VARIÉTÉS DE MODULES ALTERNATIVES

JEAN–MARC DRÉZET

Sommaire

1. Introduction

Soit X une variété algébrique complexe projective lisse et irréductible, de dimension d, munie d'un fibré très ample $\mathcal{O}_X(1)$. On définit précisément au § 2 ce qu'est une *variété de modules fins définie globalement* de faisceaux cohérents sur X. C'est la donnée d'une variété intègre M, d'un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur $M \times X$, plat sur M, tel que pour tous $x, y \in M$ distincts, les faisceaux $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$ ne soient pas isomorphes, que $\mathcal{E}$ soit une déformation complète de $\mathcal{E}_x$, et que $\mathcal{E}$ possède une propriété universelle locale évidente. Dans ce cas on peut voir M comme un ensemble de classes d'isomorphisme de faisceaux muni d'une structure algébrique naturelle. Les exemples les plus connus sont certaines variétés de modules de faisceaux stables. Mais toutes ne sont pas dotées d'un *faisceau universel*, et ne sont donc pas des variétés de modules fins (cf. [4], [33]). Il existe beaucoup d'autres variétés de modules fins que celles qui sont constituées de faisceaux stables.

Si on s'intéresse à des faisceaux non *simples* il est nécessaire d'avoir une définition moins stricte. On introduit la notion de *variété de modules fins définie localement*, où le faisceau $\mathcal{E}$ est remplacé par une famille $(\mathcal{E}_i)$ de faisceaux, $\mathcal{E}_i$ étant défini sur $U_i \times X$, U_i étant un ouvert de M. Pour tout $x \in U_i \cap U_j$ on doit avoir $\mathcal{E}_{ix} \simeq \mathcal{E}_{jx}$. Si les faisceaux $\mathcal{E}_{ix}$ ne sont pas simples, on ne peut pas en général *recoller* les $\mathcal{E}_i$ pour obtenir un faisceau global $\mathcal{E}$.

Il existe ensuite une série de définitions de moins en moins strictes de variétés de modules, jusqu'à la notion d'*espace de modules grossiers*, où il n'est plus question de faisceau universel.

Le présent article est consacré à l'étude des variétés de modules fins (définies localement ou non). On peut se fixer le rang r et les classes de Chern $c_i \in H^i(X, \mathbb{Z})$ des faisceaux à considérer. On peut distinguer trois principaux cas :

(i) Il n'existe pas de faisceau semi-stable de rang r et de classes de Chern c_i.

(ii) On s'intéresse aux variétés de modules fins contenant un ouvert non vide de faisceaux stables.

(iii) Il existe des faisceaux semi-stables de rang r et de classes de Chern c_i, mais on s'intéresse aux variétés de modules fins n'en contenant aucun.

On s'intéresse surtout ici aux deux premiers cas. Le troisième a déjà été exploré par S.A. Strømme (cf. [32]), mais dans ce cas il faudrait sans doute introduire des variétés de modules non réduites.

On prouve d'abord des résultats généraux sur les variétés de modules fins. On donne ensuite trois types d'exemples.

Dans le premier on s'intéresse aux *faisceaux prioritaires* sur le plan projectif. Ce sont des faisceaux un peu plus généraux que les faisceaux semi-stables. On construit des variétés de modules fins de faisceaux prioritaires de rang et classes de Chern donnés lorsqu'il n'existe aucun faisceau semi-stable ayant les mêmes invariants. Ceci permet de trouver un exemple de variété de modules fins projective définie localement mais non globalement.

Dans le second on traite les faisceaux simples de rang 1 (sur $X = \mathbb{P}_2$ ou $X = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$). On donne ici un exemple de variété de modules fins non projective mais maximale.

Dans le troisième on construit des variétés de modules fins de faisceaux cohérents à partir de variétés de modules de morphismes de faisceaux. On en déduit d'abord l'existence de fibrés simples sur le plan projectif qui sont des déformations de fibrés stables, mais qui ne peuvent être inclus dans aucune variété de modules fins (dans ces exemples la variété de modules des faisceaux stables correspondante est une variété de modules fins). On donne ensuite un exemple de variété de modules fins constituée de faisceaux simples sans torsion et qui est projective. Cette variété est différente de la variété de modules de faisceaux stables correspondante, et possède un ouvert non vide commun avec elle.

Plan des chapitres suivants :

Le chapitre 2 de cet article est consacré à la théorie générale des variétés de modules fins de faisceaux cohérents sur X. On montre que tous les faisceaux d'une variété de modules fins ont un espace d'endomorphismes de la même dimension (proposition 2.2), et que les variétés de modules fins définies localement de faisceaux simples sont en fait définies globalement (proposition 2.8).

On définit ensuite au § 2.7 des *variétés de modules fins d'extensions*. Soient $(M, \mathcal{E})$, $(N, \mathcal{F})$ des variétés de modules fins. On suppose que pour tous $x \in M$, $y \in N$, on a

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_x, \mathcal{F}_y) = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_x, \mathcal{F}_y) = \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x) = \mathrm{Ext}^2(\mathcal{F}_y, \mathcal{F}_y) =$$

$$\mathrm{Ext}^2(\mathcal{F}_y, \mathcal{E}_x) = \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}_x, \mathcal{F}_y) = \{0\}.$$

On considère les extensions

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_x \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{F}_y \longrightarrow 0$$

telles que l'application linéaire induite

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x) \oplus \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_y, \mathcal{F}_y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}_y, \mathcal{E}_x)$$

soit surjective. On montre qu'il existe une variété de modules fins définie localement pour de telles extensions, qui est un ouvert de $M \times N$. C'est un moyen d'obtenir des variétés de modules fins de faisceaux non simples.

Le chapitre 3 traite des *faisceaux prioritaires* sur le plan projectif. On dit qu'un faisceau cohérent E sur $\mathbb{P}_2$ est prioritaire s'il est sans torsion et si on a $\mathrm{Ext}^2(E, E(-1)) = \{0\}$. Ces faisceaux ont été introduits par A. Hirschowitz et Y. Laszlo dans [17]. On s'intéresse aux rangs r et classes de Chern c_1, c_2 tels qu'il existe des faisceaux prioritaires, mais pas de faisceau semi-stable de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. On donne dans ce cas une description des *faisceaux prioritaires génériques*. Suivant les valeurs de r, c_1 et c_2 deux cas peuvent se produire :

1 - Il existe un unique faisceau prioritaire générique, de la forme

$$(E \otimes \mathbb{C}^m) \oplus (F \otimes \mathbb{C}^n) \oplus (G \otimes \mathbb{C}^p),$$

E, F et G étant des *fibrés exceptionnels* sur $\mathbb{P}_2$. Il existe dans ce cas une unique variété de modules fins de faisceaux prioritaires, réduite à un seul point.

2 - Il existe une variété de modules de faisceaux stables M, un entier p et un fibré exceptionnel F tels que le faisceau prioritaire générique soit de la forme

$$\mathcal{E} \;=\; (F \otimes \mathbb{C}^p) \oplus E$$

avec E dans M. En utilisant le théorème 2.7 on construit alors une variété de modules fins définie localement de faisceaux prioritaires qui sont des extensions

$$0 \longrightarrow F \otimes \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

avec E dans M. Dans un certain nombre de cas cette variété de modules fins est isomorphe à M. On montre au § 3.4.2.4 qu'il existe des cas où la variété de modules fins n'est pas définie globalement.

