$$

6.1.2. Lemme : *Soit $\sigma \in \mathrm{Ext}^1(F, E)$ et $0 \to E \to \mathcal{E} \to F \to 0$ l'extension associée. Alors $\mathcal{E}$ est localement libre si et seulement si le morphisme $E^* \to T(F)^\vee \otimes \omega_X^{-1}$ associé à σ est surjectif.*

Démonstration. Ce résultat est analogue au lemme 5.1.2 de [38] et se démontre de la même façon. □

6.2. DUALITÉ ET DÉFINITION DES EXTENSIONS LARGES

On considère une extension comme dans le lemme 6.1.1 :

$$(L) \qquad 0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow F \longrightarrow 0\ ,$$

où $\mathcal{E}$ est localement libre. On déduit de la suite exacte précédente la suite exacte

$$0 \longrightarrow F^* \longrightarrow \mathcal{E}^* \longrightarrow E^* \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(F,\mathcal{O}_X) \simeq T^\vee \otimes \omega_X^{-1} \longrightarrow 0.$$

Le morphisme surjectif précédent $\phi : E^* \to T^\vee \otimes \omega_X^{-1}$ est exactement l'élément de $\mathrm{Ext}^1(F,E) \simeq \mathrm{Hom}(E^*,\widetilde{T}\otimes\omega_X^{-1})$ associé à λ (cf. lemme 6.1.2). On pose $G = \ker(\phi)$, donc $G^{**}/G = T^\vee \otimes \omega_X^{-1}$. On a alors $E \simeq G^*$. L'extension (L) s'écrit donc

$$0 \longrightarrow G^* \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

et on obtient aussi l'extension supplémentaire

$$(L^*) \qquad 0 \longrightarrow F^* \longrightarrow \mathcal{E}^* \longrightarrow G \longrightarrow 0\ .$$

L'extension (L) est entièrement déterminée par les fibrés vectoriels F^*, G^*, le faisceau parfait T et deux morphismes surjectifs

— Celui qui définit F, $\tau : F^{**} \to T$,

— Celui provenant de l'élément σ de $\mathrm{Ext}^1(F,E)$ associé à (L),

$$\phi : G^{**} \longrightarrow T^\vee \otimes \omega_X^{-1}.$$

De la même manière l'extension (L^*) est entièrement déterminée par les fibrés vectoriels F^*, G^*, le faisceau parfait $\widetilde{T} = T^\vee \otimes \omega_X^{-1}$ et les morphismes surjectifs

— Celui qui définit G, $\tau^* : G^{**} \to \widetilde{T}$,

— Celui provenant de l'élément σ^* de $\mathrm{Ext}^1(G,F^*)$ associé à (L^*),

$$\phi^* : F^{**} \longrightarrow \widetilde{T}^\vee \otimes \omega_X^{-1} = T.$$

6.2.1. Proposition : *Les morphismes correspondant à* (L) *et* (L^*) *sont les mêmes : on a*

$$\tau^* \ = \ \phi, \qquad \phi^* \ = \ \tau.$$

Démonstration. Cela découle aisément de l'associativité des Ext. ☐

6.2.2. Définition : *On appelle* extension large *une extension*

$$0 \longrightarrow G^* \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

comme précédemment, l'extension associée

$$0 \longrightarrow F^* \longrightarrow \mathcal{E}^* \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

étant appelée extension duale*, telle que les propriétés du lemme 6.1.1 soient vérifiées, c'est-à-dire*

$$\mathrm{Ext}^i(F^{**},G^*) \ = \ \{0\} \quad \text{si} \ \ i \geq 1,$$
$$\mathrm{Ext}^i(F,G^*) \ = \ \mathrm{Ext}^i(G,F^*) \ = \ \{0\} \quad \text{si} \ \ i \geq 2,$$
$$\mathrm{Ext}^i(G^*,F^{**}) \ = \ \{0\} \quad \text{si} \ \ i < \dim(X),$$

et que :

(1) $\mathcal{E}$ est localement libre.

(2) F et G sont réguliers.

On appelle aussi extensions larges les fibrés vectoriels $\mathcal{E}$.

Examinons maintenant comment on peut construire des extensions larges. Soient G_0, F_0 des faisceaux localement libres et T_0 un faisceau parfait sur X. On suppose que pour $p \gg 0$ il existe des morphismes surjectifs $F_0 \longrightarrow T_0(p)$, $G_0 \longrightarrow \widetilde{T_0}(p)$. Alors, si $n \gg m \gg 0$, il existe des morphismes surjectifs

$$\pi : F_0 \longrightarrow T_0(m), \qquad \rho : G_0(-n) \longrightarrow \widetilde{T_0}(-m)$$

définissant une extension large, avec $F = \ker(\pi)$, $G = \ker(\rho)$ et $T = T_0(m)$.

6.3. Exemples

6.3.1. *Exemple 1 - Fibrés instables de rang 2 sur une surface*

On suppose que X est une surface. Soient $Y \subset X$ un sous-schéma de dimension 0 et $\mathcal{I}_Y$ le faisceau d'idéaux de Y.

Soient $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$ des fibrés en droites sur X tels que

$$h^1(\mathcal{L}_0^* \otimes \mathcal{L}_1^*) = h^2(\mathcal{L}_0^* \otimes \mathcal{L}_1^*) = h^0(\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1) = h^1(\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1) = h^0(\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{I}_Y \otimes \omega_X) = 0.$$

Alors il existe des extensions larges

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_0^* \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0$$

En particulier, soit $m > 0$ un entier tel que

$$h^0(\mathcal{I}_Y \otimes \omega_X(-m)) = h^1(\mathcal{O}_X(m)) = h^2(\mathcal{O}_X(m)) = h^1(\mathcal{O}_X(-m)) = \{0\}.$$

Alors il existe des extensions larges

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(m) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0$$

Le cas de $\mathbb{P}_2$ est étudié dans [48]. Dans ce cas la seule condition est $m > 0$.

6.3.2. *Exemple 2 - Fibrés instables de rang 2 sur une variété de dimension* $n > 2$

Soit $n = \dim(X)$. Soit $Y \subset X$ une sous-variété fermée localement intersection complète, de faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_Y$, $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$ des fibrés en droites sur X tels que $\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \simeq \det(\mathcal{N}_{Y/X})$ ($\mathcal{N}_{Y/X}$ désignant le fibré normal de Y). On suppose que

$$h^i(\mathcal{L}_0^* \otimes \mathcal{L}_1^*) = 0 \quad \text{si} \ \ i \geq 1, \qquad h^i(\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1) = 0 \quad \text{si} \ \ i < n,$$

$$h^i(\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{I}_Y \otimes \omega_X) = 0 \quad \text{si} \ \ i \leq n-2.$$

Alors il existe des extensions larges

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{L}_0^* \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{I}_Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Remarquons que si Y est irréductible, il existe essentiellement une seule telle extension.

En particulier, soit $m > 0$ un entier tel que

$h^i(\mathcal{O}_X(m)) = 0$ si $i \geq 1$, $h^i(\mathcal{O}_X(-m)) = 0$ si $i < n$, $h^i(\mathcal{I}_Y \otimes \omega_X(-m)) = 0$ si $i \leq n-2$.

Alors il existe des extensions larges

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(m) \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{I}_Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dans le cas de $\mathbb{P}_n$ la seule condition est $m > 0$. Précisons que l'existence des sous-variétés Y n'est pas assurée si $n > 3$, car l'hypothèse $\det(\mathcal{N}_{Y/X}) \simeq \mathcal{O}_X(-m)$ entraine que Y ne peut pas être une intersection complète. On conjecture en fait qu'il n'existe pas de telles Y si $n \geq 5$ (cf. [17]).

6.3.3. *Exemple 3 - Fibrés de rang élevé sur* $\mathbb{P}_2$

Soit E un fibré exceptionnel sur $\mathbb{P}_2$ (cf. 2.8). Soient $m \geq 1, r \geq 2, c_1, c_2$ des entiers et tels que

$$\mu(E) \ < \ \frac{c_1}{r} \ < \ \mu(E) + x_E$$

et que les faisceaux cohérents E' de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 vérifient l'équation $\chi(E', E) = 0$. Soit T un faisceau de dimension 0 tel qu'il existe des morphismes surjectifs $E \to T$ et $\mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^r \to T$. D'après [5], prop. 3.6, il existe des fibrés stables E' de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 tels que $\mathrm{Ext}^1(E, E') = \{0\}$. Alors il existe des extensions larges

$$0 \longrightarrow G^* \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

où G (resp. F) est le noyau d'un morphisme surjectif $E'^* \to \widetilde{T}$ (resp. $E \to T$).

Dans la figure ci-dessous on a représenté la position du point de $\mathbb{R}^2$ correspondant aux fibrés E'.

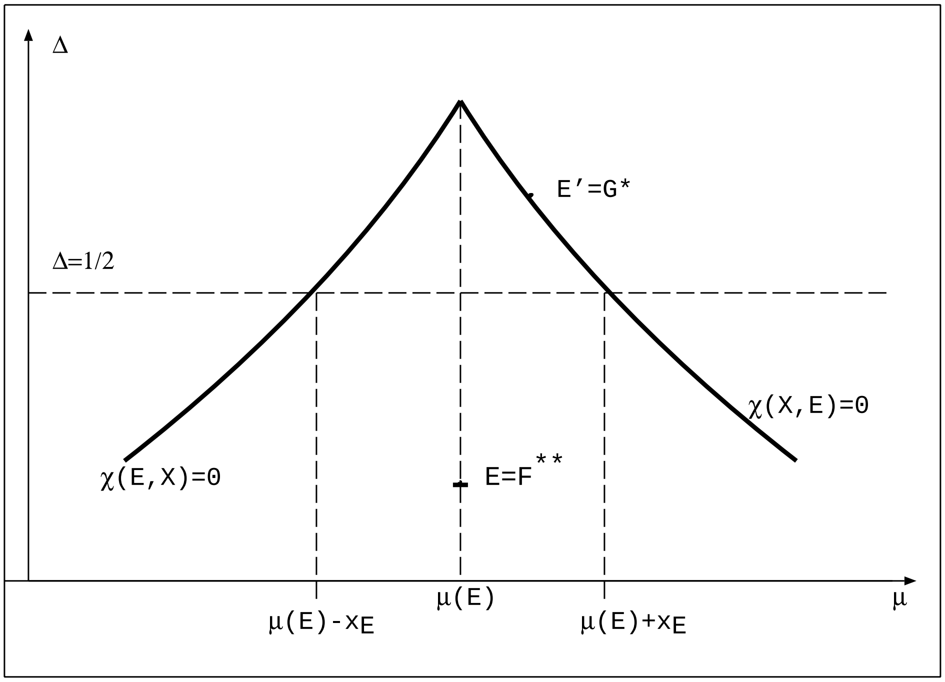

Figure 3 - Position de E' dans le plan de coordonnées (μ, Δ)

Rappelons qu'on dit qu'un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{P}_2$ est *prioritaire* s'il est sans torsion et qu'on a $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{F}, \mathcal{F}(-1)) = \{0\}$ (cf. [19]). Il est facile de voir que le faisceau $\mathcal{E}$ précédent est prioritaire. On a de plus $\mu(E) < \mu(\mathcal{E}) < \mu(F')$. D'autre part, on a

$$\Delta(\mathcal{E}) \;=\; C + \frac{h^0(T)}{rg(E)+r},$$

avec

$$C \;=\; \frac{1}{rg(E)+r}(c_2 + c_2(E) + c_1c_1(E) - \frac{rg(E)+r-1}{2(rg(E)+r)}(c_1 + c_1(E))^2)).$$

Donc si $h^0(T)$ est suffisamment grand, le point du plan $\mathbb{R}^2$ correspondant à $\mathcal{E}$ se trouve au dessus du graphe de la fonction $\Delta = \delta(\mu)$ (cf. 2.8). Puisque le champ des faisceaux prioritaires est irréductible d'après [19], cela entraine que $\mathcal{E}$ se déforme en fibrés stables. Dans ce cas les déformations de $\mathcal{E}$ ne sont pas des extensions larges du même type (cf 9.3).

6.4. CONSTRUCTION DES EXTENSIONS LARGES

On refait maintenant les constructions précédentes dans un ordre différent. On considère des fibrés vectoriels $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$, et un faisceau parfait T sur X. On pose

$$\widetilde{T} \;=\; \mathcal{E}xt^2(T, \mathcal{O}_X) \;\simeq\; T^\vee \otimes \omega_X^{-1}.$$

La transposition définit un isomorphisme canonique $\mathrm{End}(T) \simeq \mathrm{End}(\widetilde{T})$. Soient

$$\pi : \mathbb{F} \longrightarrow T, \qquad \rho : \mathbb{G} \longrightarrow \widetilde{T}$$

des morphismes surjectifs. On pose $F=\ker(\pi)$, $G=\ker(\rho)$, de telle sorte que $\mathbb{F}=F^{**}$, $\mathbb{G}=G^{**}$. On se place dans le cas où comme dans 6.2, π et ρ définissent une extension large

$$(L)\qquad 0\longrightarrow G^*\xrightarrow{i}\mathcal{E}\xrightarrow{p}F\longrightarrow 0$$

associée à $\sigma\in\operatorname{Ext}^1(F,G^*)$ et l'extension duale

$$(L^*)\qquad 0\longrightarrow F^*\xrightarrow{{}^tp}\mathcal{E}^*\xrightarrow{{}^ti}G\longrightarrow 0$$

associée à $\sigma^*\in\operatorname{Ext}^1(G,F^*)$. Rappelons qu'on a des isomorphismes canoniques

$$\delta(\pi):\mathcal{E}xt^1(G,\mathcal{O}_X)\to T,\qquad \delta'(\rho):\mathcal{E}xt^1(F,\mathcal{O}_X)\to\widetilde{T}$$

provenant des suites exactes

$$0\longrightarrow F\longrightarrow\mathbb{F}\xrightarrow{\pi}T\longrightarrow 0\ ,\qquad 0\longrightarrow G\longrightarrow\mathbb{G}\xrightarrow{\rho}\widetilde{T}\longrightarrow 0$$

et des isomorphismes $\widetilde{T}\simeq\mathcal{E}xt^2(T,\mathcal{O}_X)$, $T\simeq\mathcal{E}xt^2(\widetilde{T},\mathcal{O}_X)$.

D'après 4.2 il existe une résolution localement libre de F

$$\cdots F_2\xrightarrow{f_2}F_1\xrightarrow{f_1}F_0\xrightarrow{f_0}F\longrightarrow 0$$

et une résolution localement libre de G

$$\cdots G_2\xrightarrow{g_2}G_1\xrightarrow{g_1}G_0\xrightarrow{g_0}G\longrightarrow 0$$

telles que (L) provienne d'un morphisme $\sigma_1:F_1\longrightarrow G^*$ s'annulant sur l'image de f_2, et que (L^*) provienne d'un morphisme $\sigma_1^*:G_1\longrightarrow F^*$ s'annulant sur l'image de g_2.

On retrouve les données de départ à partir de σ_1, σ_1^* de la façon suivante : on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{E}xt^1(G,\mathcal{O}_X)\ \simeq\ \ker({}^tg_2)/\operatorname{Im}({}^tg_1),$$

${}^t\sigma_1^*$ est à valeurs dans $\ker({}^tg_2)$ et π n'est autre que la composée

$$F^{**}\xrightarrow{{}^t\sigma_1^*}\ker({}^tg_2)\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow\ker({}^tg_2)/\operatorname{Im}({}^tg_1).$$

On retrouve de même ρ à partir de σ_1.

On obtient alors des résolutions localement libres de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^*$

$$\cdots F_2\xrightarrow{f_2}F_1\xrightarrow{(f_1,\sigma_1)}F_0\oplus G^*\longrightarrow\mathcal{E}\longrightarrow 0$$

$$\cdots G_2\xrightarrow{g_2}G_1\xrightarrow{(g_1,\sigma_1^*)}G_0\oplus F^*\longrightarrow\mathcal{E}^*\longrightarrow 0.$$

On a des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} F_0\oplus G^* \arrow[r, two heads] \arrow[dr, "f_0"'] & \mathcal{E} \arrow[d, "p"] \\ & F \end{tikzcd}\quad ,\qquad \begin{tikzcd} F_0\oplus G^* \arrow[r, two heads] & \mathcal{E} \\ & G^* \arrow[ul, hook', "{}^tg_0"] \arrow[u, "i"] \end{tikzcd}$$

et des diagrammes analogues pour $\mathcal{E}^*$.

On déduit des résolutions précédentes de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^*$ la suite exacte

$$\cdots F_2\xrightarrow{f_2}F_1\xrightarrow{\quad(f_1,\sigma_1)\quad}F_0\oplus G^*\xrightarrow{\theta}F^{**}\oplus G_0^*\xrightarrow{\quad{}^t\sigma_1^*+{}^tg_1\quad}G_1^*\longrightarrow G_2^*\cdots$$

Des diagrammes commutatifs précédents on déduit que θ est de la forme

$$\theta \ = \ \begin{pmatrix} f_0 & 0 \\ -\alpha & {}^t g_0 \end{pmatrix},$$

avec $\alpha : F_0 \to G_0^*$. De l'exactitude de la suite précédente on déduit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
F_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\sigma_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\alpha"] & F \arrow[r] \arrow[d, "{}^t\sigma_1^*"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & G^* \arrow[r, "{}^t g_0"] & G_0^* \arrow[r, "{}^t g_1"] & G_1^* \arrow[r, "{}^t g_2"] & G_2^*
\end{tikzcd}$$

On obtient de même le diagramme dual

$$\begin{tikzcd}
G_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d] & G_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\sigma_1^*"] & G_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "{}^t\alpha"] & G \arrow[r] \arrow[d, "{}^t\sigma_1"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & F^* \arrow[r, "{}^t f_0"] & F_0^* \arrow[r, "{}^t f_1"] & F_1^* \arrow[r, "{}^t f_2"] & F_2^*
\end{tikzcd}$$

Remarquons que ces diagrammes induisent des morphismes de résolutions de T et $\widetilde{T}$:

$$\begin{tikzcd}
F_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\sigma_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\alpha"] & F^{**} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "{}^t\sigma_1^*"] & T \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & G^* \arrow[r, "{}^t g_0"] & G_0^* \arrow[r, "{}^t g_1"] & \ker({}^t g_2) \arrow[r, "\pi'"] & T
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
G_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d] & G_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\sigma_1^*"] & G_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "{}^t\alpha"] & G^{**} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "{}^t\sigma_1"] & \widetilde{T} \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & F^* \arrow[r, "{}^t f_0"] & F_0^* \arrow[r, "{}^t f_1"] & \ker({}^t f_2) \arrow[r, "\rho'"] & \widetilde{T}
\end{tikzcd}$$

Ces résolutions permettent d'expliciter partiellement les isomorphismes

$$\mathrm{Ext}^2(T,W) \simeq \mathrm{Hom}(W^*,\widetilde{T}), \qquad \mathrm{Ext}^2(\widetilde{T},W) \simeq \mathrm{Hom}(W^*,T),$$

W étant un fibré vectoriel sur X. Soit $\mu : F_1 \to W$ un morphisme s'annulant sur $\mathrm{Im}(f_2)$. Ce morphisme définit un élément u de $\mathrm{Ext}^2(T,W)$ d'après la résolution précédente de T. Le morphisme ${}^t\mu : W^* \to F_1^*$ est à valeurs dans $\ker({}^t f_2)$, et la composition avec le morphisme $\ker({}^t f_2) \to \widetilde{T}$ du diagramme précédent donne le morphisme $W^* \to \widetilde{T}$ associé à u.

7. PROPRIÉTÉS DES EXTENSIONS LARGES

On utilise ici les notations et résultats de 6, et plus particulièrement ceux de 6.4. On considère donc une extension large

$$(L) \qquad 0 \longrightarrow G^* \xrightarrow{i} \mathcal{E} \xrightarrow{p} F \longrightarrow 0$$

et le sujet principal de ce chapitre est l'étude de la structure de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$ induite par la suite exacte précédente et la suite exacte duale.