Dans le chapitre 4 on s'intéresse aux faisceaux simples de rang 1. On montre (théorème 4.2) que si $X = \mathbb{P}_2$ ou $X = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, toute variété de modules fins de faisceaux simples de rang 1 contient un ouvert dense constitué de faisceaux d'idéaux de sous-schémas finis. On donne ensuite (théorème 4.7) des exemples de variétés de modules fins de faisceaux simples de rang 1 qui sont maximales, mais non projectives.

Dans le chapitre 5 on s'intéresse aux variétés de modules fins de faisceaux sur $\mathbb{P}_2$ construites à partir de variétés de modules de morphismes (cf. [3], [19], [20], [11], [7], [8]). On peut faire la même étude sur n'importe quelle variété dotée d'une bonne théorie des fibrés exceptionnels (comme par exemple les surfaces de Del Pezzo ou les espaces projectifs de dimension supérieure).

Commençons par le type le plus simple de morphisme. Soient (E, F) une paire exceptionnelle sur $\mathbb{P}_2$, m, n des entiers positifs premiers entre eux et tels que

$$n.rg(F) - m.rg(E) \;>\; 0.$$

On considère les morphismes

$$E \otimes \mathbb{C}^m \longrightarrow F \otimes \mathbb{C}^n.$$

Soit W l'espace vectoriel des tels morphismes. Sur $\mathbb{P}(W)$ opère le groupe algébrique réductif $SL(m) \times SL(n)$. On a donc une notion de *morphisme semi-stable* et une variété de modules de morphismes N qui est lisse et projective. Soient r le rang et c_1, c_2 les classes de Chern des conoyaux de tels morphismes injectifs. Si m/n est suffisamment petit on montre dans [3] que les morphismes stables sont injectifs, et que leurs conoyaux sont les faisceaux stables de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. En général, soit N_0 l'ouvert de N constitué des morphismes injectifs. On construit une variété de modules fins isomorphe à N_0 constituée des conoyaux des morphismes stables injectifs. On en déduit au § 5.3.2 une variété de modules fins projective comportant un ouvert constitué de faisceaux stables, mais différente de la variété de modules de ces faisceaux stables. Cette variété de modules fins contient aussi des faisceaux ayant de la torsion. Réciproquement, on montre aussi que si le conoyau d'un morphisme injectif f fait partie d'une variété de modules fins, alors f est stable. On en déduit au § 5.3.1 des exemples de fibrés simples sur $\mathbb{P}_2$ qui sont des déformations de faisceaux stables mais qui ne peuvent pas être inclus dans une variété de modules fins.

Soit (E, G, F) une suite exceptionnelle sur $\mathbb{P}_2$ (aussi appelée *triade*). On peut aussi considérer des morphismes du type

$$E \otimes \mathbb{C}^m \longrightarrow (F \otimes \mathbb{C}^n) \oplus (G \otimes \mathbb{C}^p).$$

On construit dans [11], [7] et [8] des variétés de modules de tels morphismes. On a ici une action du groupe algébrique non réductif $GL(m) \times \mathrm{Aut}((F \otimes \mathbb{C}^n) \oplus (G \otimes \mathbb{C}^p))$. On définit une notion de stabilité pour les morphismes précédents à partir d'une paire (λ, μ) de nombres rationnels positifs tels que $n\lambda + p\mu = 1$ (appelée *polarisation*). D'après [6] certaines variétés de modules *extrémales* de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$ sont isomorphes à de telles variétés de modules de morphismes. On considère au § 5.3.3 des morphismes

$$\mathcal{O}(-3) \otimes \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathcal{O}(-2) \oplus (\mathcal{O}(-1) \otimes \mathbb{C}^7).$$

Si

$$(\lambda, \mu) \ = \ (\frac{3}{10} + \epsilon, \frac{1}{10} - \frac{\epsilon}{7})$$

(avec ϵ suffisamment petit) les morphismes stables sont injectifs et leurs conoyaux sont les faisceaux stables de rang 6 et de classes de Chern -3 et 8. Si

$$\lambda \ > \ \frac{1}{2}$$

les morphismes stables sont encore injectifs mais il peut arriver que le conoyau ne soit pas stable. On obtient dans ce cas une variété de modules fins (isomorphe à la variété de modules de morphismes) constituée de faisceaux sans torsion, qui est projective, et qui contient des faisceaux stables et des faisceaux instables.

Questions

1 - Toute variété de modules fins peut-elle être contenue dans une variété de modules fins maximale ? Existe-t'il une suite infinie de variétés de modules fins

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \ldots,$$

les inclusions étant strictes ?

2 - Existe t'il un nombre fini de variétés de modules fins maximales contenant un faisceau donné ?

3 - On trouve au § 5.3.1 des faisceaux simples qui sont des déformations de faisceaux stables mais qui ne peuvent pas être inclus dans une variété de modules fins. Comment caractériser les faisceaux (simples ou non) qui peuvent faire partie de variétés de modules fins ?

4 - On trouve au §5.3.3 des variétés de modules fins projectives (et donc maximales) de faisceaux simples sans torsion contenant à la fois des faisceaux stables et des faisceaux instables. Comment caractériser les variétés de modules fins de faisceaux stables ?

5 - Parmi les faisceaux pouvant être inclus dans une variété de modules fins on considère la relation suivante : $E \sim F$ s'il existe un germe de courbe lisse (C, x_0) et des faisceaux cohérents $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ sur $X \times C$, plats sur C, tels que $\mathcal{E}_{x_0} \simeq E$, $\mathcal{F}_{x_0} \simeq F$, et $\mathcal{E}_x \simeq \mathcal{F}_x$ si $x \neq x_0$. Quelles sont les classes d'équivalence d'un faisceau cohérent donné (pour la relation d'équivalence définie par la relation précédente) ? (cette relation d'équivalence est étudiée au § 2.8).

Notations et rappels :

Les *points* d'une variété algébrique sont ses points fermés.

Soit P un polynôme à coefficients rationnels, E un faisceau cohérent sur X. On note $\mathbf{Hilb}^P(E)$ le schéma de Hilbert-Grothendieck des quotients de E de polynôme de Hilbert P (cf [15], [23]).

Si $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ sont des faisceaux cohérents sur une variété algébrique, $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ désigne l'espace vectoriel des morphismes de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$, et $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ le faisceau des morphismes de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.

On note $j : X \longrightarrow \mathbb{P}_n$ le plongement défini par $\mathcal{O}_X(1)$, et Q le fibré quotient canonique sur $\mathbb{P}_n$.