7.1. L'APPLICATION CANONIQUE $\mathrm{End}(T) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$

Examinons les actions de $\mathrm{Aut}(T) = \mathrm{Aut}(\widetilde{T})$ sur $\mathrm{Ext}^1(F, G^*)$ et $\mathrm{Ext}^1(G, F^*)$.
Ces actions proviennent des isomorphismes canoniques $\mathrm{Ext}^1(F, G^*) \simeq \mathrm{Hom}(G^{**}, \widetilde{T})$ et $\mathrm{Ext}^1(G, F^*) \simeq \mathrm{Hom}(F^{**}, T)$ respectivement.

Soit $\theta \in \mathrm{Aut}(T)$. Alors on a $\delta'({}^t\theta \circ \rho) = \theta^{-1} \circ \delta'(\rho)$, $\delta(\theta^{-1} \circ \pi) = {}^t\theta \circ \delta(\pi)$. Il en découle que $\delta'({}^t\theta \circ \rho)^{-1} \circ \theta^{-1} \circ \pi = \delta'(\rho)^{-1} \circ \pi$, $\delta(\theta^{-1} \circ \pi)^{-1} \circ {}^t\theta \circ \rho = \delta'(\rho)^{-1} \circ \pi$. On en déduit que les morphismes σ_1, σ_1^*, α correspondant à $(\theta^{-1} \circ \pi, {}^t\theta \circ \rho)$ sont les mêmes que ceux qui correspondent à (π, ρ).

Soient

$$\xi_0 : \mathrm{End}(\widetilde{T}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}), \qquad \xi_0^* : \mathrm{End}(T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*,\mathcal{E}^*)$$

les applications composées :

$$\mathrm{End}(\widetilde{T}) \xrightarrow{\nu} \mathrm{Hom}(G^{**}, \widetilde{T}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ext}^1(F, G^*) \xrightarrow{a} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, G^*) \xrightarrow{b} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$$

$$\mathrm{End}(T) \xrightarrow{\nu'} \mathrm{Hom}(F^{**}, T) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ext}^1(G, F^*) \xrightarrow{a'} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*, F^*) \xrightarrow{b'} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*,\mathcal{E}^*)$$

où a, b, a', b' sont induits par (L), (L^*), ν est la multiplication par ρ, et ν' celle par π.

7.1.1. Proposition : *On a* $\xi_0 = \xi_0^*$, *compte tenu des identifications* $\mathrm{End}(T) \simeq \mathrm{End}(\widetilde{T})$, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \simeq \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*,\mathcal{E}^*)$.

Démonstration. On considère les morphismes

$$\sigma'_1 : F_1 \longrightarrow G^*, \quad {\sigma'_1}^* : G_1 \longrightarrow F^*, \quad \alpha' : F_0 \longrightarrow G_0^*$$

correspondant à

$$\theta \circ \pi : \mathbb{F} \longrightarrow T, \qquad \rho : \mathbb{G} \longrightarrow \widetilde{T}.$$

Ce sont les mêmes que ceux qui correspondent à

$$\pi : \mathbb{F} \longrightarrow T, \qquad {}^t\theta \circ \rho : \mathbb{G} \longrightarrow \widetilde{T}.$$

L'élément $\nu(\theta)$ de $\mathrm{Ext}^1(F, G^*)$ provient de σ'_1, et $a \circ \nu(\theta)$ aussi, compte tenu de la résolution de $\mathcal{E}$:

$$\ldots F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \oplus G^* \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

Donc $b \circ a \circ \nu(\theta)$ provient de la composée $F_1 \xrightarrow{\sigma'_1} G^* \hookrightarrow \mathcal{E}$. De même $b' \circ a' \circ \nu'(\theta)$ provient de la composée $G_1 \xrightarrow{{\sigma'_1}^*} F^* \hookrightarrow \mathcal{E}^*$. On obtient alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r] \arrow[d, "{\sigma'_1}^*"] & G_0 \oplus F^* \arrow[r] \arrow[dd, "\Theta"] & \mathcal{E}^* \arrow[d, "{}^t i"] \\
F^* \arrow[d, "{}^t p"] & & G^{**} \arrow[d, "{}^t \sigma'_1"] \\
\mathcal{E}^* \arrow[r] & F_0^* \oplus G^{**} \arrow[r] & F_1^*
\end{tikzcd}$$

où les ligne du haut et du bas proviennent des résolutions de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^*$ vues précédemment, et Θ est défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} {}^t\alpha' - {}^t\alpha & {}^t f_0 \\ g_0 & 0 \end{pmatrix} .$$

On en déduit avec la proposition 4.5.1, que $b' \circ a' \circ \nu'(\theta) = b \circ a \circ \nu(\theta)$. □

7.2. L'application canonique $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \to \operatorname{Ad}^2(T)$

On utilise les notations et résultats de 6.4. L'application $\operatorname{Hom}(G^*, T) \to \operatorname{Ext}^1(G^*, F)$ déduite de π est un isomorphisme, car $\operatorname{Hom}(G^*, F^{**}) = \operatorname{Ext}^1(G^*, F^{**}) = \{0\}$. On note B son inverse. De même, l'application $\operatorname{Hom}(F^*, \widetilde{T}) \to \operatorname{Ext}^1(F^*, G)$ déduite de ρ est un isomorphisme. On note B' son inverse.

7.2.1. Lemme : *Les applications composées*

$$\operatorname{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \xrightarrow{A} \operatorname{Ext}^1(G^*, F) \xrightarrow{B} \operatorname{Hom}(G^*, T) \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Ext}^2(\widetilde{T}, G^{**}) \xrightarrow{C} \operatorname{Ext}^2(\widetilde{T}, \widetilde{T})$$

$$\operatorname{Ext}^1(\mathcal{E}^*,\mathcal{E}^*) \xrightarrow{A'} \operatorname{Ext}^1(F^*, G) \xrightarrow{B'} \operatorname{Hom}(F^*, \widetilde{T}) \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Ext}^2(T, F^{**}) \xrightarrow{C'} \operatorname{Ext}^2(T, T)$$

où A, A' sont induits par (L), (L'), C' par π, et C par ρ sont à valeurs dans $\operatorname{Ad}^2(\widetilde{T})$, $\operatorname{Ad}^2(T)$ *respectivement.*

Démonstration. Dans le premier cas l'application A est à valeurs dans le noyau de la multiplication par σ $\operatorname{Ext}^1(G^*, F) \to \operatorname{Ext}^2(F, F)$, et le résultat découle de la proposition 7.4.5. Le second cas est analogue. □

On note

$$\xi_2 : \operatorname{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \longrightarrow \operatorname{Ad}^2(\widetilde{T}), \qquad \xi_2^* : \operatorname{Ext}^1(\mathcal{E}^*,\mathcal{E}^*) \longrightarrow \operatorname{Ad}^2(T)$$

les applications composées du lemme 7.2.1.

7.2.2. Proposition : *On a* $\xi_2^* = -\xi_2$, *compte tenu des identifications* $\mathrm{Ext}^2(T,T) \simeq \mathrm{Ext}^2(\widetilde{T},\widetilde{T})$, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \simeq \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*,\mathcal{E}^*)$.

Démonstration. On utilise les notations de 6.4. On choisit comme précédemment des résolutions localement libres suffisamment "négatives" :

$$\cdots F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} F \longrightarrow 0$$

$$\cdots G_2 \xrightarrow{g_2} G_1 \xrightarrow{g_1} G_0 \xrightarrow{g_0} G \longrightarrow 0$$

$$\cdots F'_2 \xrightarrow{f'_2} F'_1 \xrightarrow{f'_1} F'_0 \xrightarrow{f'_0} F^* \longrightarrow 0$$

$$\cdots G'_2 \xrightarrow{g'_2} G'_1 \xrightarrow{g'_1} G'_0 \xrightarrow{g'_0} G^* \longrightarrow 0$$

de telle sorte que les extensions larges soient construites comme dans 6.4 et qu'on ait des résolutions localement libres

$$\cdots F'_2 \oplus G_2 \xrightarrow{\delta_2^*} F'_1 \oplus G_1 \xrightarrow{\delta_1^*} F'_0 \oplus G_0 \xrightarrow{\delta_0^*} \mathcal{E}^* \longrightarrow 0$$

$$\cdots G'_2 \oplus F_2 \xrightarrow{\delta_2} G'_1 \oplus F_1 \xrightarrow{\delta_1} G'_0 \oplus F_0 \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

à partir desquelles les $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E},-)$ et $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E}^*,-)$ puissent être construits (cf. 4.6). Rappelons que pour $i>0$, δ_i^* provient d'une matrice

$$\begin{pmatrix} f'_i & \sigma_i^{0*} \\ 0 & g_i \end{pmatrix} \quad , \qquad \sigma_i^{0*} : G_i \longrightarrow F'_{i-1},$$

et δ_i d'une matrice

$$\begin{pmatrix} g'_i & \sigma_i^{0} \\ 0 & f_i \end{pmatrix} \quad , \qquad \sigma_i^{0*} : F_i \longrightarrow G'_{i-1}.$$

On a aussi $\sigma_1 = g'_0 \circ \sigma_1^0$, $\sigma_1^* = f'_0 \circ \sigma_1^{0*}$.

Étape 1. On montre d'abord que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*,\mathcal{E}^*) \arrow[d, "g"] \\
\mathrm{Ext}^1(G^*,\mathcal{E}) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*,G^{**}) & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*,G) \arrow[l, "h"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Soit $u \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$, provenant de $u_1 : G'_1 \oplus F_1 \longrightarrow \mathcal{E}$. D'après 4.5, on peut supposer qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(D_0) & G'_1 \oplus F_1 \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "u_1"] & G'_0 \oplus F_0 \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[d, "u_1^*"] \\
& \mathcal{E} \arrow[r, "{}^t\delta_0^*"] & F_0'^* \oplus G_0^* \arrow[r] & F_1'^* \oplus G_1^*
\end{tikzcd}$$

et ${}^tu_1^* : F'_1 \oplus G_1 \to \mathcal{E}^*$ représente u, vu comme élément de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*,\mathcal{E}^*)$. D'autre part, $f(u)$ est représenté par $u_{1|G'_1} : G'_1 \to F_1$, et $g(u)$ par le morphisme composé

$$\phi : F'_1 \oplus G_1 \xrightarrow{{}^tu_1^*} \mathcal{E}^* \longrightarrow G.$$

D'après 4.5, pour vérifier que $h \circ g(u) = f(u)$ il suffit de trouver un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
G'_1 \arrow[r, "g'_1"] \arrow[d, "u_{1|G'_1}"'] & G'_0 \arrow[r, "g'_0"] \arrow[d] & G^* \arrow[d, "{}^t\phi"] \\
\mathcal{E} \arrow[r, "{}^t\delta_0^*"] & F'^*_0 \oplus G_0^* \arrow[r, "{}^t\delta_1^*"] & F'^*_1 \oplus G_1^*
\end{tikzcd} .$$

Mais un tel diagramme découle aisément du diagramme précédent (D_0).

Il suffit donc de montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(G^*, \mathcal{E}) \arrow[d, "A_0"] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*, G) \arrow[l, "h"] \arrow[d, "A'_0"] \\
\mathrm{Ext}^1(G^*, F) \arrow[d, "B"] & \mathrm{Ext}^1(F^*, G) \arrow[d, "B'"] \\
\mathrm{Hom}(G^*, T) \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Hom}(F^*, \widetilde{T}) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{Ext}^2(\widetilde{T}, G^{**}) \arrow[d, "C"] & \mathrm{Ext}^2(T, F^{**}) \arrow[d, "C'"] \\
\mathrm{Ext}^2(\widetilde{T}, \widetilde{T}) \arrow[r, equal] & \mathrm{Ext}^2(T, T)
\end{tikzcd}$$

où les flèches proviennent de (L), (L^*), π et ρ est commutatif.

Étape 2 . On part de $v \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*, G)$, représenté par un morphisme

$$(\lambda, \gamma) : F'_1 \oplus G_1 \longrightarrow G$$

s'annulant sur $\mathrm{Im}(\delta_2^*)$. D'après 4.5, on peut supposer qu'il existe un diagramme commutatif

$$(D_1) \qquad \begin{tikzcd}
F'_1 \oplus G_1 \arrow[r, "\delta_1^*"] \arrow[d, "(\lambda,\gamma)"] & F'_0 \oplus G_0 \arrow[r, "\delta_0^*"] \arrow[d, "(\epsilon_0,\chi_0)"] & \mathcal{E}^* \arrow[d, "\theta"] \\
G^{**} \arrow[r, "{}^tg'_0"] & G'^*_0 \arrow[r, "{}^tg'_1"] & G'^*_1
\end{tikzcd}$$

et ${}^t\theta : G'_1 \to \mathcal{E}$ s'annule sur $\mathrm{Im}(g'_2)$ et représente $h(v)$.

D'autre part, $\lambda : F'_1 \to G^{**}$ s'annule sur $\mathrm{Im}(f'_2)$ et représente $A'_0(v)$, $A_0 \circ h(v)$ est représenté par le morphisme composé $\mu : G'_1 \xrightarrow{{}^t\theta} \mathcal{E} \xrightarrow{p} G^{**}$.

Étape 3 . Puisque $\mathrm{Ext}^1(F^*, G^*) = \mathrm{Ext}^1(G^*, F^*) = \{0\}$, il existe des diagrammes commutatifs étendant λ et μ

$$\begin{tikzcd}
F'_1 \arrow[r, "f'_1"] \arrow[d, "\lambda"] & F'_0 \arrow[r, "f'_0"] \arrow[d, "\lambda_0"] & F^* \arrow[d, "\overline{\lambda}"] \\
G \arrow[r, hook] & G^{**} \arrow[r, "\rho"] & \widetilde{T}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
G'_1 \arrow[r, "g'_1"] \arrow[d, "\mu"] & G'_0 \arrow[r, "g'_0"] \arrow[d, "\mu_0"] & G^* \arrow[d, "\overline{\mu}"] \\
F \arrow[r, hook] & F^{**} \arrow[r, "\pi"] & T
\end{tikzcd}$$

et on a $\overline{\lambda} = B'\circ A'_0(v)$, $\overline{\mu} = B\circ A_0\circ h(v)$. D'après (D_1) et les deux diagrammes précédents, on a $\epsilon_0 f'_1 = {}^tg'_0\lambda = {}^tg'_0\lambda_0 f'_1$. Donc $(\epsilon_0 - {}^tg'_0\lambda_0)f'_1 = 0$. Il existe donc un morphisme $\psi : F^* \to {G'_0}^*$ tel que $\epsilon_0 - {}^tg'_0\lambda_0 = \psi f'_0$. On peut alors prendre $\mu_0 = {}^t\psi$, car ${}^tf'_0{}^t\psi g'_1 = ({}^t\epsilon_0 - {}^t\lambda_0 g'_0)g'_1 = {}^t\epsilon_0 g'_1 = {}^t\mu$. On peut donc supposer qu'on a $\epsilon_0 = {}^tg'_0\lambda_0 + {}^t\mu_0 f'_0$.

Étape 4 . On utilise maintenant les résolutions canoniques de T et $\widetilde{T}$ (cf. la fin de 6.4). On va montrer qu'il existe un morphisme $\mu' : G^* \longrightarrow \ker({}^tg_2)$ tel que $\pi'\circ\mu' = \overline{\mu}$.

D'après la construction des extensions (cf. 4.2) il existe un diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\sigma_1^*"] & G_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d] & G \arrow[d, equal] \\
F^* \arrow[r] & \mathcal{E}^* \arrow[r] & G
\end{tikzcd}$$

En le dualisant on obtient le diagramme commutatif avec lignes exactes suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G^* \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & \mathcal{E} \arrow[r, "p"] \arrow[d] & F^{**} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "{}^t\sigma_1^*"] & T \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & G^* \arrow[r, "{}^tg_0"] & G_0^* \arrow[r, "{}^tg_1"] & \ker({}^tg_2) \arrow[r, "\pi'"] & T \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Cela prouve que les deux suites exactes de ce diagramme induisent le même élément de $\mathrm{Ext}^2(T, G^*)$ (c'est en fait évidemment ρ). Ceci prouve que le diagramme suivant, où les flèches sont induites par le diagramme précédent, est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(G^*, T) \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "B^{-1}"] & \mathrm{Ext}^1(G^*, G_0^*/G^*) \arrow[d, "\nu'"] \\
\mathrm{Ext}^1(G^*, F) \arrow[r, "\eta"] & \mathrm{Ext}^2(G^*, G^*)
\end{tikzcd}$$

On a $\eta(B^{-1}(\overline{\mu})) = 0$ (car $B^{-1}(\overline{\mu})$ provient de $\mathrm{Ext}^1(G^*, \mathcal{E})$). Donc on a $\nu'\circ\nu(\overline{\mu}) = 0$. Mais ν' est injective, car $\mathrm{Ext}^1(G^*, G_0^*) = \{0\}$ (les résolutions sont suffisamment "négatives"). Donc $\nu(\overline{\mu}) = 0$. Ceci prouve l'existence de μ'.

On montre de même qu'il existe un morphisme $\lambda' : F^* \longrightarrow F_1^*$ tel que $\rho'\circ\lambda' = \overline{\lambda}$. Ici la situation est légèrement différente, car ${B'}^{-1}(\overline{\lambda})$ provient de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*, G)$, et il faudrait qu'il provienne de $\mathrm{Ext}^1(F^*, \mathcal{E}^*)$. Mais on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*, \mathcal{E}^*) \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "g"] & \mathrm{Ext}^1(F^*, \mathcal{E}^*) \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*, G) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(F^*, G)
\end{tikzcd}$$

où g est surjective d'après la proposition 7.3.2. Donc si ${B'}^{-1}(\overline{\lambda})$ provient de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*, G)$, il provient aussi de $\mathrm{Ext}^1(F^*, \mathcal{E}^*)$.

Étape 5 . Il découle de ce qui précède que $C\circ B\circ A_0\circ h(v)$ est représenté par $\mu' : G^* \longrightarrow \ker({}^tg_2)$ compte tenu de la résolution de T

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & G^* \arrow[r, "{}^tg_0"] & G_0^* \arrow[r, "{}^tg_1"] & \ker({}^tg_2) \arrow[r, "\pi'"] & T \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \ ,$$

et $C'\circ B'\circ A_0'(v)$ est représenté par $\lambda' : F^* \longrightarrow F_1^*$ compte tenu de la résolution de T

$$\begin{tikzcd} \cdots F_2 \arrow[r, "f_2"] & F_1 \arrow[r, "f_1"] & F_0 \arrow[r, "F_0"] & F^{**} \arrow[r, "\pi"] & T \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \ .$$

On utilise maintenant le diagramme commutatif défini à la fin de 6.4

$$\begin{tikzcd} F_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\sigma_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\alpha"] & F^{**} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "{}^t\sigma_1^*"] & T \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & G^* \arrow[r, "{}^tg_0"] & G_0^* \arrow[r, "{}^tg_1"] & \ker({}^tg_2) \arrow[r, "\pi'"] & T \end{tikzcd}$$

Il suffit donc de trouver des morphismes $H : F_1 \to G_0^*$, $K : F_0 \to G_1^*$ tels que ${}^t\sigma_1^{*t}\lambda' + \mu'\sigma_1 = Kf_1 + {}^tg_1H$, ou ce qui revient au même $\lambda'\sigma_1^* + {}^t\sigma_1{}^t\mu' = {}^tf_1{}^tK + {}^tHg_1$.

Étape 6 . On a

$$\begin{aligned} \rho'({}^t\sigma_1^0({}^tg_0'\lambda_0)\sigma_1^{0*} - \lambda'\sigma_1^*) &= \rho'({}^t\sigma_1\lambda_0 - \lambda' f_0')\sigma_1^{0*} \\ &= (\rho\lambda_0 - \overline{\lambda}f_0')\sigma_1^{0*} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc ${}^t\sigma_1^0({}^tg_0'\lambda_0)\sigma_1^{0*} - \lambda'\sigma_1^*$ est à valeurs dans $\ker(\rho') = \mathrm{Im}({}^tf_1)$. Puisque $\mathrm{Ext}^1(G_1, F^*) = \{0\}$, on peut écrire

$${}^t\sigma_1^0({}^tg_0'\lambda_0)\sigma_1^{0*} - \lambda'\sigma_1^* \ = \ {}^tf_1X,$$

avec $X : G_1 \to F_0^*$. De même, on a

$$\pi'({}^t\sigma_1^{0*}({}^tf_0'\mu_0)\sigma_1^0 - \mu'\sigma_1) \ = \ 0,$$

donc puisque $\mathrm{Ext}^1(F_1, G^*) = \{0\}$, on peut écrire

$${}^t\sigma_1^{0*}({}^tf_0'\mu_0)\sigma_1^0 - \mu'\sigma_1 \ = \ {}^tg_1Y,$$

avec $Y : F_1 \to G_0^*$, c'est-à-dire

$${}^t\sigma_1^0({}^t\mu_0f_0')\sigma_1^{0*} - {}^t\sigma_1{}^t\mu' \ = \ {}^tYg_1.$$

On a donc

$$\lambda'\sigma_1^* + {}^t\sigma_1{}^t\mu' \ = \ {}^t\sigma_1^0\epsilon_0\sigma_1^{0*} - {}^tf_1X - {}^tYg_1$$

(cf. la fin de l'étape 3).

Il suffit donc de montrer qu'il existe des morphismes $H' : G_0 \to F_1^*$ et $K' : G_1 \to F_0^*$ tels que

$${}^t\sigma_1^0\epsilon_0\sigma_1^{0*} \ = \ {}^tf_1K' + H'g_1.$$

On utilise maintenant le diagramme commutatif (D_1) et celui de la fin de l'étape 5. Puisque $\mathrm{Ext}^1(G_1, \ker(g_0)) = \{0\}$, il existe un morphisme $\gamma_0 : G_1 \to G_0$ tel que $\gamma = g_0\gamma_0$. On a alors

$$\begin{aligned} {}^t\sigma_1^0\epsilon_0\sigma_1^{0*} - {}^tf_1\alpha\gamma_0 &= {}^t\sigma_1^0\epsilon_0\sigma_1^{0*} - {}^t\sigma_1g_0\gamma_0 \\ &= {}^t\sigma_1^0\epsilon_0\sigma_1^{0*} - {}^t\sigma_1\gamma \\ &= {}^t\sigma_1^0(\epsilon_0\sigma_1^{0*} - {}^tg_0'\gamma) \\ &= -{}^t\sigma_1^0\chi_0g_1 \end{aligned}$$

(d'après le carré commutatif de gauche de (D_1)). On obtient finalement

$$ {}^t\sigma_1^0\epsilon_0\sigma_1^{0*} \ = \ {}^tf_1\alpha\gamma_0 - {}^t\sigma_1^0\chi_0 g_1, $$

ce qui démontre la proposition 7.2.2. □

7.3. Diagrammes 3x3 canoniques

On utilise les notations et résultats de 6.4. On s'intéresse à la structure induite sur $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$ par les suites exactes (L) et (L').

On note $A_2(\sigma)$ le noyau de la multiplication à gauche par σ

$$ \sigma\times \ : \mathrm{Ext}^1(G^*,F) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(F,F). $$

Si X est une surface $A_2(\sigma)$ est aussi le noyau de la multiplication à droite par σ

$$ \times\sigma \ : \mathrm{Ext}^1(G^*,F) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(G^*,G^*) $$

à cause du diagramme anticommutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(G^*,F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^2(F,F) \arrow[d, "tr_2(F)"] \\
\mathrm{Ext}^2(G^*,G^*) \arrow[r, "tr_2(G^*)"] & H^2(\mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

et du fait que $tr_2(F)$ et $tr_2(G^*)$ sont des isomorphismes.

On note $B_2(\sigma)$ le noyau de la multiplication à gauche par σ

$$ \sigma\times \ : \mathrm{Ext}^1(G^*,\mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(F,\mathcal{E}). $$

7.3.1. Lemme : *Si X est une surface, on a* $B_2(\sigma) = \mathrm{Ext}^1(G^*,\mathcal{E})$.

Démonstration. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^2(F,\mathcal{E}) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E}) \arrow[d, "tr_2(\mathcal{E})"] \\
\mathrm{Ext}^2(F,F) \arrow[r, "tr_2(F)"] & H^2(\mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

L'application f est un isomorphisme car $\mathrm{Ext}^2(F,G^*) = \{0\}$ et $tr_2(F)$ est un isomorphisme. On en déduit que g est injective, et le lemme découle du fait que le noyau de g est l'image de la multiplication à gauche par σ $\mathrm{Ext}^1(G^*,\mathcal{E}) \to \mathrm{Ext}^2(F,\mathcal{E})$. □

7.3.2. Proposition : *1 - L'application canonique*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(F,G^*)\oplus\mathbb{C} \arrow[r] & \mathrm{End}(\mathcal{E}) \\
(f,t) \arrow[r, mapsto] & i\circ f\circ p+tI_{\mathcal{E}}
\end{tikzcd}$$

est un isomorphisme, et $\mathrm{Hom}(G^*,\mathcal{E})=\mathrm{Hom}(\mathcal{E},F)=\mathbb{C}$.

2 - On a un diagramme 3x3 canonique

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(F,G^*)/\mathbb{C}\sigma \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},G^*) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(G^*,G^*) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(F,\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & B_2(\sigma) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(F,F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},F) \arrow[r] \arrow[d] & A_2(\sigma) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

3 - Si X est une surface, on a une suite exacte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^2(\mathcal{O}_X) \arrow[r, "j"] & \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E}) \arrow[r, "q"] & \mathrm{Ext}^2(G^*,F^{**}) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

j étant induit par l'inclusion $\mathcal{O}_X\subset\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{E}$, et q par (L). Cette suite exacte se scinde naturellement.

Démonstration. L'assertion 1 est immédiate. Démontrons 2. En considérant le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},G^*) \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h"] & \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E}) \arrow[d, "tr_2(\mathcal{E})"] \\
\mathrm{Ext}^2(G^*,G^*) \arrow[r, "tr_2(G^*)"] & H^2(\mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

on montre comme dans le lemme 7.3.1 que le morphisme $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})\to\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},F)$ est surjectif, en utilisant la lissité de G^*. Le diagramme 3x3 découle alors du diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & \\
\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},G^*) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(G^*,G^*) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(G^*,\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^2(F,\mathcal{E}) \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(G^*,F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^2(F,F) \arrow[d] \\
0 & \mathrm{Ext}^2(G^*,G^*) \arrow[r, equal] & H^2(\mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

L'assertion 3 est immédiate.

□

Posons

$$M=\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},G^*)\ \subset\ N=\mathrm{Ext}^1(G,\mathcal{E}^*)\ \subset\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}),$$
$$M_*=\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*,F^*)\ \subset\ N_*=\mathrm{Ext}^1(F,\mathcal{E})\ \subset\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}).$$

D'après la proposition 7.3.2, ces sous-espaces vectoriels s'insèrent dans les diagrammes 3x3 canoniques suivants

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(F,G^*)/\mathbb{C}\sigma \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(G^*,G^*) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_* \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & B_2(\sigma) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(F,F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},F) \arrow[r] \arrow[d] & A_2(\sigma) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(G,F^*)/\mathbb{C}\sigma^* \arrow[r] \arrow[d] & M_* \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(F^*,F^*) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*,\mathcal{E}^*) \arrow[r] \arrow[d] & B_2(\sigma^*) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(G,G) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*,G) \arrow[r] \arrow[d] & A_2(\sigma^*) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

7.3.3. Lemme : *Le quotient N/M (resp. N_*/M_*) s'identifie naturellement à un sous-espace vectoriel de* $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},T)$ *(resp.* $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}^*,\widetilde{T})$*), qui est* $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},T)$ *(resp.* $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}^*,\widetilde{T})$*) tout entier si X est une surface. On a des isomorphismes canoniques*

$$\begin{aligned}
M\cap N_* &\simeq \mathrm{Ext}^1(F,G^*)/\mathbb{C}\sigma \simeq \mathrm{Hom}(G^{**},\widetilde{T})/\mathbb{C}\rho,\\
M_*\cap N &\simeq \mathrm{Ext}^1(G,F^*)/\mathbb{C}\sigma^* \simeq \mathrm{Hom}(F^{**},T)/\mathbb{C}\pi,\\
\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})/(M+N_*) &\simeq A_2(\sigma),\\
\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})/(M_*+N) &\simeq A_2(\sigma^*).
\end{aligned}$$

Démonstration. Montrons que $N/M\subset\mathrm{Hom}(\mathcal{E},T)$. De la suite exacte

$$0\longrightarrow G\longrightarrow G^{**}\longrightarrow\widetilde{T}\longrightarrow 0$$

on déduit la suite exacte

$$\mathrm{Ext}^1(G^{**},\mathcal{E}^*)\hookrightarrow\mathrm{Ext}^1(G,\mathcal{E}^*)\longrightarrow\mathrm{Ext}^2(\widetilde{T},\mathcal{E}^*)\longrightarrow\mathrm{Ext}^2(G^{**},\mathcal{E}^*)\xrightarrow{f}\mathrm{Ext}^2(G,\mathcal{E}^*)$$

d'où l'inclusion découle. Si X est une surface, il faut montrer que f est injective. En utilisant le fait que

$$\mathrm{Ext}^i(G^{**},F^*)=\{0\}\quad\text{si } i\geq 1$$

et que T est de dimension 0, on voit que les applications canoniques

$$\mathrm{Ext}^2(G^{**},\mathcal{E}^*)\longrightarrow\mathrm{Ext}^2(G^{**},G),\qquad \mathrm{Ext}^2(G^{**},G)\longrightarrow\mathrm{Ext}^2(G^{**},G^{**})$$

induites par (L), (L^*) sont des isomorphismes. Mais puisque G^{**} est 2-lisse, l'application trace $tr_2(G^{**})$ est est un isomorphisme. Le fait que f est injective découle donc du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^2(G^{**},\mathcal{E}^*) \arrow[r] \arrow[dd, "f"] & \mathrm{Ext}^2(G^{**},G^{**}) \arrow[dr, "tr_2(G^{**})"] & \\
 & & H^2(\mathcal{O}_X) \\
\mathrm{Ext}^2(G,\mathcal{E}^*) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2(G,G) \arrow[ur, "tr_2(G)"] &
\end{tikzcd}$$

Le cas de N_*/M_* est semblable.

Les autres isomorphismes découlent des diagrammes précédents. $\square$

7.4. Quelques diagrammes commutatifs ou anticommutatifs

Les démonstrations de quelques uns des résultats suivants sont omises. Elles sont analogues à celles des propositions 7.1.1 et 7.2.2.

7.4.1. Proposition : *On considère le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^2(T,G^*) \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{Hom}(G^{**},\widetilde{T}) \arrow[dd, "\delta_0"] \\
\mathrm{Ext}^1(F,G^*) \arrow[u, "\delta_1"] \arrow[d, "a"] & \\
\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},G^*) = \mathrm{Ext}^1(G^{**},\mathcal{E}^*) \arrow[r, "b"] & \mathrm{Ext}^1(G^{**},G)
\end{tikzcd}$$

où δ_0, δ_1 sont les morphismes de liaison provenant des suites exactes longues provenant des suites exactes

$$0 \to G \to G^{**} \to \widetilde{T} \to 0, \qquad 0 \to F \to F^{**} \to T \to 0$$

respectivement, a étant induit par le morphisme $\mathcal{E} \to F$ et b par le morphisme $\mathcal{E}^* \to G$.

Alors ce diagramme est anticommutatif.

On a bien entendu un diagramme anti-commutatif analogue "dual" de celui de la proposition 7.4.1 :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^2(\widetilde{T}, F^*) \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{Hom}(F^{**}, T) \arrow[dd] \\
\mathrm{Ext}^1(G, F^*) \arrow[u] \arrow[d] & \\
\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*, F^*) = \mathrm{Ext}^1(F^{**}, \mathcal{E}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(F^{**}, F)
\end{tikzcd}$$

On utilisera en 7.5 la

7.4.2. Proposition : *On considère le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(F, \mathcal{E}) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "d"] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \simeq \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*, \mathcal{E}^*) \arrow[r, "A'"] & \mathrm{Ext}^1(F^*, G) \arrow[r, "B'"] & \mathrm{Hom}(F^*, \widetilde{T}) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{Ext}^1(F, F) \arrow[r, "f"] & \mathrm{Ext}^2(T, F) \arrow[rr, "g"] & & \mathrm{Ext}^2(T, F^{**})
\end{tikzcd}$$

où c et d proviennent de (L) et f de π. Alors ce diagramme est commutatif.

On a bien entendu un diagramme commutatif analogue "dual" de celui de la proposition 7.4.2 :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(G, \mathcal{E}^*) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*, \mathcal{E}^*) \simeq \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(G^*, F) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(G^*, T) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{Ext}^1(G, G) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2(\widetilde{T}, G) \arrow[rr] & & \mathrm{Ext}^2(\widetilde{T}, G^{**})
\end{tikzcd}$$

7.4.3. Proposition : *Le diagramme canonique*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(G^*, T) \arrow[r, "C_0"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Ext}^1(F, T) \arrow[dd, "D_0"] \\
\mathrm{Ext}^2(\widetilde{T}, G^{**}) \arrow[d, "C"] & \\
\mathrm{Ext}^2(\widetilde{T}, \widetilde{T}) \arrow[r, equal] & \mathrm{Ext}^2(T, T)
\end{tikzcd}$$

(où C_0 provient de (L) et D_0 de π) est commutatif.

Démonstration. On peut déduire ce résultat de la démonstration de la proposition 7.2.2 ou le démontrer directement de manière analogue. ☐

7.4.4. Proposition : *Si X est une surface, alors les applications ξ_2 et ξ_2^* sont surjectives.*

Démonstration. Il suffit de prouver que ξ_2 est surjective. Compte tenu de la définition de ξ_2 dans 7.2, cela découle du fait que l'image de A est $A_2(\sigma)$, B est un isomorphisme, et C est surjective, car $\operatorname{coker}(C) \subset \operatorname{Ext}^3(\widetilde{T}, G)$. ☐

7.4.5. Proposition : *Le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ext}^1(G^*, F) \arrow[r, "\times\sigma"] & \operatorname{Ext}^2(F, F) \arrow[rd, "tr_2(F)"] & \\
\operatorname{Hom}(G^*, T) \arrow[u, "B^{-1}"] \arrow[d, "\simeq"] & & H^2(\mathcal{O}_X) \\
\operatorname{Ext}^2(\widetilde{T}, G^{**}) \arrow[r, "C"] & \operatorname{Ext}^2(\widetilde{T}, \widetilde{T}) \arrow[ru, "tr_2(\widetilde{T})"] &
\end{tikzcd}$$

où $\times\sigma$ est la multiplication par σ est anticommutatif.

Démonstration. Cela découle du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ext}^1(G^*, F) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^2(F, F) \\
\operatorname{Hom}(G^*, T) \arrow[r] \arrow[u, "\simeq"] & \operatorname{Ext}^1(F, T) \arrow[u]
\end{tikzcd} ,$$

du diagramme anticommutatif

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ext}^1(F, T) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \operatorname{Ext}^2(F, F) \arrow[d, "tr_2(F)"] \\
\operatorname{Ext}^2(T, T) \arrow[r, "tr_2(T)"] & H^2(\mathcal{O}_X)
\end{tikzcd} ,$$

de la compatibilité de l'isomorphisme $\operatorname{Ext}^2(T, T) \simeq \operatorname{Ext}^2(\widetilde{T}, \widetilde{T})$ avec la trace, et du diagramme commutatif canonique

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ext}^2(T, G^*) \otimes \operatorname{Hom}(G^*, T) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \operatorname{Ext}^2(T, T) \arrow[d, equal] \\
\operatorname{Hom}(G^{**}, \widetilde{T}) \otimes \operatorname{Ext}^2(\widetilde{T}, G^{**}) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^2(\widetilde{T}, \widetilde{T})
\end{tikzcd}$$

(cf. la fin de 2.7). ☐

7.4.6. Corollaire : *Le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^2(\widetilde{T}, G^{**}) \arrow[r, "\overline{\rho}"] & \mathrm{Ext}^2(G^{**}, G^{**}) \arrow[dd, equal] \\
\mathrm{Hom}(G^*, T) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[d, "\simeq"'] & \\
\mathrm{Ext}^1(G^*, F) \arrow[r, "\delta_{G^*}"] & \mathrm{Ext}^2(G^*, G^*)
\end{tikzcd}$$

où $\overline{\rho}$ provient de ρ et δ_{G^*} de (L) est commutatif.

Démonstration. Cela découle de la proposition 7.4.5, des diagrammes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(G^*, F) \arrow[r, "\delta_{G^*}"] \arrow[d, "\delta_F"] & \mathrm{Ext}^2(G^*, G^*) \arrow[d, "tr_2(G^*)"] \\
\mathrm{Ext}^2(F, F) \arrow[r, "tr_2(F)"] & H^2(\mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^2(\widetilde{T}, G^{**}) \arrow[r, "\overline{\rho}"] \arrow[d, "C"] & \mathrm{Ext}^2(G^{**}, G^{**}) \arrow[d, "tr_2(G^{**})"] \\
\mathrm{Ext}^2(\widetilde{T}, \widetilde{T}) \arrow[r, "tr_2(\widetilde{T})"] & H^2(\mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

dont le premier est anticommutatif et le second commutatif, et de la lissité de G^*. □

7.5. Sous-espaces vectoriels canoniques de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$

On a des morphismes canoniques injectifs évidents

$$\mathrm{End}(T)/\mathbb{C}I_T \longrightarrow \mathrm{Hom}(F^{**}, T)/\mathbb{C}\pi, \qquad \mathrm{End}(\widetilde{T})/\mathbb{C}I_{\widetilde{T}} \longrightarrow \mathrm{Hom}(G^{**}, \widetilde{T})/\mathbb{C}\rho,$$

et $\mathrm{End}(T)$ et $\mathrm{End}(\widetilde{T})$ sont canoniquement isomorphes. On verra donc $\mathrm{End}(T)$ comme un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}(F^{**}, T)$ et $\mathrm{Hom}(G^{**}, \widetilde{T})$, et $\mathrm{End}(T)/\mathbb{C}$ comme un sous-espace vectoriel de $M \cap N_*$ et $M_* \cap N$. Le fait que ces deux sous-espaces vectoriels coïncident dans $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ découle de la proposition 7.1.1.

7.5.1. Proposition : *1 - Le diagramme canonique*

$$\begin{tikzcd}
M = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, G^*) \arrow[dr, hook] \arrow[ddd, "\simeq"] & & \\
& N = \mathrm{Ext}^1(G, \mathcal{E}^*) \arrow[dr] & \\
& & \mathrm{Ext}^1(G, G) \\
\mathrm{Ext}^1(G^{**}, G) \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

(ou la flèche verticale provient de $\ {}^t i : \mathcal{E}^* \to G$*) est commutatif. De même, le diagramme canonique*

$$\begin{tikzcd}
M_* = \operatorname{Ext}^1(\mathcal{E}^*, F^*) \arrow[dr, hook] \arrow[ddd, "\simeq"] & & \\
& N_* = \operatorname{Ext}^1(F, \mathcal{E}) \arrow[dr] & \\
& & \operatorname{Ext}^1(F, F) \\
\operatorname{Ext}^1(F^{**}, F) \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

(ou la flèche verticale provient de $\ p : \mathcal{E} \to F$*) est commutatif.*

2 - Soit $\ Q \subset N\ $ *l'image réciproque (par le morphisme canonique* $\ N \to \operatorname{Ext}^1(G,G)$*) de l'image de* $\operatorname{Ext}^1(G^{**}, G)$ *dans* $\operatorname{Ext}^1(G,G)$*. Alors on a* $\ M \subset Q$*,* $\ M_* \cap Q = M_* \cap N\ $ *et* $Q = M + M_* \cap N$*.*

De même, Soit $\ Q_* \subset N_*\ $ *l'image réciproque (par le morphisme canonique* $\ N_* \to \operatorname{Ext}^1(F,F)$*) de l'image de* $\operatorname{Ext}^1(F^{**}, F)$ *dans* $\operatorname{Ext}^1(F,F)$*. Alors on a* $\ M_* \subset Q_*$*,* $\ M \cap Q_* = M \cap N_*\ $ *et* $Q_* = M_* + M \cap N_*$*.*

3 - On a $\ M \cap M_* = \operatorname{End}(T)/\mathbb{C}\ $ *et* $\ Q + M_* = Q_* + M = M + M_*$*.*

4 - On a $\ Q \cap Q_* = M_* \cap N + M \cap N_*$ *.*

Démonstration. 1- découle aisément de l'associativité des Ext.