Rappelons que le théorème de Riemann-Roch s'écrit pour un faisceau cohérent E de rang $r > 0$ sur une surface projective lisse irréductible X s'écrit

$$\chi(E) \ = \ rg(E).(P(\mu(E)) - \Delta(E)),$$

$\chi(E)$ désignant la caractérisitique d'Euler-Poincaré de E, avec

$$P(\mu) \ = \ \frac{\mu(\mu - \omega_X)}{2} + \chi(\mathcal{O}_X)$$

pour tout $\mu \in A^1(X) \otimes \mathbb{Q}$, ω_X désignant le fibré canonique sur X et

$$\mu(E) \ = \ \frac{c_1(E)}{r}, \qquad \Delta(E) \ = \ \frac{1}{r}(c_2(E) - \frac{r-1}{2r} c_1(E)^2).$$

Si E, F sont des faisceaux cohérents sur X, on pose

$$\chi(E, F) \ = \ \sum_{0 \leq i \leq 2} (-1)^i \dim(\mathrm{Ext}^i(E, F)).$$

On a, si $rg(E) > 0$ et $rg(F) > 0$,

$$\chi(E, F) \ = \ rg(E).rg(F).(P(\mu(F) - \mu(E)) - \Delta(E) - \Delta(F)).$$

Si E et F ne sont plus nécessairement de rang positif, on a

$$\begin{aligned} \chi(E, F) \ = \ & -c_1(E)c_1(F) - rg(E)c_2(F) - rg(F)c_2(E) + rg(E)rg(F)\chi(\mathcal{O}_X) \\ & + \frac{1}{2}(rg(F).\omega_X c_1(E) - rg(E).\omega_X c_1(F) + rg(E)c_1(F)^2 + rg(F)c_1(E)^2). \end{aligned}$$

On a en général, pour tout entier i, un isomorphisme canonique
$\mathrm{Ext}^i(E,F) \ \simeq \ \mathrm{Ext}^{2-i}(F, E\otimes K_X)^*$ (dualité de Serre, cf. [9], prop. (1.2)).

Soient F un faisceau cohérent sur une variété algébrique et

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{n-1} \subset F_n = F$$

une filtration de F. Soit $E_i = F_i/F_{i-1}$. Il existe alors une suite spectrale bien connue E_r^{pq} d'aboutissement $\mathrm{Ext}^{\cdot}(F,F)$ et telle que

$$E_1^{pq} \ = \ \bigoplus_i \mathrm{Ext}^{p+q}(E_i, E_{i-p}).$$

La construction de cette suite spectrale est similaire à celle qui est effectuée dans le § 1.5 de [9].

2. Variétés de modules fins

2.1. Familles de faisceaux cohérents

Soit S une variété algébrique.

Définition 1. *On appelle* famille de faisceaux sur X paramétrée par S *un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $S\times X$, plat sur S.*

Définition 2. *On appelle* polyfamille de faisceaux sur X paramétrée par S *la donnée d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de S, et pour tout $i\in I$ d'une famille $\mathcal{E}_i$ de faisceaux sur X paramétrée par U_i, tels que pour tous $i,j\in I$ et tout $x\in U_i\cap U_j$ on ait $\mathcal{E}_{i,x}\simeq\mathcal{E}_{j,x}$.*

Notations : Pour toute sous-variété localament fermée S' de S, on note

$$\mathcal{F}_{S'} \ = \ \mathcal{F}_{|S'\times X}.$$

Si S' est réduite à un point s on notera plus simplement $\mathcal{F}_{S'} = \mathcal{F}_s$. On note p_S (resp. p_X) la projection $S\times X \longrightarrow S$ (resp. $S\times X\longrightarrow X$). Si $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sont des faisceaux cohérents sur $S\times X$, S et X respectivement, on notera plus simplement

$$\mathcal{E}\otimes p_S^*(\mathcal{F})\otimes p_X^*(\mathcal{G}) \ = \ \mathcal{E}\otimes\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}.$$

Si $f : T\longrightarrow S$ est un morphisme de variétés algébriques, et $\mathcal{F}$ une famille de faisceaux sur X paramétrée par S, on note

$$f^\sharp(\mathcal{F}) \ = \ (f\times I_X)^*(\mathcal{F}).$$

C'est une famille de faisceaux sur X paramétrée par T.

Si $\mathcal{X}$ est un ensemble non vide de classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents sur X, on appelle *famille de faisceaux de $\mathcal{X}$ paramétrée par S* une famille $\mathcal{F}$ de faisceaux cohérents sur X paramétrée par S telle que pour tout point s de S la classe d'isomorphisme de $\mathcal{F}_s$ soit dans $\mathcal{X}$.

2.2. Ensembles ouverts de faisceaux cohérents sur X

Soient r, $c_i \in H^i(X,\mathbb{Z})$, $1 \leq i \leq d$, avec $r \geq 0$. Soit $\mathcal{X}$ un ensemble non vide de classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents sur X, de rang r et de classes de Chern c_i.

Définition 3. *On dit que $\mathcal{X}$ est un* ensemble ouvert *si pour toute variété algébrique S et toute famille $\mathcal{F}$ de faisceaux cohérents sur X de rang r et de classes de Chern c_i paramétrée par S, l'ensemble des points s de S tels que la classe d'isomorphisme de $\mathcal{F}_s$ soit dans $\mathcal{X}$ est un ouvert de Zariski de S.*

Définition 4. *Supposons que $\mathcal{X}$ soit un ensemble ouvert. On dit que $\mathcal{X}$ est* irréductible *si pour toutes polyfamilles de faisceaux de $\mathcal{X}$ paramétrées par des variétés algébriques X_1, X_2 respectivement, il existe un polyfamille de faisceaux de $\mathcal{X}$ paramétrée par une variété algébrique irréductible Y contenant tous les faisceaux des polyfamilles paramétrées par X_1 et X_2.*

2.3. Variétés de modules fins - Définition

Soient $r, c_i \in H^i(X,\mathbb{Z})$, $1 \leq i \leq d$, avec $r \geq 0$. Soit $\mathcal{X}$ un ensemble ouvert de faisceaux cohérents sur X de rang r et de classes de Chern c_i. On pose

$$\Delta \;=\; \frac{1}{r}(c_2 - \frac{r-1}{2r}c_1^2).$$

Définition 5. *On appelle* variété de modules fins globale*, ou plus simplement* variété de modules fins *pour $\mathcal{X}$ la donnée d'une variété algébrique intègre M et d'une famille $\mathcal{E}$ de faisceaux de $\mathcal{X}$ paramétrée par M telles que :*

(i) Pour tout élément x de $\mathcal{X}$, il existe un unique point m de M tel que la classe d'isomorphisme de $\mathcal{E}_m$ soit x.

(ii) Pour toute famille $\mathcal{F}$ de faisceaux de $\mathcal{X}$ paramétrée par une variété algébrique S, il existe un morphisme $f : S \longrightarrow M$ tel que pour tout point s de S il existe un ouvert U de S contenant s et un isomorphisme $\mathcal{F}_U \simeq f^\sharp(\mathcal{E})_U$.

On dit aussi dans ce cas que $(M,\mathcal{E})$ est une variété de modules fins pour $\mathcal{X}$. On remarquera que d'après (i), il existe une bijection canonique entre $\mathcal{X}$ et l'ensemble des points de M. D'autre part le morphisme f de (ii) est unique : l'image d'un point s de S est le point de M correspondant à $\mathcal{F}_s$.

On appelle variété de modules fins définie localement *pour $\mathcal{X}$ la donnée d'une variété algébrique intègre M, d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de M, et pour tout $i \in I$ d'une famille $\mathcal{E}_i$ de faisceaux de $\mathcal{X}$ paramétrée par U_i tels que*

(i) Pour tout élément x de $\mathcal{X}$, il existe un unique point m de M tel que pour tout $i \in I$ tel que $x \in U_i$, la classe d'isomorphisme de $\mathcal{E}_{im}$ soit x.