Démontrons 2-. Il est clair que $M \subset Q$. La seconde assertion découle du fait que le noyau de $N \to \operatorname{Ext}^1(G,G)$ est $M_* \cap N$, et la troisième de 1-.

L'assertion sur Q_* se démontre de la même façon.

La dernière assertion de 3- découle immédiatement de 2-. Il reste à montrer que
$M \cap M_* = \operatorname{End}(T)/\mathbb{C}$. D'après le lemme 5.3.1 et ce qui précède on a un diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{End}(T)/\mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, "j"] & M \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & \operatorname{Ext}^1(G^{**}, G)/(\operatorname{End}(T)/\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_* \cap N \arrow[r] \arrow[d, equal] & Q \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & \operatorname{Ext}^1(G^{**}, G)/(\operatorname{End}(T)/\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_* \cap N \arrow[r] & N \arrow[r, two heads] & \operatorname{Ext}^1(G, G) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où j est injectif. D'après la proposition 7.1.1 et la proposition 7.4.1, pour tout $\ \theta \in \operatorname{End}(T)$, si $\overline{\theta}$ est l'image de θ dans $\operatorname{End}(T)/\mathbb{C}$, $j(\overline{\theta})$ est l'image de $-\theta \circ \pi$ dans $\ M_* \cap N = \operatorname{Hom}(F^{**}, T)/\mathbb{C}$. La première assertion de 3- en découle immédiatement.

L'assertion 4- découle immédiatement de 2-. □

Le sous-espace vectoriel $Q+M_*=Q_*+M=M+M_*$ de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$ correspond aux déformations de $\mathcal{E}$ qui proviennent des déformations de l'extension large $0\to G^*\to\mathcal{E}\to F\to 0$ lorsque T reste fixe, et Q (resp. Q_*) correspond aux déformations de l'extension large lorsque seuls G^{**} (resp. F^{**}), ρ et π bougent.

7.5.2. Proposition : *Soit* $P\subset N$ *l'image réciproque (par le morphisme canonique* $N\to\mathrm{Ext}^1(G,G)$*) de l'image de* $\mathrm{Hom}(G,\widetilde{T})$ *dans* $\mathrm{Ext}^1(G,G)$*. Soit* $P_*\subset N_*$ *l'image réciproque (par le morphisme canonique* $N_*\to\mathrm{Ext}^1(F,F)$*) de l'image de* $\mathrm{Hom}(F,T)$ *dans* $\mathrm{Ext}^1(F,F)$*. On voit* P *et* P_* *comme des sous-espaces vectoriels de* $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$*. Alors on a*

$$P \;=\; P_* \;=N\cap N_*,$$

$$P\cap(M+M_*) \;=\; P\cap Q \;=\; P\cap Q_* \;=\; Q\cap Q_* \;=\; M\cap N_*+M_*\cap N,$$

et des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}(F,T)\;\simeq\;(N\cap N_*)/(M\cap N_*),\qquad \mathrm{Hom}(G,\widetilde{T})\;\simeq\;(N\cap N_*)/(M_*\cap N).$$

Démonstration. On montre d'abord que $P\subset N_*$. Il suffit de montrer que l'image de P par le morphisme canonique $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})\to\mathrm{Ext}^1(G^*,\mathcal{E})$ est nulle.

L'image de $\mathrm{Hom}(G,\widetilde{T})$ dans $\mathrm{Ext}^1(G,G)$ est exactement le noyau de l'application canonique $\mathrm{Ext}^1(G,G)\to\mathrm{Ext}^1(G,G^{**})$. L'assertion découle alors du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(G,\mathcal{E}^*) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*,\mathcal{E}^*) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*,G^{**})=\mathrm{Ext}^1(G^*,\mathcal{E}) \\
\mathrm{Ext}^1(G,G) \arrow[rr] & & \mathrm{Ext}^1(G,G^{**}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

déduit de l'associativité des Ext.

On a donc $P\subset N\cap N_*$. Montrons maintenant que $N\cap N_*\subset P$. Cela découle du diagramme commutatif déduit de l'associativité des Ext

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(G,\mathcal{E}^*) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*,\mathcal{E}^*)=\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \arrow[dd] \\
\mathrm{Ext}^1(G,G) \arrow[d] & \\
\mathrm{Ext}^1(G,G^{**}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(G^*,\mathcal{E})=\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*,G^{**})
\end{tikzcd}$$

et du fait que la flèche horizontale du bas est injective, car $\mathrm{Hom}(F^*,G^{**})=\{0\}$.

On a donc $P=N\cap N_*$. De même on a aussi $P_*=N\cap N_*$. Une autre démonstration découlera de celle de la proposition 7.5.4.

La seconde assertion de la proposition 7.5.2 découle aisément de la première et de la proposition 7.5.1, et la dernière est une conséquence de la première et des définitions de P et P_*. $\square$

Le sous-espace vectoriel P de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$ correspond aux déformations de l'extension large $0 \to G^* \to \mathcal{E} \to F \to 0$ lorsque F^{**} et G^{**} restent fixes.

7.5.3. Proposition : *On a* $N + N_* \ = \ \ker(\xi_2) \ = \ \ker(\xi_2^*)$.

(ξ_2 et ξ_2^* sont définis en 7.2).

Démonstration. On reprend les notations de 7.2. Le noyau de $A' : \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(F^*,G)$ est $N + M_*$. Donc $\xi_2^*(N + M_*) = \{0\}$. D'autre part, on a d'après la proposition 7.4.2

$$\xi_2^*(N) \ = \ C' \circ g \circ f \circ d(N) \ = \ \{0\}$$

car $C' \circ g = 0$. On a donc $N + N_* \ \subset \ \ker(\xi_2^*)$. L'inclusion inverse provient du diagramme de la proposition 7.4.2 et de la surjectivité de d et f (d'après le lemme 5.3.1). On a donc $\ker(\xi_2^*) = N + N_*$. On a de même $\ker(\xi_2) = N + N_*$. ☐

Rappelons qu'on a d'après le lemme 7.3.3 des inclusions canoniques

$$N/M \ \subset \ \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, T), \qquad N_*/M_* \ \subset \ \mathrm{Hom}(\mathcal{E}^*, \widetilde{T}).$$

Soient $P_0 \subset N$ l'image réciproque de $\mathrm{Hom}(F,T) \subset \mathrm{Hom}(\mathcal{E},T)$, et $P_0^* \subset N_*$ l'image réciproque de $\mathrm{Hom}(G,\widetilde{T}) \subset \mathrm{Hom}(\mathcal{E}^*,\widetilde{T})$.

7.5.4. Proposition : *Soient*

$$s_P : P \longrightarrow \mathrm{Hom}(G,\widetilde{T}), \qquad s_{P_*} : P_* = P \longrightarrow \mathrm{Hom}(F,T)$$

les projections (définies par les surjections $N \to \mathrm{Ext}^1(G,G)$*,* $N_* \to \mathrm{Ext}^1(F,F)$ *respectivement), et*

$$s_{P_0} : P_0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(F,T), \qquad s_{P_0^*} : P_0^* \longrightarrow \mathrm{Hom}(G,\widetilde{T})$$

les projections canoniques. Alors on a $P = P_0 \cap P_0^*$*, et les diagrammes suivants*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rd, "s_P"] \arrow[dd, hook, "P_0^*"'] & \\
& \mathrm{Hom}(G,\widetilde{T}) \\
P_0^* \arrow[ru, "s_{P_0^*}"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P \arrow[rd, "s_{P_*}"] \arrow[dd, hook, "P_0"'] & \\
& \mathrm{Hom}(F,T) \\
P_0 \arrow[ru, "s_{P_0}"] &
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs.

Démonstration. On utilise les résultats et notations de 6.4. Soit $\nu \in \mathrm{Ext}^1(F,\mathcal{E}) = N_*$, représenté par un morphisme $\nu_1 : F_1 \to \mathcal{E}$ s'annulant sur $\mathrm{Im}(f_2)$. L'image ν' de ν dans $\mathrm{Ext}^1(F,F)$ est représentée par $p\nu_1 : F_1 \to F$. Supposons que $\nu' \in \mathrm{Hom}(F,T)$. Ceci équivaut à dire que l'image de ν' dans $\mathrm{Ext}^1(F,F^{**})$ est nulle. Cette image est représentée par le composé

$$\nu_1'' : F_1 \xrightarrow{\nu_1'} F \hookrightarrow F^{**}$$

Il existe donc $\nu_0 : F_0 \to F^{**}$ tel que $\nu_1'' = \nu_0 f_1$. On a alors $\nu_0(\mathrm{Im}(f_1)) \subset F$, donc ν_0 induit un morphisme $\overline{\nu} : F \to T$ tel qu'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
F_0 \arrow[r, "\nu_0"] \arrow[d, "f_0"] & F^{**} \arrow[d, "\pi"] \\
F \arrow[r, "\overline{\nu}"] & T
\end{tikzcd}$$

et on a $\overline{\nu} = \nu'$. On considère la résolution de $\mathcal{E}$

$$\cdots F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{(f_1,\sigma_1)} F_0 \oplus G^* \xrightarrow{\epsilon_0} \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

et la résolution de $\mathcal{E}^*$ (cf. la démonstration de la proposition 7.2.2)

$$\cdots F_2' \oplus G_2 \xrightarrow{\delta_2^*} F_1' \oplus G_1 \xrightarrow{\delta_1^*} F_0' \oplus G_0 \xrightarrow{\delta_0^*} \mathcal{E}^* \longrightarrow 0$$

Soit $\eta_1 = (\gamma_1, \psi_1) : F_1' \oplus G_1 \to \mathcal{E}^*$ un morphisme s'annulant sur $\mathrm{Im}(\delta_2^*)$ représentant ν, vu comme élément de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}^*, \mathcal{E}^*)$. C'est un élément de $\mathrm{Ext}^1(G, \mathcal{E}^*)$ d'après la proposition 7.5.2. On peut donc supposer que $\gamma_1 = 0$. D'après 4.5 on peut supposer qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
F_1 \arrow[r, "{(f_1,\sigma_1)}"] \arrow[d, "\nu_1"] & F_0 \oplus G^* \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, "\Theta"] & \mathcal{E} \arrow[d, "{}^t\eta_1"] \\
\mathcal{E} \arrow[r, "{}^t\delta_0^*"] & F_0'^* \oplus G_0^* \arrow[r, "{}^t\delta_1^*"] & F_1'^* \oplus G_1^*
\end{tikzcd}$$

Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de Θ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & w \end{pmatrix}$ celle de ${}^t\eta_1\delta_0 : F_0 \oplus G^* \to F_1'^* \oplus G_1^*$. Du diagramme commutatif précédent on déduit ${}^tf_1'a = 0$, ${}^tf_1'b = 0$. Donc b se factorise

$$b : G^* \longrightarrow F^{**} \xrightarrow{{}^tf_0'} F_0'^*$$

et comme $\mathrm{Hom}(G^*, F^{**}) = \{0\}$, on a $b = 0$. De même a se factorise

$$a : F_0 \xrightarrow{a_0} F^{**} \xrightarrow{{}^tf_0'} F_0'^* \ .$$

On en déduit le diagramme commutatif

$$(E) \qquad \begin{tikzcd}
F_1 \arrow[r, "{(f_1,\sigma_1)}"] \arrow[d, "\nu_1"] & F_0 \oplus G^* \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, "\Theta'"] & \mathcal{E} \arrow[d, "{}^t\eta_1"] \\
\mathcal{E} \arrow[r, hook] & F^{**} \oplus G_0^* \arrow[r, "{({}^t\sigma_1^*, {}^tg_1)}"] & G_1^*
\end{tikzcd}$$

où Θ' a pour matrice $\begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ et ${}^t\eta_1\delta_0 = (v, w)$. De (E) on déduit que $w = {}^tg_1 d$. Il en découle que l'image de ν (vu comme élément de $\mathrm{Ext}^1(G, \mathcal{E}^*)$) dans $\mathrm{Ext}^1(G, G)$ appartient à $\mathrm{Hom}(G, \widetilde{T})$, et que le morphisme $\overline{\eta} : G \to \widetilde{T}$ correspondant est induit par ${}^td$, c'est-à-dire qu'on a ${}^td(\mathrm{Im}(g_1)) \subset G$, et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
G^0 \arrow[r, "{}^td"] \arrow[d, two heads] & G^{**} \arrow[d, two heads, "\rho"] \\
G \arrow[r, "\overline{\eta}"] & \widetilde{T}
\end{tikzcd}$$

On retrouve ainsi le résultat de la proposition 7.5.2.

De (E) on déduit aussi que $\nu_0 f_1 = a_0 f_1$, donc on peut écrire $a_0 = \nu_0 + tjf_0$, où $t \in \mathbb{C}$ et j est l'inclusion $F \subset F^{**}$. On considère maintenant l'image ν'' de ν par le morphisme

$$\mathrm{Ext}^1(G, \mathcal{E}^*) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(\widetilde{T}, \mathcal{E}^*) = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, T)$$

induit par ρ. Elle provient de ${}^t\eta_1$ compte tenu de la résolution de T

$$G^* \xrightarrow{{}^tg_0} G_0^* \xrightarrow{{}^tg_1} \ker({}^tg_2) \xrightarrow{\pi'} T \longrightarrow 0$$

(c'est-à-dire que $\nu' = \pi'{}^t\eta_1$). L'image de ν'' dans $\mathrm{Hom}(G^*, T)$ provient donc de ${}^tg_1 d : G^* \to G_1^*$, et est donc nulle. Donc $\nu'' \in \mathrm{Hom}(F, T)$. Cela montre déjà que $P \subset P_0$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
G_0^* \arrow[r, "{}^tg_1"] & \ker({}^tg_2) \arrow[r, "\pi'"] & T \\
G^* \arrow[u, "d"] \arrow[r, hook] & F_0 \oplus G^* \arrow[u, "{}^t\eta_1\delta_0"] \arrow[r, two heads] & F_0 \arrow[u, "\nu_0''"]
\end{tikzcd}$$

et ν'' est induit par ν_0'', et provient donc de $v : F_0 \to G_1^*$. On a d'après (E)

$$v \;=\; {}^t\sigma_1^* a_0 + {}^tg_1 c.$$

Donc ν'' provient de ${}^t\sigma_1^* a_1 : F_0 \to G_1^*$, et donc aussi de $a_0 : F_0 \to F^{**}$, compte tenu de l'autre résolution de T

$$\cdots F_1 \xrightarrow{f_1} F_1 \xrightarrow{f_0} F^{**} \xrightarrow{\pi} T \qquad 0$$

et de l'isomorphisme canonique entre les deux résolutions de T donné à la fin de 6.4.

Comme $a_0 = \nu_0 + tjf_0$, ν'' provient aussi de ν_0. On a donc $\nu'' = \overline{\nu}$. Ceci prouve que le second diagramme de la proposition 7.5.4 est commutatif. ☐

7.5.5. Corollaire : *On a* $\mathrm{Hom}(F, T) \subset N/M$ *et* $\mathrm{Hom}(G, \widetilde{T}) \subset N_*/M_*$*, compte tenu des inclusions* $N/M \subset \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, T)$*,* $N_*/M_* \subset \mathrm{Hom}(\mathcal{E}^*, \widetilde{T})$*.*

Démonstration. Cela découle du fait que s_P et s_{P_*} sont surjectives. ☐

7.6. Le tangent à l'espace des extensions

On pose

$$\mathbf{T} \;=\; \mathbf{T}(\pi,\rho) \;=\; P+M+M_* \;=\; (M+N_*)\cap(M_*+N).$$

On note H (resp. H_*) le noyau de l'application canonique

$$\mathrm{Hom}(G^*,T)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(F,T) \qquad (\text{resp. } \mathrm{Hom}(F^*,\widetilde{T})\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(G,\widetilde{T})\ )$$

(cf. prop. 7.4.5).

7.6.1. Proposition : *Le quotient* $(N+N_*)/\mathbf{T}$ *s'identifie naturellement à la somme directe d'un sous-espace vectoriel de* H *et d'un sous-espace vectoriel de* H_*.

Démonstration. Rappelons que N/M (resp. N_*/M_*) s'identifie naturellement à un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},T)$) (resp. $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}^*,\widetilde{T})$). On a un morphisme bien défini

$$\Phi : N/(M+N\cap N_*)\oplus N_*/(M_*+N\cap N_*)\longrightarrow (N+N_*)/\mathbf{T}$$

tel que $\Phi([n],[n_*])=[n+n_*]$ pour tous n, n' dans N, N_* respectivement. Il est clair que c'est un isomorphisme, compte tenu du fait que $P=N\cap N_*$ d'après la proposition 7.5.2. Il suffit donc de trouver des isomorphismes canoniques

$$N/(M+N\cap N_*)\simeq H, \qquad N_*/(M_*+N\cap N_*)\simeq H_*.$$

On ne définira que le premier, le second étant analogue. C'est une conséquence de la suite exacte

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}(F,T)\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{E},T)\longrightarrow \mathrm{Hom}(G^*,T)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(F,T)\longrightarrow 0$$

de la dernière assertion de la proposition 7.5.2 et du corollaire 7.5.5. □

7.6.2. Proposition : *Si* $\dim(X)\geq 3$ *et* $\mathrm{Hom}(G^*,T)=\mathrm{Hom}(F^*,\widetilde{T})=\{0\}$, *on a* $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})=\mathbf{T}$.