(ii) Pour toute famille $\mathcal{F}$ de faisceaux de $\mathcal{X}$ paramétrée par une variété algébrique S, il existe un morphisme $f : S \longrightarrow M$ tel que pour tout point s de S et tout $i \in I$ tel qu'il existe un $x \in U_i$ tel que $\mathcal{E}_{ix} \simeq \mathcal{F}_s$ il existe un ouvert U de S contenant s tel que $f(U) \subset U_i$ et un isomorphisme $\mathcal{F}_U \simeq f^\sharp(\mathcal{E}_i)_U$.

La plupart des résultats qui suivent dont la démonstration est donnée pour les variétés de modules fins sont aussi valables pour les variétés de modules fins définies localement.

Remarque : Dans ce qui précède, $(U_i), (\mathcal{E}_i)$ est donc une *polyfamille* de faisceaux de $\mathcal{X}$ paramétrée par M (cf. définition 4).

Proposition 2.1. *Si $(M, \mathcal{E})$ et $(M', \mathcal{E}')$ sont deux variétés de modules fins pour $\mathcal{X}$, il existe un isomorphisme $\phi : M \longrightarrow M'$ tel que pour tout point m de M il existe un ouvert U de M contenant m et un isomorphisme $\mathcal{E}_U \simeq \phi^\sharp(\mathcal{E}'_{\phi(U)})$.*

Réciproquement, si $(M, \mathcal{E})$ est une variété de modules fin pour $\mathcal{X}$ et si $\mathcal{E}'$ est une famille de faisceaux de $\mathcal{X}$ paramétrée par une variété algébrique réduite M' possédant la propriété précédente, alors $(M', \mathcal{E}')$ est une variété de modules fin pour $\mathcal{X}$.

Démonstration. Immédiat.

On a un résultat analogue pour les variétés de modules définies localement.

Une variété de modules fins induit naturellement une variété de modules définie localement (avec un recouvrement ouvert réduit à un seul élément). On donne au § 3.4.2.4 un exemple de variété de modules fins définie localement qui ne peut pas l'être globalement.

Il découle de la théorie des déformations des faisceaux (cf. [31]) que si $(M, \mathcal{E})$ est une variété de modules fins pour $\mathcal{X}$ et si $x \in M$, alors l'espace tangent $T_x(M)$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x)$. Il en découle en particulier que si cette dimension est indépendante de x, alors M est lisse. On a un résultat analogue pour les variétés de modules définies localement.

2.4. Endomorphismes des faisceaux d'une variété de modules fins

Proposition 2.2. *Supposons qu'il existe une variété de modules fins $(M, \mathcal{E})$ pour $\mathcal{X}$. Alors pour tout $x \in M$, $\mathrm{Aut}(\mathcal{E}_x)$ agit trivialement sur $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x)$, et $\dim(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x))$ est indépendant de x.*

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ une famille de faisceaux de $\mathcal{X}$ paramétrée par une variété algébrique Y. Il existe un entier m tel que pour tout $m' \geq m - n$ et tout $y \in Y$ on ait $h^i(\mathcal{F}_y(m')) = 0$ pour $i > 0$. On a alors un complexe

$$(\Lambda^n Q^*)(-m) \otimes G_n = R^{-n} \longrightarrow \ldots \longrightarrow (\Lambda^i Q^*)(-m) \otimes G_i = R^{-i} \longrightarrow \ldots$$
$$\ldots \longrightarrow \mathcal{O}(-m) \otimes G_0 = R^0$$

donné par la suite spectrale de Beilinson sur $\mathbb{P}_n$, avec

$$G_i \;=\; H^0(\mathcal{F}_y(m-i)).$$

Ce complexe dépend fonctoriellement de $\mathcal{F}_y$, est exact en degré < 0 et sa cohomologie en degré 0 est isomorphe à $\mathcal{F}_y$. On montre aisément que le morphisme canonique

$$\mathrm{End}(R^\cdot) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{F}_y)$$

est un isomorphisme (cela peut se faire directement ou à l'aide d'une suite spectrale comme dans le lemme 23 de [21]). Compte tenu du fait que les fibrés $\Lambda^i Q^*$ sont simples on en déduit que $\mathrm{End}(\mathcal{F}_y)$ est isomorphe au noyau de l'application canonique

$$\bigoplus_{0\leq i\leq n} L(G_i,G_i) \longrightarrow \bigoplus_{1\leq i\leq n} L(G_i,G_{i-1})\otimes \mathrm{Hom}(\Lambda^i Q^*,\Lambda^{i-1}Q^*).$$

La résolution précédente de $\mathcal{F}_y$ se globalise en une résolution localement libre sur $Y\times\mathbb{P}_n$:

$$0\longrightarrow (\Lambda^n Q^*)(-m)\otimes\mathcal{G}_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow (\Lambda^i Q^*)(-m)\otimes\mathcal{G}_i \longrightarrow \ldots$$
$$\longrightarrow \mathcal{O}(-m)\otimes\mathcal{G}_0 \longrightarrow j_*(\mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

(où j désigne ici l'inclusion $Y\times X\subset Y\times\mathbb{P}_n$). On obtient alors un morphisme canonique de fibrés vectoriels sur Y

$$\Psi : \bigoplus_{0\leq i\leq n}(\mathcal{G}_i^*\otimes\mathcal{G}_i) \longrightarrow \bigoplus_{1\leq i\leq n}(\mathcal{G}_i^*\otimes\mathcal{G}_{i-1}\otimes\mathrm{Hom}(\Lambda^i Q^*,\Lambda^{i-1}Q^*))$$

tel que pour tout $y\in Y$, on ait

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_y,\mathcal{F}_y) \;\simeq\; \ker(\Psi_y).$$

On suppose maintenant que $Y=M$ et $\mathcal{F}=\mathcal{E}$. Soit k le rang de $\ker(\Psi)$. On a donc pour tout $x\in M$, $\dim(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_x,\mathcal{E}_x))\geq k$, l'égalité étant vérifiée sur un ouvert dense de M.

Lemme 2.3. *Soient $\psi : E\longrightarrow F$ un morphisme de fibrés vectoriels sur une variété algébrique irréductible Y, p le rang de $\ker(\psi)$. Soient $y\in Y$, et $E'_y\subset E_y$ l'image dans E_y de $\ker(\psi)$. Alors on a $\dim(E'_y)\leq p$.*

Démonstration. On a une suite exacte

$$0\longrightarrow E'_y \longrightarrow E_y \longrightarrow \mathrm{Im}(\psi)_y \longrightarrow 0,$$

qui prouve que $\dim(E'_y)$ est plus petit aux points où ψ_y n'est pas de rang maximal. □

Lemme 2.4. *Soit $\mathcal{F}$ une famille de faisceaux de $\mathcal{X}$ paramétrée par une variété algébrique irréductible Y telle que l'image du morphisme induit $f : Y\longrightarrow M$ contienne un ouvert de M. Soit k la dimension générique de $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_y,\mathcal{F}_y)$ (c'est-à-dire que la dimension de cet espace vectoriel est k pour tout y dans un ouvert non vide de M). Alors pour tout $y\in Y$ il existe un sous-espace vectoriel W de $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_y,\mathcal{F}_y)$ tel que $\dim(W)\leq k$, et que pour tout $\sigma\in\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F})$, on ait $\sigma_y\in W$.*

Démonstration. Découle immédiatement du lemme précédent. □

Fin de la démonstation de la proposition 2.2. Soit m un entier tel que pour tout point x de M, $\mathcal{E}_x(m)$ soit engendré par ses sections globales, et que $h^i(\mathcal{E}_x(m))=\{0\}$ pour $i\geq 1$. Soient $p=h^0(\mathcal{E}_x(m))$, qui est indépendant de x, et P le polynôme de Hilbert des faisceaux de $\mathcal{X}$. Soient enfin

$$\mathbf{Q} \;=\; \mathbf{Hilb}^P(\mathcal{O}_X(-m)\otimes\mathbb{C}^p),$$

et

$$\pi : \mathcal{O}_X(-m)\otimes\mathbb{C}^p \longrightarrow \mathcal{F}$$

le morphisme surjectif universel sur $\mathbf{Q}\otimes X$. Sur $\mathbf{Q}$ on a une action canonique de $GL(p)$. Soit x un point de M. Soit q un point de $\mathbf{Q}$ tel que $\mathcal{F}_q\simeq\mathcal{E}_x$, et que π_q induise un isomorphisme

$\mathbb{C}^p \simeq H^0(\mathcal{F}_q(m))$. Il existe par définition de $(M, \mathcal{E})$ un ouvert U de $\mathbf{Q}$ contenant q et un morphisme $f : U \longrightarrow M$ tel que

$$f^\sharp(\mathcal{E}) \ \simeq \ \mathcal{F}_U.$$

Soit W le sous-espace vectoriel de dimension k de $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x)$ défini dans le lemme précédent, correspondant à la famille $f^\sharp(\mathcal{E})$. Rappelons que le groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}_q)$ s'identifie canoniquement au stabilisateur de q dans $GL(p)$. Soit $g \in \mathrm{Aut}(\mathcal{F}_q)$. On a un isomorphisme canonique $g^*(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}$. Au point q, cet isomorphisme n'est autre que g. Sur $Z = g^{-1}U \cap U$, on a

$$g^*(f^\sharp(\mathcal{E})) \ = \ f^\sharp(\mathcal{E}).$$

On obtient donc un automorphisme de $f^\sharp(\mathcal{E})_Z$:

$$\sigma : f^\sharp(\mathcal{E})_Z \ \simeq \ \mathcal{F}_Z \ \simeq \ g^*(\mathcal{F})_Z \ \simeq \ g^*(f^\sharp(\mathcal{E})).$$

On en déduit que $g \in W$. Donc $\dim(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x)) = k$. Pour démontrer la première assertion de la proposition 2.2, on remarque que le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer de $g^*(f^\sharp(\mathcal{E}))$ au point q n'est autre que la composée de celui de $f^\sharp(\mathcal{E})$ et de la multiplication par g dans $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x)$. Mais les deux morphismes de déformations sont égaux à l'application tangente de f en q. $\square$

On déduit de la proposition 2.2 la

Proposition 2.5. *Supposons que X soit une surface K3 et que $\mathcal{X}$ admette une variété de modules fins $(M, \mathcal{E})$. Alors M est lisse et de dimension $k + r^2(2\Delta - \chi(\mathcal{O}_X))$.*

Les propositions 2.2 et 2.5 sont aussi vraies pour les variétés de modules fins définies localement.

Pour qu'il existe une variété de modules fins pour $\mathcal{X}$ il est nécessaire d'après la proposition 2.2 que $\dim(\mathrm{Hom}(E, E))$ soit le même pour tous les faisceaux E de $\mathcal{X}$. La proposition 2.2 admet une sorte de réciproque :

Proposition 2.6. *On suppose que pour tout faisceau E de $\mathcal{X}$ on a $\mathrm{Ext}^2(E, E) = \{0\}$, et que $\dim(\mathrm{Hom}(E, E)) = p$ est indépendant de E. Soit $\mathcal{E}$ une famille de faisceaux de $\mathcal{X}$ paramétrée par une variété lisse M telle que pour tout faisceau E de $\mathcal{X}$ il existe un unique point x de M tel que $\mathcal{E}_x \simeq E$, et que $\mathcal{E}$ soit un déformation complète de $\mathcal{E}_x$. Alors $(M, \mathcal{E})$ est une variété de modules fins pour $\mathcal{X}$.*

Lemme 2.7. *Soient M une variété algébrique intègre et $\mathcal{E}$ une famille de faisceaux de $\mathcal{X}$ paramétrée par M. On suppose que tout faisceau de $\mathcal{X}$ est isomorphe à un unique $\mathcal{E}_x$, $x \in M$, que $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x) = \{0\}$, que $\dim(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x)) = p$ est indépendant de x et que pour toute famille $\mathcal{F}$ de faisceaux de $\mathcal{X}$ paramétrée par une variété algébrique Y, il existe un morphisme $f : Y \longrightarrow M$ associant à $y \in Y$ l'unique point x de M tel que $\mathcal{E}_x \simeq \mathcal{F}_y$. Alors $(M, \mathcal{E})$ est une variété de modules fins pour $\mathcal{X}$.*

Démonstration. Il faut montrer que $\mathcal{E}$ est *universelle* localement. On se ramène aisément au cas où Y est un ouvert du schéma de Grothendieck Q de la démonstration de la proposition 2.2 et $\mathcal{F}$ la restriction du faisceau universel sur Q. Notons que Y est lisse. Soient $y \in Y$ et

$$\phi : \mathcal{F}_y \longrightarrow \mathcal{E}_{f(x)}$$

un isomorphisme. Le faisceau

$$G = p_{Y*}(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, f^\sharp(\mathcal{E})))$$

est localement libre de rang p. Soit G_0 l'ouvert de G constitué des isomorphismes. On peut voir ϕ comme un point de G_0. Puisque G_0 est ouvert il existe une section locale de G_0 définie en y dont la valeur en y est ψ. Ceci donne un isomorphisme local $\mathcal{F} \simeq f^\sharp(E)$. □

Démonstration de la proposition 2.6. Rappelons qu'on dit que $\mathcal{E}$ est une *déformation complète* de $\mathcal{E}_x$ si le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer

$$\omega_x : TM_x \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x)$$

est surjectif. Soit $((S, s_0), \mathcal{G})$ une déformation verselle de $\mathcal{E}_x$ (cf. [31]), (S, s_0) étant donc un germe de variété analytique lisse et $\mathcal{G}$ un faisceau analytique sur $S \times X$ tel que $\mathcal{G}_{s_0} \simeq \mathcal{E}_x$ (la lissité de S découle du fait que $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x) = \{0\}$). Soit M_0 le germe de variété analytique défini par M au point x. De $\mathcal{E}$ on déduit un morphisme $\phi : M_0 \longrightarrow S$ tel que $\phi^*(\mathcal{G}) \simeq \mathcal{E}_{M_0}$ dont l'application tangente est ω_x. Les fibres de ϕ sont de dimension 0 car sinon tous les faisceaux de la famille $\mathcal{E}$ ne seraient pas distincts. Il en découle que ω_x est en fait un isomorphisme, ainsi que ϕ. Donc $\mathcal{E}_x$ admet une déformation verselle *algébrique*.

Soit $\mathcal{E}'$ une famille de faisceaux de $\mathcal{X}$ paramétrée par une variété algébrique Y. Il suffit d'après le lemme 2.7 de montrer que l'application $f : Y \longrightarrow M$ associant à y l'unique point x tel que $\mathcal{E}'_y \simeq \mathcal{E}_x$ est régulière. C'est clair car c'est le recollement de tous les morphismes universels de Y vers les déformations verselles des faisceaux $\mathcal{E}'_y$. □

La proposition 2.6 se généralise aussi sans peine aux variétés de modules fins définies localement.