Démonstration. On a $\mathrm{Ext}^1(G^*,F)\simeq\mathrm{Hom}(G^*,T)=\{0\}$ et $\mathrm{Ext}^1(F^*,G)\simeq\mathrm{Hom}(F^*,\widetilde{T})=\{0\}$, donc $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})=N+M_*=N_*+M=N+N_*$ d'après 7.3. D'autre part on a aussi $N+N_*=\mathbf{T}$ d'après la proposition 7.6.1, ou la définition de $\mathbf{T}$ plus haut. □

Soient U, V, Z des variétés algébriques irréductibles réduites, $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ des familles de fibrés vectoriels 2-lisses sur X paramétrées par U, V respectivement. Soit $\mathcal{T}$ une famille de faisceaux parfaits de codimension 2 sur X paramétrée par Z, plate sur Z. On suppose que pour tous point fermés u, v, z de U, V, Z respectivement on a

$$\mathrm{Ext}^i(\mathbb{F}_u,\mathcal{T}_z)=\mathrm{Ext}^i(\mathbb{G}_v,\widetilde{\mathcal{T}}_z)=\{0\} \quad \text{si } i\geq 1.$$

On suppose aussi que les déformations semi-universelles des faisceaux $\mathcal{T}_z$ et $\widetilde{\mathcal{T}}_z$ sont réduites. Alors les faisceaux

$$\mathcal{H} \;=\; p_{U\times Z*}(\mathcal{H}om(p_U^\sharp(\mathbb{F}),p_Z^\sharp(\mathcal{T}))), \;\; \mathcal{K} \;=\; p_{U\times Z*}(\mathcal{H}om(p_V^\sharp(\mathbb{G}),p_Z^\sharp(\widetilde{\mathcal{T}})))$$

sont localement libres (cf. 2.6 pour les notations). Soient $\mathcal{H}_0$ l'ouvert de $\mathcal{H}$ vu comme variété algébrique correspondant aux morphismes surjectifs dont le noyau est un faisceau régulier, et $\mathcal{K}_0$ l'ouvert analogue de $\mathcal{K}$. Soient

$$\pi_{\mathbb{F}} : \mathcal{H}_0 \longrightarrow U \times Z, \qquad \pi_{\mathbb{G}} : \mathcal{K}_0 \longrightarrow V \times Z$$

les projections. On a des morphismes canoniques universels surjectifs de faisceaux cohérents sur $\mathcal{H}_0 \times X$ et $\mathcal{K}_0 \times X$ respectivement :

$$\Pi : (p_U \circ \pi_{\mathbb{F}})^\sharp(\mathbb{F}) \longrightarrow (p_T \circ \pi_{\mathbb{F}})^\sharp(\mathcal{T}), \qquad R : (p_V \circ \pi_{\mathbb{G}})^\sharp(\mathbb{G}) \longrightarrow (p_T \circ \pi_{\mathbb{G}})^\sharp(\widetilde{\mathcal{T}}).$$

Soient $\mathcal{F} = \ker(\Pi)$, $\mathcal{G} = \ker(R)$. Ce sont des familles plates de faisceaux réguliers sur X. On a une extension universelle sur $\mathcal{H}_0 \times \mathcal{K}_0 \times X$

$$0 \longrightarrow (p_V \circ \pi_{\mathbb{G}} \circ p_{\mathcal{K}_0})^\sharp(\mathbb{G}^*) \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow (p_U \circ \pi_{\mathbb{F}} \circ p_{\mathcal{H}_0})^\sharp(\mathcal{F}) \longrightarrow 0.$$

Soit W l'ouvert de $\mathcal{H}_0 \times \mathcal{K}_0$ correspondant aux extensions larges. On suppose qu'il est non vide. Soit

$$\mathbb{D} \ = \ R^1 p_{W*}(\mathbb{E}^* \otimes \mathbb{E}).$$

C'est un faisceau localement libre sur W. Soit $\mathbb{T}$ le sous-fibré vectoriel de $\mathbb{D}$ défini de la façon suivante : soit w un point fermé de W, qu'on peut voir comme une paire de morphismes

$$\pi : \mathbb{F}_u \longrightarrow \mathcal{T}_z, \qquad \rho : \mathbb{G}_v \longrightarrow \widetilde{\mathcal{T}}_z$$

où u, v, z sont les projections de w sur U, V, Z respectivement. Alors on a

$$\mathbb{T}_w \ = \ \mathbf{T}(\pi, \rho).$$

Le résultat suivant découle de 5.2, 3.5 et 7.5 :

7.6.3. Proposition : *Soit $w \in W$. Alors le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer de $\mathbb{E}$ au point w*

$$\omega_w : T_w W \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathbb{E}_w, \mathbb{E}_w)$$

est à valeurs dans $\mathbb{T}_w$. Soient u, v, z sont les projections de w sur U, V, Z respectivement. Si $\mathbb{F}$ est une déformation complète de $\mathbb{F}_u$, $\mathbb{G}$ une déformation complète de $\mathbb{G}_v$ et $\mathcal{T}$ une déformation complète de $\mathcal{T}_z$, alors l'image de ω_w est exactement $\mathbb{T}_w$.

On note $W(\pi, \rho)$ le noyau de l'application

$$A_2(\sigma) \oplus A_2(\sigma^*) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(T, T)$$

égale à la restriction de (θ, θ^*), où θ et θ^* sont respectivement les applications canoniques

$$\mathrm{Ext}^1(G^*, F) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(\widetilde{T}, \widetilde{T}), \qquad \mathrm{Ext}^1(F^*, G) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(T, T)$$

définies en 7.2. Soit

$$\Delta : \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \longrightarrow A_2(\sigma) \oplus A_2(\sigma^*)$$

l'application canonique. Des propositions 7.2.2 et 7.6.1 on déduit immédiatement la

7.6.4. Proposition : *On a* $\mathbf{T}=\ker(\Delta)$, $\Delta(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}))=W(\pi,\rho)$ *et* $\Delta(N+N_*)=\ker(\theta)\oplus\ker(\theta^*)$.

7.7. MORPHISMES À VALEURS DANS $\mathrm{Ext}^1(T,T)$

On a un morphisme canonique

$$\nu : P \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(G,\widetilde{T}) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1(G,G)$$

qui est la restriction à P du morphisme $N\to\mathrm{Ext}^1(G,G)$ de 7.3. Soit

$$\phi_{\widetilde{T}} : P \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\widetilde{T},\widetilde{T})$$

le morphisme composé

$$P \xrightarrow{\nu} \mathrm{Hom}(G,\widetilde{T}) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1(\widetilde{T},\widetilde{T})$$

(pour le second morphisme voir le lemme 5.3.1). On a de même un morphisme canonique

$$\phi_T : P \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(T,T).$$

7.7.1. Proposition : *On a* $\phi_T=\phi_{\widetilde{T}}$, *compte tenu de l'identification* $\mathrm{Ext}^1(T,T)\simeq\mathrm{Ext}^1(\widetilde{T},\widetilde{T})$.

Démonstration. Analogue à celles des propositions 7.1.1 et 7.2.2. ☐

7.8. L'ACTION DE $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ SUR $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$

D'après la proposition 7.3.2, on a

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E}) \;\simeq\; \mathbb{C}I_{\mathcal{E}}\oplus\mathrm{Hom}(F,G^*).$$

On peut donc se restreindre à étudier l'action de $\mathrm{Hom}(F,G^*)$ sur $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$. On a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}(F,G^*) \;\simeq\; \mathrm{Hom}(F^{**},G^*) \;\simeq\; \mathrm{Hom}(G^{**},F^*) \;\simeq\; \mathrm{Hom}(G,F^*).$$

On note

$$\mu_G : \mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E})\otimes\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}),\quad \mu_D : \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})\otimes\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$$

les multiplications.

7.8.1. Proposition : *Les restrictions de* μ_G *à* $\mathrm{Hom}(F,G^*)\otimes(M+N_*)$ *et de* μ_D *à* $(M_*+N)\otimes\mathrm{Hom}(F,G^*)$ *sont nulles. Compte tenu des inclusions*

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})/(M+N_*)\simeq A_2(\sigma)\subset\mathrm{Ext}^1(G^*,F)\simeq\mathrm{Hom}(G^*,T),$$
$$\mathrm{Hom}(F^{**},T)/\mathbb{C}\pi=\mathrm{Ext}^1(G,F^*)/\mathbb{C}\sigma^*\subset\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}),$$
$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})/(M_*+N)\simeq A_2(\sigma^*)\subset\mathrm{Ext}^1(F^*,G)\simeq\mathrm{Ext}^2(T,F^{**}),$$
$$\mathrm{Ext}^2(T,G^*)/\mathbb{C}\rho=\mathrm{Ext}^1(F,G^*)/\mathbb{C}\sigma^*\subset\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}),$$

μ_G *est induite par l'application canonique*

$$\mathrm{Hom}(F^{**},G^*)\otimes\mathrm{Hom}(G^*,T)\longrightarrow\mathrm{Hom}(F^{**},T)/\mathbb{C}\pi,$$

et μ_D *par*

$$\mathrm{Ext}^2(T,F^{**})\otimes\mathrm{Hom}(F^{**},G^*)\longrightarrow\mathrm{Ext}^2(T,G^*)/\mathbb{C}\rho.$$

Démonstration. On va montrer que la restriction de μ_G à $\mathrm{Hom}(F,G^*)\otimes(M+N_*)$ est nulle (l'assertion concernant μ_D est analogue).

Rappelons que $N_*=\mathrm{Ext}^1(F,\mathcal{E})$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(F,G^*)\otimes\mathrm{Ext}^1(F,\mathcal{E}) \arrow[d, hook] & \\
\mathrm{Hom}(F,G^*)\otimes\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E})\otimes\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}(F,G^*)\otimes\mathrm{Ext}^1(G^*,\mathcal{E}) \arrow[r, "\phi"] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})
\end{tikzcd}$$

où la colonne de gauche est exacte. Ceci montre que la restriction de μ_G à $\mathrm{Hom}(F,G^*)\otimes N_*$ est nulle. Il reste donc à montrer que la restriction ϕ' de l'application précédente ϕ à $\mathrm{Hom}(F,G^*)\otimes\mathrm{Ext}^1(G^*,G^*)$ est nulle. Mais on a $\mathrm{Hom}(F,G^*)=\mathrm{Hom}(F^{**},G^*)$, donc ϕ' se factorise par $\mathrm{Ext}^1(F^{**},G^*)$, qui est nul. Donc $\phi'=0$. Les autres assertions se démontrent aisément en utilisant les résultats de 7.3. $\square$

On en déduit que $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ agit trivialement sur $\mathbf{T}$, mais n'agit pas trivialement sur $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$ si celui-ci est distinct de $\mathbf{T}$, en particulier lorsque X est une surface.

8. VARIÉTÉS DE MODULES D'EXTENSIONS LARGES

8.1. CONSTRUCTION DES VARIÉTÉS DE MODULES

8.1.1. *Hypothèses.* Soient $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ des ensembles ouverts de faisceaux cohérents sur X, admettant des variétés de modules fins $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ respectivement (cf.2.6), les faisceaux de $\mathcal{Z}$ étant parfaits de codimension 2. Si X est une surface, on suppose qu'il existe un entier positif k tel que $\mathbf{Z}$ soit l'ouvert de $\mathrm{Hilb}^k(X)$ des sous-schémas constitués de k points distincts. On note $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$, $\mathbb{T}$ les faisceaux universels sur $\mathbf{M}\times X$, $\mathbf{N}\times X$ et $\mathbf{Z}\times X$ respectivement. On note $\widetilde{\mathbb{T}}$ la famille de faisceaux déduite de $\mathbb{T}$ vérifiant $\widetilde{\mathbb{T}}_z = \widetilde{(\mathbb{T}_z)}$ pour tout $z\in\mathbf{Z}$ (on peut construire $\widetilde{\mathbb{T}}$ par exemple en utilisant des résolutions localement libres locales de $\mathbb{T}$). Si X est une surface on a $\widetilde{\mathbb{T}}\simeq\mathbb{T}\otimes p_X^*(\omega_X^{-1})$ (p_X désignant la projection $\mathbf{Z}\times X\to X$).

On suppose que tous les faisceaux de $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ sont localement libres, simples et 2-lisses, et que si A, B sont deux fibrés de $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{Y}$) non isomorphes, alors on a $\mathrm{Hom}(A,B)=\{0\}$.

On suppose aussi que si $\dim(X)>2$ les faisceaux de $\mathcal{Z}$ sont simples, et que pour tout $(m,n,z)\in\mathbf{M}\times\mathbf{N}\times\mathbf{Z}$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) On a, si $i\geq 1$,

$$\mathrm{Ext}^i(\mathbb{F}_m,\mathbb{T}_z) \;=\; \mathrm{Ext}^i(\mathbb{G}_n,\widetilde{\mathbb{T}}_z) \;=\; \{0\}$$

(ii) Pour tout noyau E d'un morphisme surjectif $\mathbb{F}_m\to\mathbb{T}_z$ (resp. $\mathbb{G}_n\to\widetilde{\mathbb{T}}_z$), on a $D(E)=\mathrm{Ext}^1(E,E)$.

La condition (ii) est vérifiée si $H^0(\mathbb{F}_m\otimes\widetilde{\mathbb{T}}_z)=\{0\}$ (resp. $H^0(\mathbb{G}_n\otimes\mathbb{T}_z)=\{0\}$) d'après la proposition 5.4.1.

Soient p_M, p_N, p_Z, p les projections de $\mathbf{M}\times\mathbf{N}\times\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, et de $\mathbf{M}\times\mathbf{N}\times\mathbf{Z}\times X$ sur $\mathbf{M}\times\mathbf{N}\times\mathbf{Z}$ respectivement. Soient

$$\mathcal{F} \;=\; p_*\big(\mathcal{H}om(p_M^\sharp(\mathbb{F}),p_Z^\sharp(\mathbb{T}))\big),\qquad \mathcal{G} \;=\; p_*\big(\mathcal{H}om(p_N^\sharp(\mathbb{G}),p_Z^\sharp(\widetilde{\mathbb{T}}))\big),\qquad \Gamma \;=\; \mathcal{F}\oplus\mathcal{G}$$

qui sont des faisceaux localement libres, c'est-à-dire des fibrés vectoriels sur $\mathbf{M}\times\mathbf{N}\times\mathbf{Z}$. Si $(m,n,z)\in\mathbf{M}\times\mathbf{N}\times\mathbf{Z}$ on a

$$\mathcal{F}_{(m,n,z)} \;\simeq\; \mathrm{Hom}(\mathbb{F}_m,\mathbb{T}_z),\qquad \mathcal{G}_{(m,n,z)} \;\simeq\; \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_n,\widetilde{\mathbb{T}}_z).$$

Soient $\mathcal{F}^{surj}$, $\mathcal{G}^{surj}$ les ouverts correspondant morphismes surjectifs, et
$\Gamma^{surj}=\mathcal{F}^{surj}\times_{\mathbf{M}\times\mathbf{N}\times\mathbf{Z}}\mathcal{G}^{surj}\subset\Gamma$.

8.1.2. Lemme : *Soient A, A' des faisceaux de $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{Y}$), T, T' des faisceaux de $\mathbf{Z}$ et $\pi:A\to T$, $\pi':A'\to T'$ des morphismes surjectifs. Alors si $\ker(\pi)\simeq\ker(\pi')$, on a $A=A'$, $T=T'$, et il existe un automorphisme g de T tel que $g\circ\pi=\pi'$.*

Démonstration. Puisque $\ker(\pi)\simeq\ker(\pi')$, on a $A\simeq\ker(\pi)^{**}\simeq\ker(\pi')^{**}\simeq A'$, donc $A=A'$. Puisque A est simple l'isomorphisme induit $\ker(\pi)^{**}\simeq\ker(\pi')^{**}$ est une homothétie et $\ker(\pi)=\ker(\pi')$ comme sous-faisceaux de A. On en déduit

$$T\simeq A/\ker(\pi)=A'/\ker(\pi')\simeq T'$$

et le lemme en découle immédiatement. □

Soit $\Gamma^0 \subset \Gamma^{surj}$ l'ouvert correspondant aux extensions larges. Au dessus de $(m,n,z) \in \mathbf{M}\times\mathbf{N}\times\mathbf{Z}$, Γ^0 est l'ensemble des $(\pi,\rho) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{F}_m,\mathbb{T}_z)\oplus\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_n,\widetilde{\mathbb{T}}_z)$ tels que π et ρ soient surjectifs et

- $h^i(\mathbb{F}_m^*\otimes\mathbb{G}_n^*) = 0$ si $i \geq 1$,
- $\mathrm{Ext}^2(\ker(\pi),\mathbb{G}_n^*) = \mathrm{Ext}^2(\ker(\rho),\mathbb{F}_m^*) = \{0\}$,
- $h^i(\mathbb{F}_m\otimes\mathbb{G}_n) = 0$ si $i \leq 1$,

Si $(\pi,\rho)\in\Gamma^0_{m,n,z}$, on note $\mathcal{E}(\pi,\rho)$ l'extension large correspondante. On a donc des suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_n^* \longrightarrow \mathcal{E}(\pi,\rho) \longrightarrow \ker(\pi) \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathbb{F}_m^* \longrightarrow \mathcal{E}(\pi,\rho)^* \longrightarrow \ker(\rho) \longrightarrow 0.$$

8.1.3. Proposition : *Soient* $(m,n,z),(m',n',z') \in \mathbf{M}\times\mathbf{N}\times\mathbf{Z}$*,* $(\pi,\rho)\in\Gamma^0_{(m,n,z)}$, $(\pi',\rho')\in\Gamma^0_{(m',n',z')}$. *Alors on a* $\mathcal{E}(\pi,\rho)\simeq\mathcal{E}(\pi',\rho')$ *si et seulement si* $(m,n,z)=(m',n',z')$ *et s'il existe* $\lambda\in\mathbb{C}^*$*,* $g\in\mathrm{Aut}(\mathbb{T}_z)$*, tels que* $\pi' = g\circ\pi$*,* $\lambda\widetilde{g}\circ\rho' = \rho$*.*

Démonstration. Soit $\theta : \mathcal{E}(\pi,\rho)\to\mathcal{E}(\pi',\rho')$ un isomorphisme. On considère les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_n^* \longrightarrow \mathcal{E}(\pi,\rho) \longrightarrow \ker(\pi) \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_{n'}^* \longrightarrow \mathcal{E}(\pi',\rho') \longrightarrow \ker(\pi') \longrightarrow 0.$$

On a $\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_n^*,\ker(\pi')) = \{0\}$, donc $\theta(\mathbb{G}_n^*)\subset\mathbb{G}_{n'}^*$. Comme $\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_n^*,\mathbb{G}_{n'}^*) = \{0\}$ si $n\neq n'$, on a $n=n'$, et la restriction de θ à $\mathbb{G}_n^*$ est une homothétie de rapport $\gamma\neq 0$. Donc θ induit un isomorphisme $\ker(\pi)\simeq\ker(\pi')$. D'après le lemme 8.1.2 on a $m=m'$, $z=z'$, et il existe $g\in\mathrm{Aut}(\mathbb{T}_z)$ tel que $\pi'=g\circ\pi$. On a aussi $\ker(\pi)=\ker(\pi')$ (comme sous-faisceaux de $\mathbb{F}_m$) et l'automorphisme de $\mathbb{F}_m$ induit par $\frac{1}{\gamma}\theta$ est une homothétie de rapport $\lambda\neq 0$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{G}_n^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{E}(\pi,\rho) \arrow[r] \arrow[d, "\frac{1}{\gamma}\theta"] & \ker(\pi) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{G}_n^* \arrow[r] & \mathcal{E}(\pi',\rho') \arrow[r] & \ker(\pi') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En dualisant on en déduit le carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_n \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & \mathcal{E}xt^1(\ker(\pi),\mathcal{O}_X) \\
\mathbb{G}_n \arrow[r, "\alpha'"] & \mathcal{E}xt^1(\ker(\pi'),\mathcal{O}_X) \arrow[u, "\lambda"']
\end{tikzcd}$$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker(\pi) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{F}_n \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{T}_z \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(\pi') \arrow[r] & \mathbb{F}_n \arrow[r] & \mathbb{T}_z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En dualisant on en déduit le carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}xt^1(\ker(\pi),\mathcal{O}_X) \arrow[r, "\partial"] & \mathcal{E}xt^2(\mathbb{T}_z,\mathcal{O}_X) = \widetilde{\mathbb{T}}_z \\
\mathcal{E}xt^1(\ker(\pi'),\mathcal{O}_X) \arrow[u, equal] \arrow[r, "\partial'"] & \mathcal{E}xt^2(\mathbb{T}_z,\mathcal{O}_X) = \widetilde{\mathbb{T}}_z \arrow[u, "\widetilde{g}"]
\end{tikzcd}$$

En regroupant ces deux carrés commutatifs on obtient le carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_n \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend left, "\rho"] & \mathcal{E}xt^1(\ker(\pi),\mathcal{O}_X) \arrow[r, "\partial"] & \widetilde{\mathbb{T}}_z \\
\mathbb{G}_n \arrow[u, equal] \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[rr, bend right, "\rho'"'] & \mathcal{E}xt^1(\ker(\pi'),\mathcal{O}_X) \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r, "\partial'"] & \widetilde{\mathbb{T}}_z \arrow[u, "\lambda\widetilde{g}"]
\end{tikzcd}$$

On a donc $\lambda\widetilde{g}\circ\rho' = \rho$. La réciproque est immédiate. ☐

8.1.4. *Construction des variétés de modules.* On va construire une "variété de modules" pour les extensions précédentes. Traitons d'abord le cas le plus simple, c'est à dire $\dim(X) > 2$. Soient

$$U \ = \mathbb{P}(\mathcal{F}^{surj}) \times_{\mathbf{M}\times\mathbf{N}\times\mathbf{Z}} \mathbb{P}(\mathcal{G}^{surj})$$

et $\mathbb{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})$ l'ouvert de U correspondant aux extensions larges.

On suppose maintenant que X est une surface. Soit U_k l'ouvert de X^k constitué des $(x_1,\dots,x_k)$ tels que $x_i \neq x_j$ si $1 \leq i < j \leq k$. Pour $1 \leq j \leq k$ soient $\lambda_j : U_k \to X$ la restriction de la j-ième projection,

$$f_i : \mathbf{M}\times\mathbf{N}\times U_k \longrightarrow \mathbf{M}\times X$$

la composée de la projection $\mathbf{M}\times\mathbf{N}\times X \to \mathbf{M}\times X$ et de $I_{\mathbf{M}\times\mathbf{N}}\times\lambda_i$,

$$g_i : \mathbf{M}\times\mathbf{N}\times U_k \longrightarrow \mathbf{N}\times X$$

la composée de la projection $\mathbf{M}\times\mathbf{N}\times X \to \mathbf{N}\times X$ et de $I_{\mathbf{M}\times\mathbf{N}}\times\lambda_i$. Soient $\mathbb{F}_i = f_i^*(\mathbb{F})$, $\mathbb{G}_i = g_i^\sharp(\mathbb{G})$ et

$$W \ = \ M^s(\mathbb{F}_1^*,\dots,\mathbb{F}_k^*,\mathbb{G}_1^*,\dots,\mathbb{G}_k^*)$$

(cf. 2.9). Sur W agit de manière évidente le groupe Σ_k des permutations de $\{1,\dots,k\}$. Soit

$$\mathbb{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}) \ = \ W/\Sigma_k.$$

C'est une variété quasiprojective lisse. La projection $W \to \mathbf{M}\times\mathbf{N}\times U_k$ passe au quotient et définit un morphisme $\mathbb{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}) \to \mathbf{M}\times\mathbf{N}\times\mathbf{Z}$.

Dans tous les cas, d'après la proposition 8.1.3 et la proposition 2.9.1 les points fermés de $\mathbb{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})$ s'identifient aux classes d'isomorphisme d'extensions larges du type $\mathcal{E}(\pi,\rho)$. On note $\mathrm{Larg}(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme d'extensions larges $\mathcal{E}(\pi,\rho)$, qui est donc aussi l'ensemble des points fermés de $\mathbb{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})$.

Soit r (resp. s) le rang des fibrés de $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{Y}$), $d = \chi(\mathbb{F}_m, \mathbb{T}_z)$, $e = \chi(\mathbb{G}_n, \widetilde{T}_z)$ (pour $(m, n, z) \in \mathbf{M} \times \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$). Si X est une surface on a

$$\dim(\mathbb{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})) \ = \ \dim(\mathbf{M}) + \dim(\mathbf{N}) + k(r + s + 1) - 1,$$

et si $\dim(X) > 2$

$$\dim(\mathbb{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})) \ = \ \dim(\mathbf{M}) + \dim(\mathbf{N}) + \dim(\mathbf{Z}) + d + e - 2.$$

8.2. Familles pures d'extensions larges

Soit $n = \dim(X)$. Soit $\mathcal{E}$ une famille de fibrés de $\mathrm{Larg}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ paramétrée par une variété algébrique S. C'est donc un fibré vectoriel sur $S \times X$. Soit

$$\mathcal{U} \ = \ p_S^\sharp(\mathcal{E}^*) \otimes p_{\mathbf{N}}^\sharp(\mathbb{G}^*) \otimes p_X^*(\omega_X)$$

(p_S, $p_{\mathbf{N}}$, p_X désignant les projections de $S \times \mathbf{N}$ sur S, $\mathbf{N}$, et de $S \times \mathbf{N} \times X$ sur X respectivement). Pour tout point fermé (s, n) de $S \times \mathbf{N}$, le morphisme

$$R^n p_{S \times \mathbf{N} *}(\mathcal{U}) \otimes_{\mathcal{O}_{(s,n)}} \mathbb{C} \longrightarrow H^n(X, \mathcal{E}_s^* \otimes \mathbb{G}_n^* \otimes \omega_X)$$

($p_{S \times \mathbf{N}}$ désignant la projection $S \times \mathbf{N} \times X \to S \times \mathbf{N}$) est un isomorphisme. Par dualité de Serre on a un isomorphisme

$$H^n(X, \mathcal{E}_s^* \otimes \mathbb{G}_n^* \otimes \omega_X) \ \simeq \ \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_n^*, \mathcal{E}_s)^*.$$

Par conséquent pour tout point fermé s de S il existe un unique point fermé n de $\mathbf{N}$ tel que $(s, n) \in \mathrm{supp}(R^n p_{S \times \mathbf{N} *}(\mathcal{U}))$, et on a $\dim(\mathrm{Hom}(G_n^*, \mathcal{E}_s)) = 1$.

8.2.1. Définition : *On dit que $\mathcal{E}$ est* pure *si il existe un morphisme $\phi : S \to \mathrm{supp}(R^n p_{S \times \mathbf{N} *}(\mathcal{U}))$ tel que $p_S \circ \phi = I_S$, et un fibré en droites L sur S tel que $R^n p_{S \times \mathbf{N} *}(\mathcal{U}) \simeq \phi^*(L)$.*

Dans le cas des fibrés instables de rang 2 sur $\mathbb{P}_2$ cette définition est équivalente à celle donnée dans [48]. Supposons que $\mathcal{E}$ soit pure. Alors ϕ est une immersion fermée. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $S \times \mathbf{N}$. Alors on a un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} p_{S \times \mathbf{N} *}(p_S^\sharp(\mathcal{E}) \otimes p_{\mathbf{N}}^\sharp(\mathbb{G}) \otimes p_{S \times \mathbf{N}}^*(\mathcal{F})) \ &\simeq \ \mathcal{H}om(R^n p_{S \times \mathbf{N} *}(p_S^\sharp(\mathcal{E}^*) \otimes p_{\mathbf{N}}^\sharp(\mathbb{G}^*) \otimes p_X^*(\omega_X)), \mathcal{F}) \\ &= \ \mathcal{H}om(\phi^*(L), \mathcal{F}). \end{aligned}$$

de dualité relative (cf. [22]). Soit $\alpha : S \to \mathbf{N}$ la seconde composante de ϕ. Alors, en prenant $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\phi(S)}$ dans ce qui précède, on voit qu'on a un isomorphisme

$$p_{S*}(\alpha^\sharp(\mathbb{G}) \otimes \mathcal{E}) \ \simeq \ L^*.$$

Il en découle que le morphisme canonique

$$\theta : p_S^* p_{S*}(\alpha^\sharp(\mathbb{G}) \otimes \mathcal{E}) \otimes \alpha^\sharp(\mathbb{G}^*) \longrightarrow \mathcal{E}$$

est injectif (comme morphisme de faisceaux). En utilisant par exemple le corollaire 5.7 de [15], exposé IV, on voit que $\mathcal{U} = \mathrm{coker}(\theta)$ est une famille plate de faisceaux réguliers. En utilisant les résultats du chapitre 5 on voit que $\mathcal{U}^*$ est localement libre et que $\mathcal{U}^{**}/\mathcal{U}$ est une famille de faisceaux de $\mathcal{Z}$. On en déduit aisément la

8.2.2. Proposition : *La famille $\mathcal{E}$ est pure si et seulement si $\mathcal{E}^*$ l'est.*

8.2.3. Proposition : *Si $\mathcal{E}$ est pure, il existe un unique morphisme $f_{\mathcal{E}} : S \to \mathbb{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})$ tel que pour tout point fermé de S, $f_{\mathcal{E}}(s)$ soit le point de $\mathbb{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})$ correspondant à l'extension large $\mathcal{E}_s$.*

Démonstration. Analogue à la proposition 2.7 de [48]. On utilise la suite exacte

$$0 \longrightarrow p_S^* p_{S*}(\alpha^\sharp(\mathbb{G}) \otimes \mathcal{E}) \otimes \alpha^\sharp(\mathbb{G}^*) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow 0.$$

□

8.2.4. Remarque : Les résultats précédents s'étendent sans peine à des cas un peu plus généraux où $\mathbf{M}$ ou $\mathbf{N}$ ne sont plus nécessairement des variétés de modules fins, mais des structures de variétés algébriques sur $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ respectivement, ayant des propriétés moins fortes. Par exemple $\mathbf{M}$ ou $\mathbf{N}$ peuvent être des ouverts de variétés de modules de fibrés stables et 2-lisses.

8.3. FIBRÉS UNIVERSELS

On utilise les notations de 8.1.4. En utilisant des résultats de [39] concernant les extensions universelles (voir aussi [44], app. III, p. 198) on montre qu'il existe un *fibré universel défini localement* sur $\mathbb{M}(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}) \times X$ (cf. 2.6). On n'en donnera la construction que dans le cas où X est une surface, qui est le plus difficile.

8.3.1. *Construction du fibré universel.* On reprend les notations de 8.1.1 et 8.1.4. Soit

$$U \;=\; \mathbb{P}(\mathbb{F}_1^*) \times_{\mathbf{M}\times\mathbf{N}\times X_k} \cdots \times_{\mathbf{M}\times\mathbf{N}\times X_k} \mathbb{P}(\mathbb{F}_k^*),$$

et

$$\pi_i : U \to \mathbb{P}(\mathbb{F}_i^*), \qquad \pi_{\mathbf{M}} : U \to \mathbf{M}, \qquad \pi_{\mathbf{N}} : U \to \mathbf{N},$$
$$\pi_{X_k} : U \to X_k, \qquad p_U : U \times X \to U, \qquad \pi : U \to \mathbf{M} \times \mathbf{N} \times X_k$$

les projections. Soit $\mathbb{T}'$ le faisceau universel sur $X_k \times X$ (on a donc $\mathbb{T}'/\Sigma_k = \mathbb{T}$). Soient

$$\Phi : \pi_{\mathbf{M}}^\sharp(\mathbb{F}) \otimes p_U^*(\pi_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{F}_1^*)}(-1)) \otimes \cdots \otimes p_U^*(\pi_k^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{F}_k^*)}(-1))) \longrightarrow \pi_{X_k}^*(\mathbb{T}')$$

le morphisme surjectif évident de faisceaux sur $U \times X$ et $\mathcal{F}_0 = \ker(\Phi)$. Ce dernier est une famille de faisceaux réguliers sur X paramétrée par U. Posons

$$\mathbb{A} \;=\; \mathcal{E}xt^1_{p_U}(\mathcal{F}_0, \pi_{\mathbf{N}}^\sharp(\mathbb{G}^*)), \qquad \mathbb{B} \;=\; p_{U*}(\mathcal{H}om(\mathcal{F}_0, \pi_{\mathbf{N}}^\sharp(\mathbb{G}^*))).$$

On a des isomorphismes canoniques

$$\mathbb{A} \ \simeq \ p_{U*}(\mathcal{H}om(\pi^\sharp_{\mathbf{N}}(\mathbb{G}), \pi^*_{X_k}(\mathbb{T}'))), \qquad \mathbb{B} \ \simeq \ p_{U*}(\mathcal{H}om(\pi^\sharp_{\mathbf{M}}(\mathbb{F}), \pi^\sharp_{\mathbf{N}}(\mathbb{G}^*))).$$

Soit $\mathbb{E} = \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$. Si $y = (m, n, (x_i), (\phi_i)) \in U$ ($x_i \in X$, $\phi_i \in \mathbb{P}(\mathbb{F}^*_{x_i})$) on a

$$\mathbb{E}_y \ = \ \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_n, \overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathcal{O}_{x_i}) \oplus \mathrm{Hom}(\mathbb{F}_m, \mathbb{G}^*_n).$$

Il en découle qu'on a $\mathbb{E} = \pi^*(\mathbb{E}')$, avec

$$\mathbb{E}' \ = \ p_*(\mathcal{H}om(p^\sharp_{\mathbf{N}}(\mathbb{G}), p_{k*}(\mathbb{T}'))) \otimes p_*(\mathcal{H}om(p^\sharp_{\mathbf{M}}(\mathbb{F}), p^\sharp_{\mathbf{N}}(\mathbb{G}^*)))$$

(p, $p_{\mathbf{N}}$, p_k, $p_{\mathbf{M}}$ désignant les projections de $\mathbf{M} \times \mathbf{N} \times X_k \times X$ sur $\mathbf{M} \times \mathbf{N} \times X_k$, et de $\mathbf{M} \times \mathbf{N} \times X_k$ sur $\mathbf{N}$, X_k et $\mathbf{M}$ respectivement). Soit $V \subset \mathbf{M} \times \mathbf{N} \times X_k$ un ouvert affine. On a alors $H^i(V, \mathbb{E}') = \{0\}$ pour $i \geq 1$. Comme on a $R^i\pi_*(\mathcal{O}_U) = 0$ pour $i \geq 1$ il en découle qu'on a aussi $H^i(\pi^{-1}(V), \mathbb{E}) = \{0\}$ pour $i \geq 1$. D'après [39], lemma 2.4, il existe une extension universelle sur $\mathbb{P}(\mathcal{A})_{|\pi^{-1}(V)} \times X$:

$$0 \longrightarrow \pi^\sharp_U(\pi^\sharp_{\mathbf{N}}(\mathbb{G}^*)) \otimes \pi^*_{\mathbb{P}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{A})}(1)) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \pi^\sharp_U(\mathcal{F}_0) \longrightarrow 0$$

(π_U, $\pi_{\mathbb{P}}$ désignant les projections $\mathbb{P}(\mathbb{A}) \to U$, $\mathbb{P}(\mathbb{A}) \times X \to \mathbb{P}(\mathbb{A})$ respectivement). Mais $\mathbb{P}(\mathbb{A})_{|\pi^{-1}(V)}/\Sigma_k$ est un ouvert de $\mathbb{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ (cf. 2.9.2) et $\mathcal{E}/\Sigma_k$ est un fibré universel sur $(\mathbb{P}(\mathbb{A})_{|\pi^{-1}(V)}/\Sigma_k) \times X$.

8.3.2. *Le cas des variétés de dimension supérieure à 2.* Supposons que $\dim(X) > 2$. Les hypothèses de 8.1.1 et les résultats de 7.6 entrainent que les fibrés universels locaux obtenus sont des familles complètes. Dans ce cas $\mathbb{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ est donc une variété de modules fins. On obtient ainsi de nouvelles variétés de modules fins de fibrés vectoriels non simples (on donne dans [5] des exemples de telles variétés sur $\mathbb{P}_2$).

8.4. EXEMPLES SUR $\mathbb{P}_3$

Dans les exemples suivants on utilise deux types de faisceaux réguliers sur $\mathbb{P}_3$: les faisceaux d'idéaux de droites ou les faisceaux réguliers construits en 5.4.4 comme noyaux de morphismes surjectifs $E \to \mathcal{O}_\ell(m)$ (ℓ étant une droite de $\mathbb{P}_3$, $m > 0$ et E un fibré de corrélation nulle). Dans ce dernier cas on prendra pour $\mathbf{Z}$ la grassmannienne des droites de $\mathbb{P}_3$ et pour $\mathbb{T}$ le fibré en droites universel de degré m. Pour toute droite ℓ de $\mathbb{P}_3$ on a donc $\mathbb{T}_\ell = \mathcal{O}_\ell(m)$. Rappelons que la variété de modules fins constituée des fibrés de corrélation nulle est isomorphe à un ouvert de $\mathbb{P}_5$.

8.4.1. *Fibrés de rang 3*

Soit $n > 4$ un entier. On considère des extensions du type

$$0 \longrightarrow E(n) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{I}_\ell \longrightarrow 0$$

où ℓ est une droite de $\mathbb{P}_3$, $\mathcal{I}_\ell$ son faisceau d'idéaux et E un fibré de corrélation nulle. On montre aisément que les propriétés de 6.2 et 8.1.1 sont vérifiées. Ici $\mathbf{M}$ est réduit à un point (correspondant à $\mathcal{O}$), $\mathbf{Z}$ est la grassmannienne des droites de $\mathbb{P}_3$ et $\mathbf{N}$ est la variété de modules des fibrés de corrélation nulle (c'est-à-dire la variété de modules des fibrés stables de rang 2 et de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 1$). Les fibrés $\mathcal{E}$ sont de rang 3 et de classes de Chern $2n$, n^2+2, $2n+2$. La variété de modules $\mathbb{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ des extensions larges du type précédent est une variété de modules fins. On a $\dim(\mathbb{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})) = 2n+14$. Les fibrés $\mathcal{E}$ sont lisses, mais on a cependant

$$\dim(\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}, \mathcal{E})) \;=\; 2n+10.$$

Pour obtenir ce résultat, on part de la formule $\chi(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 4n^2 - 3$ (obtenue grâce à 2.1.4 par exemple). On a

$$\begin{aligned}
\dim(\mathrm{End}(\mathcal{E})) \;&=\; h^0(E(n)) + 1 \;=\; \frac{n(n+2)(n+4)}{3} + 1,\\
\dim(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})) \;&=\; \dim(\mathbb{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})) \;=\; 2n+14,\\
\dim(\mathrm{Ext}^3(\mathcal{E}, \mathcal{E})) \;&=\; \dim(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}(-4))) \;=\; h^0(E(n-4)) \;=\; \frac{n(n-2)(n-4)}{3},
\end{aligned}$$

d'où on déduit la dimension de $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}, \mathcal{E})$.

8.4.2. *Fibrés de rang 4*

Soient m, n des entiers, avec $n > \mathrm{Max}(m, 4)$. Soient E un fibré de corrélation nulle, ℓ une droite de $\mathbb{P}_3$ et $\pi : E \longrightarrow \mathcal{O}_l(m)$ un morphisme surjectif. On considère des extensions du type

$$0 \longrightarrow E'(n) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \ker(\pi) \longrightarrow 0,$$

où E' est un fibré de corrélation nulle. On montre aisément que les propriétés de 6.2 et 8.1.1 sont vérifiées. Ici $\mathbf{M}$ est la variété de modules des fibrés de corrélation nulle, $\mathbf{N}$ est isomorphe à $\mathbf{M}$ et $\mathbf{Z}$ est la grassmannienne des droites de $\mathbb{P}_3$. Les fibrés $\mathcal{E}$ sont de rang 4 et de classes de Chern $2n$, n^2+3, $4n-2m+2$. La variété de modules $\mathbb{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ des extensions larges du type précédent est une variété de modules fins. On a $\dim(\mathbb{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})) = 2n+20$. Les fibrés $\mathcal{E}$ sont lisses, mais on a cependant

$$\dim(\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}, \mathcal{E})) \;=\; 2n-5$$

(démonstration analogue à celle de 8.4.1).

9. EXTENSIONS LARGES SUR LES SURFACES

On suppose dans ce chapitre que X est une surface.

9.1. EXTENSIONS LARGES GÉNÉRIQUES

On considère comme dans 6.4 des fibrés vectoriels $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$, et un faisceau parfait T sur X. Soient

$$\pi : \mathbb{F} \longrightarrow T, \qquad \rho : \mathbb{G} \longrightarrow \widetilde{T}$$

des morphismes surjectifs, $F = \ker(\pi)$, $G = \ker(\rho)$, de telle sorte que $\mathbb{F} = F^{**}$, $\mathbb{G} = G^{**}$. On se place dans le cas où comme dans 6.2, π et ρ définissent une extension large

$$(L) \qquad 0 \longrightarrow G^* \xrightarrow{i} \mathcal{E} \xrightarrow{p} F \longrightarrow 0$$

associée à $\sigma \in \mathrm{Ext}^1(F, G^*)$ et l'extension duale

$$(L^*) \qquad 0 \longrightarrow F^* \xrightarrow{{}^t p} \mathcal{E}^* \xrightarrow{{}^t i} G \longrightarrow 0$$

associée à $\sigma^* \in \mathrm{Ext}^1(G, F^*)$. D'après la définition 6.2.2, F^* et G^* sont 2-lisses. On utilise les notations de 6.

D'après la proposition 7.4.5, compte tenu des isomorphismes $\mathrm{Ext}^1(G^*, F) \simeq \mathrm{Hom}(G^*, T)$, $\mathrm{Ext}^2(F, F) \simeq H^2(\mathcal{O}_X)$ et de la dualité de Serre, la transposée de $\sigma\times$

$$H^0(\omega_X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G^{**}, \widetilde{T} \otimes \omega_X)$$

est simplement la composition avec ρ.

Notons aussi que le fait que X est une surface implique que ξ_2 et ξ_2^* sont surjectives (prop. 7.4.4).