2.5. Faisceaux simples

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble ouvert de faisceaux de rang r et de classes de Chern c_i sur X, admettant une variété de modules fins $(M, \mathcal{E})$. Il découle de la proposition 2.2 que s'il existe dans $\mathcal{X}$ un faisceau *simple* (c'est-à-dire dont tous les seuls endomorphismes soient les homothéties), alors tous les faisceaux de $\mathcal{X}$ sont simples. C'est le cas en particulier lorsque $\mathcal{X}$ contient un faisceau stable relativement à $\mathcal{O}_X(1)$.

On suppose maintenant que les faisceaux de $\mathcal{X}$ sont simples. Il n'y a pas lieu alors de distinguer les variétés de modules fins et les variétés de modules fins définies localement :

Proposition 2.8. *Si tous les faisceaux de $\mathcal{X}$ sont simples, et s'il existe une variété de modules fins lisse définie localement pour $\mathcal{X}$, il existe une variété de modules fins pour $\mathcal{X}$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une variété de modules fins définie localement pour $\mathcal{X}$, donnée par la variété M, le recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de M, et les familles $\mathcal{E}_i$ de faisceaux de $\mathcal{X}$. Il faut construire un *faisceau universel* $\mathcal{E}$ sur $M \times X$. Supposons d'abord que les faisceaux de $\mathcal{X}$ soient localement libres. Puisque les fibrés de $\mathcal{X}$ sont simples, on peut construire un fibré en espaces projectifs $\mathbf{P}$ sur $M \times X$ en recollant les $\mathbb{P}(\mathcal{E}_i)$. On a pour tout $i \in I$, $\mathbf{P}_{|U_i} \simeq \mathbb{P}(\mathcal{E}_i)$. Il en découle d'après [18] qu'il existe un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur $M \times X$ tel que $\mathbf{P} \simeq \mathbb{P}(\mathcal{E})$. Il est alors facile de voir que $(M, \mathcal{E})$ est une variété de modules fins pour $\mathcal{X}$.

Si tous les faisceaux de $\mathcal{X}$ ne sont pas localement libres, on considère le plongement $j : X \subset \mathbb{P}_n$ défini par $\mathcal{O}_X(1)$, et on voit les faisceaux cohérents sur X comme des faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}_n$. On note Q le fibré quotient universel sur $\mathbb{P}_n$. Les faisceaux de $\mathcal{X}$ constituent en *ensemble limité* de faisceaux : en effet, un nombre fini de U_i suffit à recouvrir M. Il existe donc un entier m tel que pour tout $m' \geq m$ et tout faisceau E de $\mathcal{X}$ on ait $H^i(j_*(E)(m')) = \{0\}$ pour $i \geq 1$. On a alors une résolution *canonique* de $j_*(E)$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-m-1) \otimes V_n(E) \xrightarrow{\alpha_n(E)} \ldots \longrightarrow (\Lambda^i Q^*)(-m) \otimes V_i(E) \xrightarrow{\alpha_i(E)} \ldots$$
$$\longrightarrow \mathcal{O}(-m) \otimes V_0(E) \longrightarrow j_*(E) \longrightarrow 0,$$

avec $V_i(E) = H^0(E(m-i))$ pour $0 \leq i \leq n$. Comme dans le cas où les faisceaux de $\mathcal{X}$ sont localement libres, les $V_i(E)$, E parcourant $\mathcal{X}$, se recollent pour définir un fibré vectoriel V_n sur M. Les morphismes $\alpha_i(E)$ se recollent aussi pour définir

$$\alpha_i : (\Lambda^i Q^*) \otimes V_i \longrightarrow (\Lambda^{i-1} Q^*) \otimes V_{i-1}.$$

Le faisceau $\operatorname{coker}(\alpha_1)$ est le faisceau universel $\mathcal{E}$ sur $M \times X$ recherché. $\square$

On conserve les notations du § 2.4. Soit $\mathbf{Q}_0$ l'ouvert de $\mathbf{Q}$ constitué des points q tels que la classe d'isomorphisme de $\mathcal{F}_q$ soit dans $\mathcal{X}$ et π_q induise un isomorphisme $\mathbb{C}^p \simeq H^0(\mathcal{F}_q(m))$. Alors on peut reconstruire $\mathbf{Q}_0$, $\mathcal{F}_{Q_0}$ et π sur $\mathbf{Q}_0$ à partir de $(M, \mathcal{E})$. On considère pour cela le fibré vectoriel

$$E \;=\; p_{M*}(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{O}_X(-m) \otimes \mathbb{C}^p, \mathcal{E}))$$

sur M et l'ouvert U_0 de $\mathbb{P}(E)$ correspondant aux isomorphismes. Soit $\phi : U_0 \longrightarrow M$ la projection. On a un morphisme canonique

$$\pi_0 : \mathcal{O}_X(-m) \otimes \mathbb{C}^p \longrightarrow \phi^*(\mathcal{E})$$

de faisceaux sur $U_0 \times X$. Alors on a un isomorphisme canonique $U_0 \simeq \mathbf{Q_0}$ et π_0 s'identifie naturellement à la restriction de π. On en dèduit immédiatement la

Proposition 2.9. *Le morphisme $\phi : \mathbf{Q_0} \longrightarrow M$ est un quotient géométrique de $\mathbf{Q_0}$ par $PGL(p)$.*

On suppose que X est *une surface de Del Pezzo* (c'est-à-dire que $-K_X$ est très ample). Alors si E est un faisceau cohérent simple sur X, on a $\mathrm{Ext}^2(E, E) = \{0\}$. En effet on a par dualité de Serre $\mathrm{Ext}^2(E, E) \simeq \mathrm{Hom}(E, E \otimes K_X)^*$, et si ce dernier n'est pas nul on peut en composant avec des morphismes $K_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$ trouver des endomorphismes de E qui ne sont pas des homothéties. On en déduit la

Proposition 2.10. *Supposons que X soit une surface de Del Pezzo, que les faisceaux de $\mathcal{X}$ soient simples et que $\mathcal{X}$ admette une variété de modules fins $(M, \mathcal{E})$. Alors M est une variété lisse de dimension $1 + r^2(2\Delta - 1)$.*

2.6. Variétés de modules fins maximales

Soit $(M,\mathcal{E})$ une variété de modules fins d'un ensemble ouvert $\mathcal{X}$ de faisceaux cohérents de rang et classes de Chern donnés sur X. On dit que M (ou $(M,\mathcal{E})$, $\mathcal{X}$) est *maximale* s'il n'existe pas d'ensemble ouvert $\mathcal{X}'$ de faisceaux cohérents de mêmes rang et classes de Chern contenant strictement $\mathcal{X}$ et admettant une variété de modules fins $(M',\mathcal{E}')$. J'ignore si toute variété de modules fins est contenue dans une variété de modules fins maximale. On a une notion analogue de variété de modules fins définie localement maximale.