On étudiera plus particulièrement les *extensions larges génériques*. On emploie ce terme lorsque le faisceau de torsion T est une somme directe de faisceaux structuraux de points distincts :

$$T \;=\; \bigoplus_{x \in Z} \mathbb{C}_x,$$

où $Z \subset X$ est fini, $\mathbb{C}_x$ désignant le faisceau structural de $\{x\}$. Dans ce cas π équivaut à une suite $(\pi_x)_{x\in Z}$, avec $\pi_x \in F_x^*$, $\pi_x \neq 0$. On a

$$\widetilde{T} \;=\; \bigoplus_{x \in Z} \omega_{X,x}^*.$$

On fixe, pour tout $x \in Z$, un isomorphisme $\omega_{X,x} \simeq \mathbb{C}$, ce qui permet d'identifier $\widetilde{T}$ et $\bigoplus_{x \in Z} \mathbb{C}_x$, et ρ équivaut à une suite $(\rho_x)_{x\in Z}$, avec $\rho_x \in G_x^*$, $\rho_x \neq 0$.

On a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Ext}^1(G^*, F) \;\simeq\; \bigoplus_{x \in Z} G_x^{**}, \qquad \mathrm{Ext}^1(F^*, G) \;\simeq\; \bigoplus_{x \in Z} F_x^{**}.$$

D'après la proposition 2.3.2, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^2(T,T) \;\simeq\; \bigoplus_{x\in Z}\omega^*_{X,x} \;\simeq \mathbb{C}^Z,$$

et le morphisme trace s'écrit

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^2(T,T) \arrow[r] & H^2(\mathcal{O}_X) \simeq H^0(\omega_X)^* \\
(\alpha_x)_{x\in Z} \arrow[r, mapsto] & (s \mapsto \sum_{x\in Z}\alpha_x s(x))
\end{tikzcd}$$

On en déduit les multiplications par σ et σ^*

$$\begin{tikzcd}
\times\sigma : \mathrm{Ext}^1(G^*,F) = \bigoplus_{x\in Z} G_x^{**} \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2(G^*,G^*) \simeq H^0(\omega_X)^* \\
(\phi_x)_{x\in Z} \arrow[r, mapsto] & (s \mapsto \sum_{x\in Z}\langle\phi_x,\rho_x\rangle s(x))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\times\sigma^* : \mathrm{Ext}^1(F^*,G) = \bigoplus_{x\in Z} F_x^{**} \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2(F^*,F^*) \simeq H^0(\omega_X)^* \\
(\psi_x)_{x\in Z} \arrow[r, mapsto] & (s \mapsto \sum_{x\in Z}\langle\psi_x,\pi_x\rangle s(x))
\end{tikzcd}$$

En ce qui concerne les morphismes canoniques $\mathrm{Ext}^1(G^*,F)\to\mathrm{Ext}^2(T,T)$ et $\mathrm{Ext}^1(F^*,G)\to\mathrm{Ext}^2(T,T)$, on a

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(G^*,F) = \bigoplus_{x\in Z} G_x^{**} \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2(T,T) \\
(\phi_x)_{x\in Z} \arrow[r, mapsto] & (\langle\phi_x,\rho_x\rangle)_{x\in Z}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(F^*,G) = \bigoplus_{x\in Z} F_x^{**} \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2(T,T) \\
(\psi_x)_{x\in Z} \arrow[r, mapsto] & (\langle\psi_x,\pi_x\rangle)_{x\in Z}
\end{tikzcd}$$

Rappelons que Δ désigne le morphisme canonique $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})\to A_2(\sigma)\oplus A_2(\sigma^*)$ (cf. 7.6). D'après la proposition 7.6.4, on a

$$\begin{aligned}\Delta(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})) \;=\; \Big\{ & ((\phi_x),(\psi_x)) \in \bigoplus_{x\in Z} G_x^{**} \times \bigoplus_{x\in Z} F_x^{**}; \\ & \langle\phi_x,\rho_x\rangle + \langle\psi_x,\pi_x\rangle = 0 \text{ pour tout } x\in Z \\ & \text{et} \sum_{x\in Z}\langle\phi_x,\rho_x\rangle s(x) = 0 \text{ pour tout } s\in H^0(\omega_X)\Big\}.\end{aligned}$$

Si $\eta\in\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$, on notera $s(\eta)$ (resp. $s^*(\eta)$) le *support* de l'image ζ de η dans $\mathrm{Ext}^1(G^*,F)$ (resp. $\mathrm{Ext}^1(F^*,G)$), c'est-à-dire l'ensemble des $x\in Z$ tels que la composante selon x de ζ est non nulle.

9.1.1. *L'action de* $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ *sur* $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$. Soient $\eta\in\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$ et $(\phi_x)_{x\in Z}$ (resp. $(\psi_x)_{x\in Z}$) son image dans $A_2(\sigma)$ (resp. $A_2(\sigma^*)$). Soit $\lambda\in\mathrm{Hom}(F^{**},G^*)$, vu comme élément de $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E})$. Alors on a d'après la proposition 7.8.1

$$\begin{aligned}\lambda\eta\in\mathrm{Hom}(F^{**},T)/C\pi &= \Big(\bigoplus_{x\in Z}F_x^*\Big)/\langle(\pi_x)\rangle,\\ \lambda\eta &= (\phi_x\circ\lambda_x)_{x\in Z},\\ \eta\lambda\in\mathrm{Ext}^2(T,G^*)/C\rho &= \Big(\bigoplus_{x\in Z}G_x^*\Big)/\langle(\rho_x)\rangle,\\ \lambda\eta &= (\lambda_x(\psi_x))_{x\in Z},\end{aligned}$$

9.2. LE PRODUIT $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})\times\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})\longrightarrow\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E})$ ET L'APPLICATION $\omega_2(\mathcal{E})$

On considère l'application bilinéaire canonique

$$\mu_0:\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})\times\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})\longrightarrow\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E}).$$

On note μ la composée

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})\times\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})\xrightarrow{\mu_0}\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E})\longrightarrow\mathrm{Ext}^2(G^*,F)=\mathrm{Ext}^2(G^*,F^{**})$$

(le morphisme de droite étant induit par (L)). D'après la proposition 7.3.2 on a isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E})\ \simeq\ H^2(\mathcal{O}_X)\oplus\mathrm{Ext}^2(G^*,F^{**}).$$

Soit $\sigma\in\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$. D'après la proposition 3.3.3, la déformation double de $\mathcal{E}$ définie par σ s'étend en une déformation triple si et seulement si $\mu_0(\sigma,\sigma)=0$. Mais $\mu_0(\sigma,\sigma)$ est toujours contenu dans le noyau de la trace. Il en découle que la déformation double de $\mathcal{E}$ définie par σ s'étend en une déformation triple si et seulement si $\mu(\sigma,\sigma)=0$.

9.2.1. Proposition : *L'application* μ *s'annule sur* $(M+N_*)\times\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$ *et* $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})\times(M_*+N)$. *L'application bilinéaire induite*

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})/(M+N_*)\times\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})/(M_*+N)\longrightarrow\mathrm{Ext}^2(G^*,F^{**})$$

est isomorphe à la restriction à $A_2(\sigma)\times A_2(\sigma^*)$ *de l'application bilinéaire canonique*

$$\mathrm{Hom}(G^*,T)\times\mathrm{Ext}^2(T,F^{**})\longrightarrow\mathrm{Ext}^2(G^*,F^{**}).$$

Démonstration. La proposition 9.2.1 se démontre à l'aide du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \times \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^2(G^*,F^{**}) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Ext}^1(G^*,\mathcal{E}) \times \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},F^{**}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2(G^*,F^{**}) \arrow[dd, equal] \\
\mathrm{Ext}^1(G^*,\mathcal{E}) \times \mathrm{Ext}^1(F,F^{**}) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[d] & \\
\mathrm{Ext}^1(G^*,F) \times \mathrm{Ext}^1(F,F^{**}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2(G^*,F^{**}) \arrow[dd, equal] \\
\mathrm{Hom}(G^*,T) \times \mathrm{Ext}^1(F,F^{**}) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[d] & \\
\mathrm{Hom}(G^*,T) \times \mathrm{Ext}^2(T,F^{**}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2(G^*,F^{**})
\end{tikzcd}$$

qui découle de l'associativité des Ext et des résultats du chapitre 9. □

Le produit

$$\mathrm{Hom}(G^*,T) \times \mathrm{Ext}^2(T,F^{**}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(G^*,F^{**})$$

s'identifie (à l'aide de la dualité de Serre) à l'application canonique

$$\mathrm{Hom}(G^*,T) \times \mathrm{Hom}(F^{**},T\otimes\omega_X)^* \longrightarrow \mathrm{Hom}(F^{**},G^*\otimes\omega_X)^*.$$

Si l'extension large est générique, cette application est la somme directe des applications

$$\begin{array}{rcl}
G^{**}_x \times (F^{**}_x \otimes \omega^{-1}_{Xx}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(F^{**}\otimes\omega_X^{-1}, G^*)^* \\
(\gamma,\phi) & \longmapsto & (\alpha \mapsto \langle \alpha_x(\phi), \gamma\rangle)
\end{array}$$

x parcourant Z. Cette formule généralise [49], theorem (2.8). On en déduit des propriétés du module formel de $\mathcal{E}$ (cf. 3.4) :

9.2.2. Proposition : *On suppose que*

$$H^1(F^*\otimes G^*\otimes\omega_X\otimes\mathcal{I}_Z) \ = \ H^0(\omega_X) \ = \ \{0\}$$

($\mathcal{I}_Z$ désignant le faisceau d'idéaux de Z). Soient $\eta,\eta' \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$. Alors on a $\mu(\eta,\eta')=0$ si et seulement si

$$s(\eta)\cap s^*(\eta') \ = \ \emptyset.$$

Compte tenu de l'isomorphisme $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E})^* \simeq \mathrm{Hom}(F^{**}\otimes\omega_X^{-1}, G^*)$, on a

$$\ker(\omega_2(\mathcal{E})) \ = \ \mathrm{Hom}(F^{**}\otimes\omega_X^{-1}, G^*\otimes\mathcal{I}_Z).$$

Pour tout $x \in Z$, soient $\pi_{x,0}, \ldots, \pi_{x,r}$ une base de F_x^*, avec $\pi_{x,0} = \pi_x$, et $\rho_{x,0}, \ldots, \rho_{x,s}$ une base de G_x^*, avec $\rho_{x,0} = \rho_x$. Supposons comme dans la proposition 9.2.2 que $H^0(\omega_X) = \{0\}$. Alors

$$\operatorname{coker}(\Delta) \ \subset \ \bigoplus_{x \in Z} (G_x^{**} \times F_x^{**})$$

est défini par les équations $\rho_{x,0} + \pi_{x,0} = 0$. Soient $u_1, \ldots, u_N \in \operatorname{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})^*$ tels que $u_1, \ldots, u_N$ et les $\rho_{x,0}, \ldots, \rho_{x,s}, \pi_{x,1}, \ldots, \pi_{x,r}$, $x \in Z$, constituent une base de $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})^*$. Alors on déduit de ce qui précède le

9.2.3. Corollaire : *On suppose que*

$$H^1(F^* \otimes G^* \otimes \omega_X \otimes \mathcal{I}_Z) \ = \ H^0(\omega_X) \ = \ \{0\}.$$

Soit A le module formel de $\mathcal{E}$. Soit

$$R \ = \ \mathbb{C}\big[u_1, \ldots, u_N, (\rho_{x,0}, \ldots, \rho_{x,s}, \pi_{x,1}, \ldots, \pi_{x,r})_{x \in Z}\big]$$

et $m_R \subset R$ l'idéal maximal engendré par les variables. Alors on a

$$A/m_A^3 \ \simeq \ R/J,$$

J désignant l'idéal engendré par m_R^3 et les $\rho_{x,i}\pi_{x,j}$, $i + j > 0$, $\rho_{x,0}^2$.

9.3. DÉFORMATIONS DES EXTENSIONS LARGES

On suppose dans cette partie que le groupe de Picard de X est isomorphe à $\mathbb{Z}$, le générateur ample h étant identifié à 1. On peut donc voir la première classe de Chern d'un faisceau cohérent sur X comme un entier.

Soient $r_0, r_1, a_0, a_1, b_0, b_1$ des entiers, avec $r_0 \geq 1$, $r_1 \geq 1$. Pour $i = 0, 1$ soit $\mathbf{M}_i$ la variété de modules des faisceaux semi-stables de rang r_i et de classes de Chern a_i, b_i sur X (on suppose que $\mathbf{M}_i$ est non vide). On s'intéresse à des extensions larges du type

$$0 \longrightarrow G^*(d) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

où G^* (resp. F) est semi-stable de rang r_0 (resp. r_1) et de classes de Chern a_0, b_0 (resp. a_1, b_1). On note r, c_1, c_2 le rang et les classes de Chern de $\mathcal{E}$. On a

$$r = r_0 + r_1, \qquad c_1 = a_0 + a_1 + r_0 d, \qquad c_2 = \frac{r_0(r_0 - 1)}{2} d^2 + ((a_0 + a_1)r_0 - a_0)d + a_0 a_1 + b_0 + b_1.$$

Il existe toujours de telles extensions larges si $d \gg 0$. Dans la figure suivante est représenté le polygone de Harder-Narasimhan P_0 de $\mathcal{E}$.

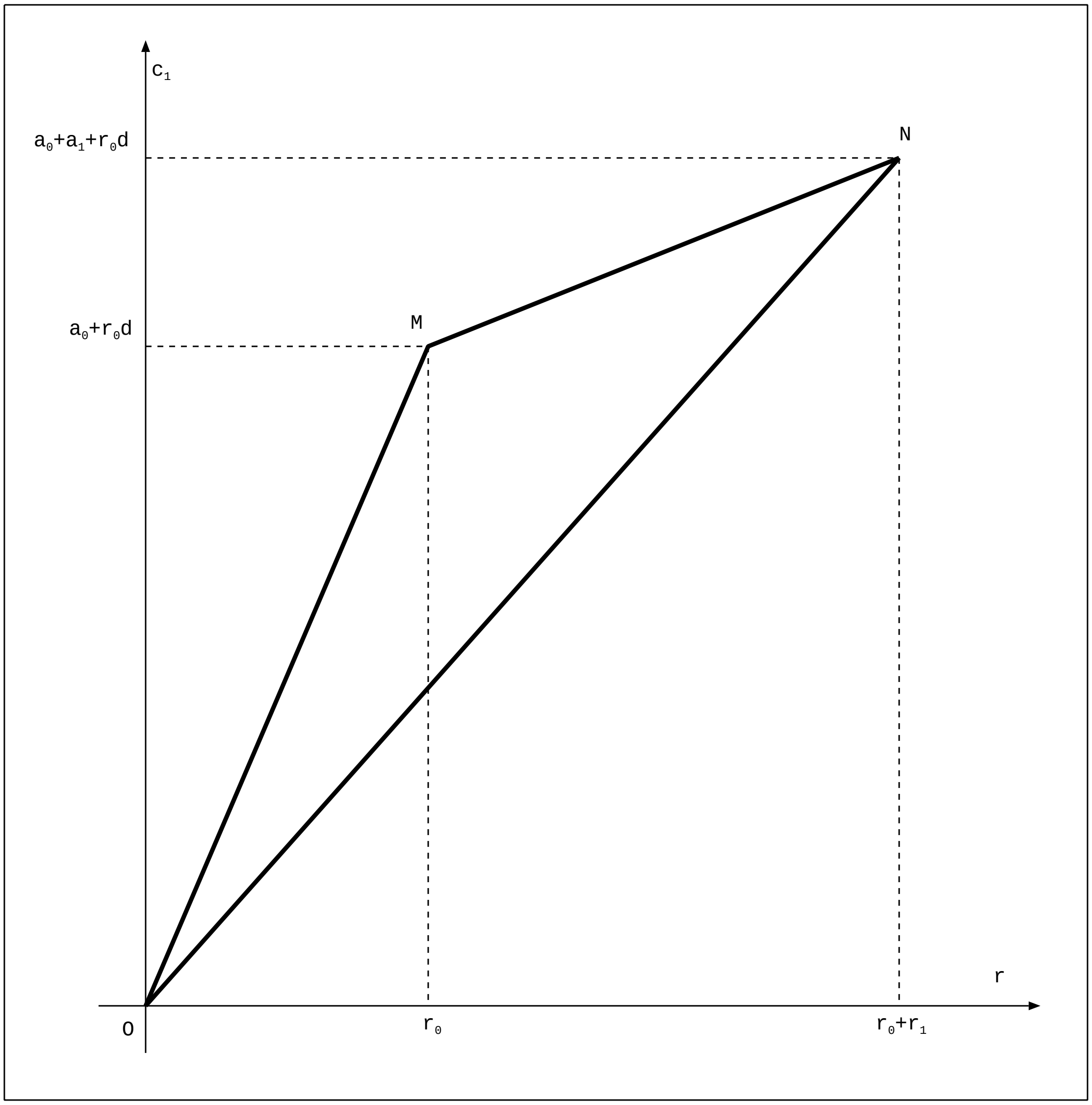

Figure 4 - Polygone de Harder-Narasimhan des extensions larges

9.3.1. Théorème : *Si $d \gg 0$ les déformations de $\mathcal{E}$ sont des extensions larges du même type.*

Démonstration. Soient E un faisceau cohérent sans torsion sur X, de rang r et de classes de Chern c_1, c_2, et

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = E$$

sa filtration de Harder-Narasimhan. Pour $1 \leq i \leq n$ soient

$$r_i = rg(E_i/E_{i-1}), \quad \alpha_i = c_1(E_i/E_{i-1}), \quad \beta_i = c_2(E_i/E_{i-1}), \quad \Delta_i = \Delta(E_i/E_{i-1}).$$

On a donc

$$\beta_i \ = \ r_i\Delta_i + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2r_i})\alpha_i^2.$$

On a

$$1 + c_1h + c_2h^2 \ = \ \prod_{i=1}^{n}(1 + \alpha_i h + \beta_i h^2),$$

donc

$$c_1 \;=\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i,$$

$$\begin{aligned}
c_2 &= \sum_{1\leq i<j\leq n} \alpha_i\alpha_j + \sum_{i=1}^{n}\beta_i \\
&= \frac{1}{2}\big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\big)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 + \sum_{i=1}^{n} r_i\Delta_i + \sum_{i=1}^{n}\big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2r_i}\big)\alpha_i^2 \\
&= \frac{1}{2}c_1^2 + \sum_{i=1}^{n} r_i\Delta_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i^2}{r_i}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i^2}{r_i} \;=\; r_0d^2 + 2a_0d + 2\sum_{i=1}^{n} r_i\Delta_i + a_0^2 + a_1^2 - 2b_0 - 2b_1.$$

Pour tout i on a $\Delta_i \geq 0$ (*inégalité de Bogomolov*, cf. [4], [12], [21]). Il existe donc une constante C (indépendante de d et de E) telle que l'on ait

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i^2}{r_i} \;\geq\; r_0d^2 + 2a_0d + C.$$

On utilise les notations de 2.5. Si $P \in \mathcal{P}(r, c_1)$ rappelons qu'on note aussi P la fonction $[0, r] \to \mathbb{R}$ associée, et P' sa dérivée (définie en dehors des sommets de P). Si $P = P(E)$ l'inégalité précédente s'écrit

$$\int_0^r P'(x)^2dx \;\geq\; r_0d^2 + 2a_0d + C.$$

On pose

$$m(d, r_0, r_1, a_0, a_1) \;=\; \sup_{P\in\mathcal{P}(r,c_1),P<P_0}\big(\int_0^r P'(x)^2dx\big).$$

D'après la proposition 2.10.2 on a

$$m(d, r_0, r_1, a_0, a_1) \;\leq\; \int_0^r P_0'(x)^2dx.$$

On suppose d'abord prouvé le résultat suivant :

9.3.2. Proposition : *On a* $\lim_{d\to\infty}\big(r_0d^2 + 2a_0d - m(d, r_0, r_1, a_0, a_1)\big) = \infty$.

On va en déduire le théorème 9.3.1. Il faut montrer que les polygones de Harder-Narasimhan des déformations de $\mathcal{E}$ sont égaux à P_0. D'aprés la proposition 2.5.1 les déformations de $\mathcal{E}$ ont un polygone de Harder-Narasimhan $P \leq P_0$. On peut même supposer que $P < P_0$ car P_0 n'a que trois sommets. On a vu que

$$\int_0^r P'(x)^2dx \;\geq\; r_0d^2 + 2a_0d + C,$$

mais ceci contredit la proposition 9.3.2. Le théorème 9.3.1 est donc prouvé.

Démontrons maintenant la proposition 9.3.2. Considèrons la figure 4. Soient $Q_0 \in OM$, $Q_1 \in MN$ des points à coordonnées entières. On suppose que $(Q_0, Q_1) \neq (O, N)$, et Q_0, Q_1 distincts de M. Il existe un nombre fini, indépendant de d, de tels points. Les points Q_0, Q_1 sont entièrement déterminés par leur abscisse s_0, s_1 respectivement. On note $\mathcal{P}_{d,Q_0,Q_1}$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(r, c_1)$ constitué des polygones $P < P_0$ contenant Q_0 et Q_1.

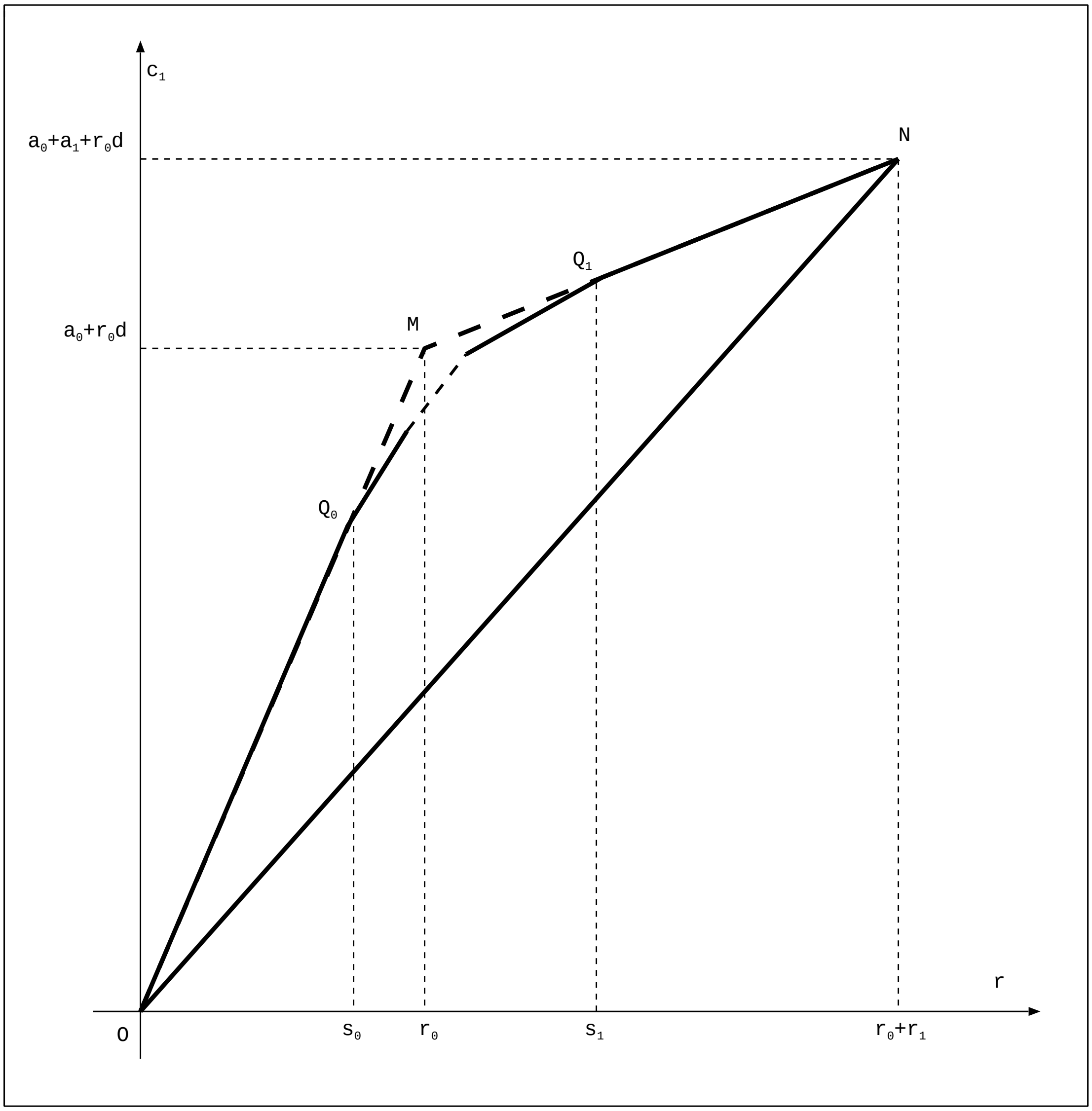

Figure 5 - Polygones de $\mathcal{P}_{d,Q_0,Q_1}$

Si $P \in \mathcal{P}_{d,Q_0,Q_1}$ on a donc $OQ_0 \subset P$ et $Q_1N \subset P$. Soient $\mathcal{P}_d \subset \mathcal{P}(r, c_1)$ le sous-ensemble constitué des polygones $P < P_0$ et $\mathcal{P}'_d \subset \mathcal{P}_d$ le complément de l'union des $\mathcal{P}_{d,Q_0,Q_1}$ (avec $(Q_0, Q_1) \neq (O, N)$).

On démontre la proposition 9.3.2 par récurrence sur r. Le premier cas est $r = 2$. Dans ce cas on a $r_0 = r_1 = 1$, et

$$m(d, 1, 1, a_0, a_1) \;=\; (d + a_0 - 1)^2 + (a_1 + 1)^2 \;=\; d^2 + 2(a_0 - 1)d + (a_0 - 1)^2 + (a_1 + 1)^2.$$

Cette valeur est obtenue pour le polygone maximal de $\mathcal{P}_d$, dont le sommet du milieu est $(1, a_0+d-1)$. On a donc

$$r_0d^2+2a_0d-m(d,1,1,a_0,a_1) \;=\; 2d-(a_0-1)^2-(a_1+1)^2,$$

d'où la proposition 9.3.2 dans ce cas.

On suppose maintenant que la proposition est prouvée si $r<R$, et que $r=R>2$. Soient $Q_0\in OM$, $Q_1\in MN$ comme précédemment, et $a'_0=a_0s_0/r_0$. Soient $P\in\mathcal{P}_{d,Q_0,Q_1}$ et $\overline{P}$ la restriction de P à $[s_0,s_1]$. On a

$$\int_0^r P'(x)^2dx \;=\; s_0d^2+2a'_0d+\frac{{a'_0}^2}{s_0}+(r_1-s_1)\frac{a_1^2}{r_1}+\int_{s_0}^{s_1}\overline{P}'(x)^2dx.$$

Donc

$$r_0d^2+2a_0d-\int_0^r P'(x)^2dx \;=\; (r_0-s_0)d^2+2(a_0-a'_0)d-\int_{s_0}^{s_1}\overline{P}'(x)^2dx-\frac{{a'_0}^2}{s_0}-(r_1-s_1)\frac{a_1^2}{r_1}.$$

Soit $\rho>0$. L'hypothèse de récurrence appliquée au cas $r=s_1-s_0$ montre que

$$(r_0-s_0)d^2+2(a_0-a'_0)d-\int_{s_0}^{s_1}\overline{P}'(x)^2dx \;\geq\; \rho$$

pour $d\gg 0$. On a donc

$$(1)\qquad r_0d^2+2a_0d-\int_0^r P'(x)^2dx \;\geq\; \rho-\frac{{a'_0}^2}{s_0}-(r_1-s_1)\frac{a_1^2}{r_1}$$

pour $d\gg 0$.

On considère maintenant les polygones de $\mathcal{P}'_d$. La pente de leur dernier coté est supérieure à a_1/r_1. Il existe même un nombre rationnel $\alpha>a_1/r_1$ tel que cette pente soit supérieure ou égale à α, quel que soit d. Soient M' le point d'abscisse r_0 de la droite de pente α passant par N, et $\beta=MM'$, qui est indépendant de d. Alors tout polygone de $\mathcal{P}'_d$ est inférieur ou égal au polygone P_1 suivant :

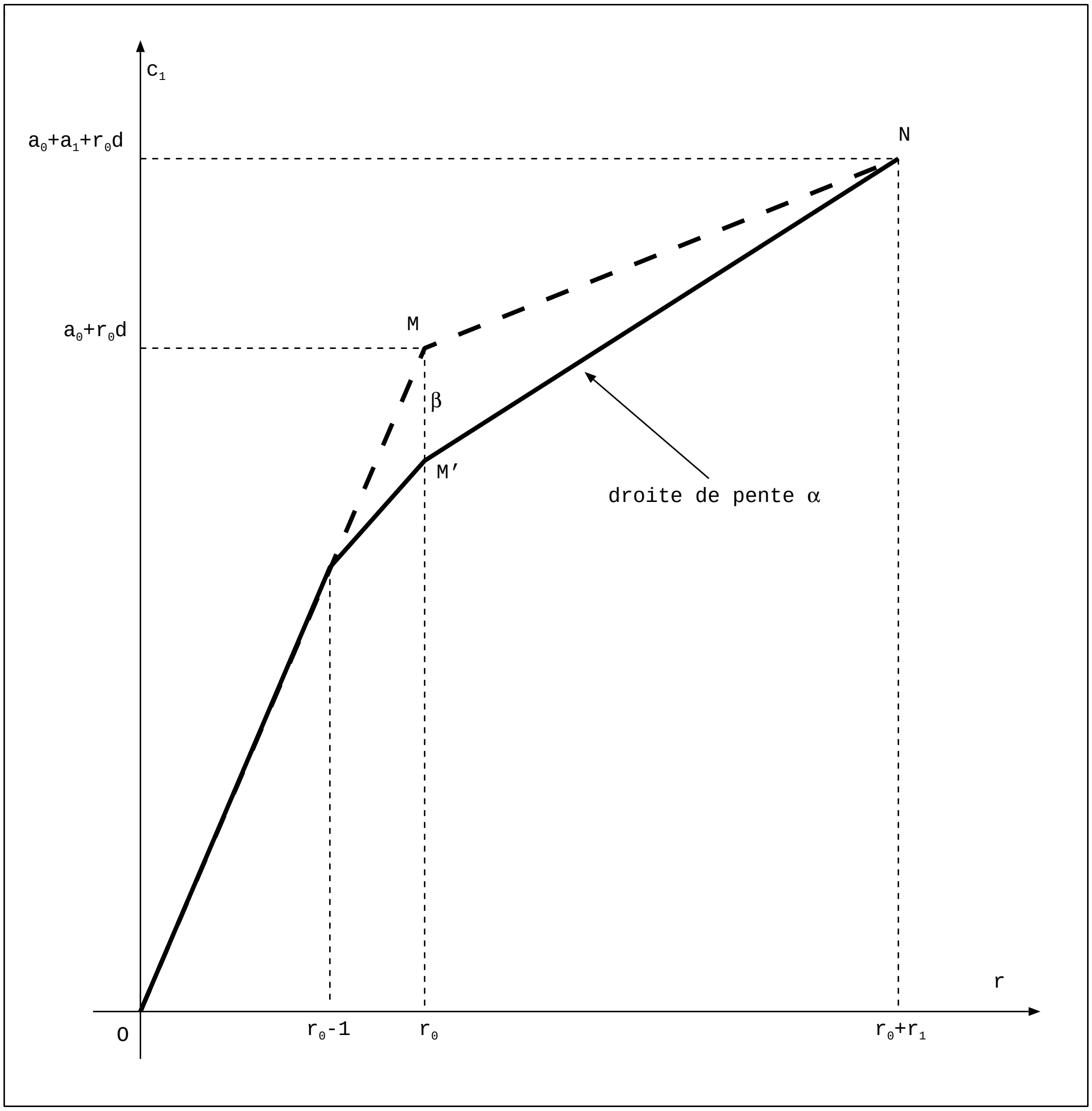
c_1
$a_0+a_1+r_0d$
N
a_0+r_0d
M
β
M′
droite de pente α
r
O
r_0-1
r_0
r_0+r_1

FIGURE 6 - Polygone P_1

Soit $P \in \mathcal{P}'_d$. D'après la proposition 2.10.2 on a donc

$$\int_0^r P'(x)^2 dx \ \leq \ \int_0^r P_1'(x)^2 dx.$$

On a

$$\int_0^r P_1'(x)^2 dx \ = \ r_0^2 d + 2(a_0-\beta)d + \frac{a_0^2}{r_0^2}(r_0-1) + (\frac{a_0}{r_0}-\beta)^2 + \alpha^2 r_1,$$

d'où

$$r_0 d^2 + 2a_0 d - \int_0^r P'(x)^2 dx \ \geq \ 2\beta d - \frac{a_0^2}{r_0^2}(r_0-1) - (\frac{a_0}{r_0}-\beta)^2 - \alpha^2 r_1,$$

ce qui, avec l'inégalité (1), démontre la proposition 9.3.2.

□

RÉFÉRENCES

[1] Bănică, C. *Topologisch triviale holomorphe Vectorbündel auf* $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Journ. Reine angew. Math. 344 (1983), 102-119.

[2] Bănică, C. *Sur les fibrés instables de rang 2 sur* $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$. Arch. der Math. 43 (1984), 250-257.

[3] Barth, W., Van de Ven, A. *A decomposability criterion for algebraic 2-bundles on projective spaces.* Invent. Math. 25 (1974), 91-106.

[4] Bogomolov, F.A. *Holomorphic tensors and vector bundles.* Izv. Akad. Nauk SSSR 42, 6 (1978), 1227-1287. Transl. : Math. USSR Izv. 13 (1979), 499-555.

[5] Drézet, J.-M. *Variétés de modules alternatives.* Ann. de l'Inst. Fourier 49 (1999), 57-139.

[6] Drézet, J.-M. *Fibrés exceptionnels et suite spectrale de Beilinson généralisée sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Math. Ann. 275 (1986), 25-48.

[7] Drézet, J.-M. *Fibrés exceptionnels et variétés de modules de faisceaux semi-stables sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Journ. Reine angew. Math. 380 (1987), 14-58.

[8] Drézet, J.-M. *Sur les équations vérifiées par les invariants de fibrés exceptionnels.* Forum Math. 8 (1996), 237-265.

[9] Drézet, J.-M., Le Potier, J. *Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur* $\mathbb{P}_2$. Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 18 (1985), 193-244.

[10] Drézet, J.-M., Trautmann, G. *Moduli spaces of decomposable morphisms of sheaves and quotients by non-reductive groups.* preprint (2001).

[11] Ferrand, D. *Courbes gauches et fibrés de rang 2.* C. R. Acad. Sci. Paris 281 A (1975), 345-347.

[12] Gieseker, D. *On a theorem of Bogomolov on Chern classes of stable bundles.* Am. J. Math. 101 (1979), 77-85.

[13] Godement, R. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Actualités scientifiques et industrielles 1252, Hermann, Paris (1964).

[14] Griffiths, P., Harris, J. *Principles of algebraic geometry.* Wiley-Interscience (1978).

[15] Grothendieck, A. et al. SGA1. *Revêtements Etales et Groupe Fondamental.* SGA1. Lect. Notes in Math. 224. Springer-Verlag (1971).

[16] Hartshorne, R. *Varieties of small codimension in projective space.* Bull. AMS 80 (1974), 1017-1032.

[17] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry.* GTM 52, Springer-Verlag (1977).

[18] Hartshorne, R. *Stable vector bundles of rank 2 on* $\mathbb{P}_3$. Math. Ann. 238 (1978), 229-280.

[19] Hirschowitz, A., Laszlo, Y. *Fibrés génériques sur le plan projectif.* Math. Ann. 297 (1993), 85-102.

[20] Horrocks, G. *A construction for locally free sheaves.* Topology 7 (1968), 117-120.

[21] Huybrechts, D., Lehn, M. *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves.* Aspect of Math. E31, Vieweg (1997).

[22] Kleiman, S. *Relative duality for quasi-coherent sheaves.* Comp. Math. 41 (1980), 39-60.

[23] Lang, S. *Algebra* . Second Edition. Addison-Wesley. (1984).

[24] Lange, H. *Invertierbare Untergarben maximalen Grades vom Rang 2 Vektorbündel auf der projektiven Ebene.* Arch. Math. 34 (1980), 313-321.

[25] Laudal, O.A. *Formal moduli of algebraic structures.* Lect. Notes. Math. 754, Springer-Verlag (1979).

[26] Lehn, M. *On the cotangent sheaf of Quot-schemes.* Intern. J. of Math. 9 (1998), 513-522.

[27] Le Potier, J., Verdier, J.-L., editors. *Module Des Fibrés Stables Sur Les Courbes Algébriques.* Progress in Math. 54, Birkhäuser (1985).

[28] Le Potier, J. *Systèmes cohérents et structures de niveau.* Astérisque 214 (1993).

[29] Le Potier, J. *Stabilité et amplitude sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Proc. Nice Conf. 1979, Vector bundles and differential equations. Progress in Math. 7, Birkhäuser (1980).

[30] Li, J., Tian, G. *Virtual moduli cycles and Gromov-Witten invariants of algebraic varieties.* J. Amer. Math. Soc. 11 (1998), 119-174.

[31] O'Grady, K. *Desingularized moduli spaces of sheaves on a K3.* J. reine angew. Math. 512 (1999), 49-117.

[32] Martin-Deschamps, M., Perrin, D. *Le schéma de Hilbert des courbes gauches localement Cohen-Macaulay n'est (presque) jamais réduit.* Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 29 (1996), 757-785.

[33] Maruyama, M. *Moduli of stable sheaves I.* J. Math. Kyoto Univ. 17 (1977), 91-126.

[34] Maruyama, M. *Moduli of stable sheaves II.* J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978), 577-614.

[35] Mestrano, N. Ramanan, S. *Poincaré bundles for families of curves.* J. reine angew. Math. 362 (1985), 169-178.

[36] Mumford, D., Fogarty, J. *Geometric invariant theory.* Ergeb. Math. Grenzgeb. Bd. 34. Berlin Heidelberg New-York : Springer (1982)

[37] Newstead, P.E. *Introduction to moduli problems and orbit spaces.* TIFR Lect. Notes. Math. vol. 51. Berlin Heidelberg New-York : Springer (1978)

[38] Okonek, C., Schneider, M., Spindler, H. *Vector bundles on complex projective spaces.* Progress in Math. 3, Birkhäuser (1980).

[39] Ramanan, S. *The Moduli Spaces of Vector Bundles over an Algebraic Curve.* Math. Ann. 200 (1973), 69-84.

[40] Rego, C.J. *Deformation of modules on curves and surfaces.* Singularities, Representations of Algebras and Vector Bundles, Proceedings Lambrecht 1985, Lect. Notes in Math. 1273, Springer-Verlag (1987), 157-167.

[41] Schafft, U. *Nichtsepariertheit instabiler Rang-2-Vektorbündel auf* $\mathbb{P}_2$. Dissertation, Göttingen 1981.

[42] Schlessinger, M. *Functors of Artin rings.* Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968), 208-222.

[43] Schneider, M. *Stabile Vektorraumbündel vom Rang 2 auf der projektiven Ebene.* Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys. Klasse (1976), 83-86.

[44] Seshadri, C.S. *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques.* Astérisque 96 (1982).

[45] Shatz, S. *The decomposition and specializations of algebraic families of vector bundles.* Comp. Math. 35 (1977), 163-187.

[46] Simpson, C.T. *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety I.* Publ. Math. IHES 79 (1994), 47-129.

[47] Siu Y., Trautmann, G. *Deformations of coherent analytic sheaves with compact supports.* Memoirs of the Amer. Math. Soc., Vol. 29, N. 238 (1981).

[48] Strømme, S.A. *Deforming vector bundles on the projective plane.* Math. Ann. 263 (1983), 385-397.

[49] Strømme, S.A. *Local moduli for rank-2 bundles on* $\mathbb{P}_2$ *: second order deformations.* preprint 1983).

[50] Yoshioka, K. *A note on the universal family of moduli of stable sheaves.* Journ. Reine angew. Math. 496 (1998), 149-161.

Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France

E-mail address: `drezet@math.jussieu.fr`

URL: `http://www.math.jussieu.fr/∼drezet`