2.7. Variétés de modules fins d'extensions

2.7.1. *Extensions*

Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ des ensembles ouverts de faisceaux cohérents sur X. On suppose qu'il existe des variétés de modules fins $(M,\mathcal{E})$ et $(M',\mathcal{E}')$ pour $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ respectivement. Soient E un faisceau de $\mathcal{X}$, E' un faisceau de $\mathcal{X}'$. On considère une extension

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow E' \longrightarrow G \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

donnée par un élément ϵ de $\mathrm{Ext}^1(E,E')$. Soit

$$\phi : \mathrm{Hom}(E,E)\oplus\mathrm{Hom}(E',E') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(E,E')$$

l'application linéaire déduite de ϵ. On suppose que

$$\mathrm{Ext}^1(E',E) = \mathrm{Hom}(E',E) = \mathrm{Ext}^2(E',E') = \mathrm{Ext}^2(E,E) =$$
$$\mathrm{Ext}^2(E,E') = \mathrm{Ext}^2(E',E) = \{0\}.$$

Lemme 2.11. *Si ϕ est surjective, on a*

$$\mathrm{Ext}^2(G,G) \;=\; \{0\},$$

un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^1(G,G) \;\simeq\; \mathrm{Ext}^1(E,E)\oplus\mathrm{Ext}^1(E',E')$$

et une suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(E,E') \longrightarrow \mathrm{Hom}(G,G) \longrightarrow \ker(\phi) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. On considère la suite spectrale $E_r^{p,q}$ convergeant vers $\mathrm{Ext}^{p+q}(G,G)$ définie par la filtration $E'\subset G$. Les termes $E_1^{p,q}$ éventuellement non nuls qui nous intéressent pour calculer $\mathrm{Hom}(G,G)$, $\mathrm{Ext}^1(G,G)$ et $\mathrm{Ext}^2(G,G)$ sont représentés ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ext}^1(E',E)=\{0\} & . & & . & . \\
\mathrm{Hom}(E',E)=\{0\} & \mathrm{Ext}^1(E,E)\oplus\mathrm{Ext}^1(E',E') & & \mathrm{Ext}^2(E,E')=\{0\} & . \\
0 & \mathrm{Hom}(E,E)\oplus\mathrm{Hom}(E',E') & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{Ext}^1(E,E') & 0 \\
0 & 0 & & \mathrm{Hom}(E,E') & 0
\end{array}$$

Le lemme en découle immédiatement. $\square$

Remarque : On peut bien sûr démontrer le résultat précédent sans utiliser de suite spectrale, mais moins rapidement, à l'aide de suites exactes longues et de diagrammes commutatifs.

On suppose que
$$\mathrm{Hom}(E', E) = \{0\}$$
pour tous E dans $\mathcal{X}$ et E' dans $\mathcal{X}'$. Soit $\mathcal{Y}'$ le sous-ensemble de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}'$ constitué des paires (E, E') telles que
$$\mathrm{Ext}^1(E', E) = \mathrm{Ext}^2(E', E') = \mathrm{Ext}^2(E, E) = \mathrm{Ext}^2(E', E) = \mathrm{Ext}^i(E, E') = \{0\}$$
et qu'il existe un élément σ de $\mathrm{Ext}^1(E, E')$ tel que l'application associée
$$\phi : \mathrm{Hom}(E, E) \oplus \mathrm{Hom}(E', E') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(E, E')$$
soit surjective. L'orbite de cet élément sous l'action de $\mathrm{Aut}(E) \times \mathrm{Aut}(E')$ est l'unique orbite ouverte de $\mathrm{Ext}^1(E, E')$. Il en découle que le faisceau G extension de E par E' défini par σ est uniquement déterminé par E et E'. Soit $\mathcal{Y}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de tels G, (E, E') parcourant $\mathcal{Y}'$.

Lemme 2.12. *L'application $\theta : \mathcal{Y}' \longrightarrow \mathcal{Y}$ associant G à (E, E') est une bijection.*

Démonstration. Cette application est surjective par définition de $\mathcal{Y}$. Montrons qu'elle est injective. Soient $(E, E') \in \mathcal{Y}'$, $(E_0, E'_0) \in \mathcal{Y}'$ auxquels sont associées des extensions
$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow G \longrightarrow E \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow E'_0 \longrightarrow G_0 \longrightarrow E_0 \longrightarrow 0,$$
G_0 étant isomorphe à G. Fixons un isomorphisme $f : G \longrightarrow G_0$. Puisque $\mathrm{Hom}(E', E_0) = \{0\}$, cet isomorphisme envoie E' dans E'_0, et induit un morphisme $E \longrightarrow E_0$. En considérant f^{-1}, on voit que $(E, E') = (E_0, E'_0)$. □

Remarque : Pour E dans $\mathcal{X}$ et E' dans $\mathcal{X}'$, soient $p = \dim(\mathrm{Hom}(E, E))$ et $p' = \dim(\mathrm{Hom}(E', E'))$, qui ne dépendent pas de E et E' d'après la proposition 2.2. Soit
$$e \ = \ \chi(E, E')$$
pour E dans $\mathcal{X}$ et E' dans $\mathcal{X}'$, qui est aussi indépendant de E et E'. Soit $(E, E') \in \mathcal{Y}'$. On a alors
$$e \ = \ \dim(\mathrm{Hom}(E, E')) - \dim(\mathrm{Ext}^1(E, E')).$$
Soit $G = \theta(E, E')$. On a alors
$$\dim(\mathrm{Ext}^1(E, E')) \ \leq \ p + p'$$
et
$$\dim(\mathrm{Hom}(G, G)) = p + p' + e.$$

2.7.2. *Construction des variétés de modules d'extensions*

On se place sous l'hypothèse précédente, c'est-à-dire que

$$\mathrm{Hom}(E', E) = \{0\}$$

pour tous E dans $\mathcal{X}$ et E' dans $\mathcal{X}'$.

Théorème 2.13. *Soit $\mathcal{Y}'$ le sous-ensemble de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}'$ constitué des paires (E, E') telles que*

$$\mathrm{Ext}^1(E', E) = \mathrm{Ext}^2(E', E') = \mathrm{Ext}^2(E, E) = \mathrm{Ext}^2(E', E) = \mathrm{Ext}^i(E, E') = \{0\}$$

pour $i \geq 2$, et qu'il existe un élément σ de $\mathrm{Ext}^1(E, E')$ tel que l'application associée

$$\phi : \mathrm{Hom}(E, E) \oplus \mathrm{Hom}(E', E') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(E, E')$$

soit surjective. Soit $\mathcal{Y}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des faisceaux qui sont des extensions définies par de tels σ. Alors $\mathcal{Y}$ est un ensemble ouvert, et il existe une variété de modules fins définie localement $(N, (\mathcal{E}_i))$ pour $\mathcal{Y}$, N étant l'ouvert de $M \times M'$ constitué des paires (x, x') telles que $(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}'_{x'}) \in \mathcal{Y}'$.

Démonstration. Soient $y \in \mathcal{Y}$, (E, E') le point correspondant de $\mathcal{Y}'$ et (x_0, x'_0) le point de N tel que $\mathcal{E}_{x_0} \simeq E$, $\mathcal{E}'_{x'_0} \simeq E'$. D'aprés la proposition 2.6 (adaptée aux variétés de modules fins définies localement) il suffit de définir un ouvert U de N contenant (x_0, x'_0) tel qu'on puisse construire une famille de faisceaux $\mathcal{G}$ de $\mathcal{Y}$ paramétrée par U telle que pour tout $(z, z') \in U$, la classe d'isomorphisme de $\mathcal{G}_{(z,z')}$ soit $\theta^{-1}(\mathcal{E}_z, \mathcal{E}'_{z'})$ et que $\mathcal{G}$ soit une déformation complète de $\mathcal{G}_{(z,z')}$.

Lemme 2.14. *Soit m un entier. Alors il existe des fibrés vectoriels $\mathcal{G}_0, \ldots, \mathcal{G}_d$ sur M et un fibré vectoriel $\mathcal{H}$ sur $M \times X$, des entiers $m < m_0 < m_1 < \ldots < m_d$ et une suite exacte de faisceaux cohérents sur $M \times X$*

$$0 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}_d \otimes \mathcal{O}_X(-m_d) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow \mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{O}_X(-m_1) \longrightarrow \mathcal{G}_0 \otimes \mathcal{O}_X(-m_0) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Puisque $\mathcal{X}$ est limité il existe un entier $m_0 > m$ tel que pour tout $y \in M$ le faisceau $\mathcal{E}_y(m_0)$ soit engendré par ses sections globales (théorème A de Serre). On prend

$$\mathcal{G}_0 = p_{M*}(\mathcal{E}(m_0)).$$

Le morphisme d'évaluation

$$ev : \mathcal{G}_0 \otimes \mathcal{O}_X(-m_0) \longrightarrow \mathcal{E}$$

est alors surjectif. On construit ensuite G_1 en considérant $\ker(ev)$ à la place de $\mathcal{E}$, et on obtient une suite exacte

$$\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{O}_X(-m_1) \longrightarrow \mathcal{G}_0 \otimes \mathcal{O}_X(-m_0) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

Si on poursuit ce procédé jusqu'à $\mathcal{G}_d$ le noyau $\mathcal{H}$ du morphisme

$$\mathcal{G}_d \otimes \mathcal{O}_X(-m_d) \longrightarrow \mathcal{G}_{d-1} \otimes \mathcal{O}_X(-m_{d-1})$$

est alors localement libre. □

Puisque $\mathcal{E}$ est plat sur M, pour tout $y \in M$, la restriction de la suite exacte du lemme précédent à $\{y\} \times X$ est exacte. La suite exacte du lemme 2.13 se décompose en suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}_d \otimes \mathcal{O}_X(-m_d) \longrightarrow \mathcal{V}_{d-1} \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{V}_{d-1} \longrightarrow \mathcal{G}_{d-1} \otimes \mathcal{O}_X(-m_{d-2}) \longrightarrow \mathcal{V}_{d-1} \longrightarrow 0,$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{O}_X(-m_1) \longrightarrow \mathcal{V}_0 \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{V}_0 \longrightarrow \mathcal{G}_0 \otimes \mathcal{O}_X(-m_0) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0,$$

dont les restrictions à $\{y\} \times X$ sont aussi exactes.

Lemme 2.15. *Si m est assez grand, on a pour tous $(y, y') \in N$ et $i > 0$*

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{G}_{ly} \otimes \mathcal{O}_X(-m_l), \mathcal{E}'_{y'}) = \{0\}$$

pour $0 \le l \le d$ et

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{H}_y, \mathcal{E}'_{y'}) = \{0\}.$$

Démonstration. Puisque $\mathcal{G}_{ly}$ est trivial, la première égalité sera vérifiée dés que m est assez grand, d'après le théorème B de Serre. Pour démontrer la seconde on considère les suites exactes précédentes. On en déduit, pour tout entier $i > 0$ des isomorphismes

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{H}_y, \mathcal{E}'_{y'}) \simeq \mathrm{Ext}^{i+1}(\mathcal{V}_{d-1,y}, \mathcal{E}'_{y'}) \simeq \ldots \simeq \mathrm{Ext}^{i+d}(\mathcal{V}_{0y}, \mathcal{E}'_{y'}) = \{0\}.$$

□

D'aprés le lemme précédent, les faisceaux

$$F_{d+1} \;=\; p_{N*}(\mathcal{H}^* \otimes p^*_{M'}(\mathcal{E}')), \qquad F_i \;=\; p_{N*}(\mathcal{G}^*_i \otimes \mathcal{O}_X(m_i) \otimes p^*_{M'}(\mathcal{E}')), \quad (0 \le i \le d)$$

sont localement libres sur N. D'après ce qui précède, la suite exacte du lemme 2.13 induit un complexe

$$0 \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\alpha_0} F_1 \xrightarrow{\alpha_1} \ldots \longrightarrow F_{d+1} \longrightarrow 0$$

exact en degrés différents de 0 et 1. Pour tout $(y, y') \in N$ on a

$$\ker(\alpha_0) \;\simeq\; \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_y, \mathcal{E}'_{y'}), \qquad \ker(\alpha_1)/\operatorname{Im}(\alpha_0) \;\simeq\; \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_y, \mathcal{E}'_{y'}).$$

Le faisceau

$$F'_1 \;=\; \ker(\alpha_1)$$

est localement libre. On obtient finalement un morphisme de fibrés vectoriels sur N

$$\alpha : F_0 \longrightarrow F'_1$$

tel que pour tout $(y, y') \in N$ on a

$$\ker(\alpha) \;\simeq\; \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_y, \mathcal{E}'_{y'}), \qquad \mathrm{coker}(\alpha) \;\simeq\; \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_y, \mathcal{E}'_{y'}).$$

Soit W un ouvert affine de N contenant (x_0, x'_0). Alors on a

$$\mathrm{Ext}^i(p^\sharp_M(\mathcal{H})_W, p^\sharp_{M'}(\mathcal{E}')_W) = \mathrm{Ext}^i(p^*_M(\mathcal{G}_l)_W \otimes \mathcal{O}_X(-m_l), p^\sharp_{M'}(\mathcal{E}')_W) = \{0\}$$

pour $i > 0$ et $0 \le l \le d$. En effet, les images directes

$$R^i p_{N*}(p^*_M(\mathcal{H}^*)_W \otimes p^\sharp_{M'}(\mathcal{E}')_W), \qquad R^i p_{N*}(p^*_M(\mathcal{G}^*_l)_W \otimes \mathcal{O}_X(m_l) \otimes p^\sharp_{M'}(\mathcal{E}')_W)$$

sont nulles, donc

$$\mathrm{Ext}^i(p_M^\sharp(\mathcal{H})_W, p_{M'}^\sharp(\mathcal{E}')_W) \ \simeq \ H^i(p_{N*}(p_M^\sharp(\mathcal{H})_W^* \otimes p_{M'}^\sharp(\mathcal{E}')_W)),$$

$$\mathrm{Ext}^i(p_M^*(\mathcal{G}_l)_W \otimes \mathcal{O}_X(-m_l), p_{M'}^\sharp(\mathcal{E}')_W) \ \simeq \ H^i(p_{N*}(p_M^*(\mathcal{G}_l^*)_W \otimes \mathcal{O}_X(m_l) \otimes p_{M'}^\sharp(\mathcal{E}')_W)),$$

et ces groupes de cohomologie sont nuls car W est affine.

En employant le même méthode que précédemment on en déduit qu'on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}(p_M^\sharp(\mathcal{E})_W, p_{M'}^\sharp(\mathcal{E}')_W) \simeq \ker(H^0(\alpha_{0|W})),$$

$$\mathrm{Ext}^1(p_M^\sharp(\mathcal{E})_W, p_{M'}^\sharp(\mathcal{E}')_W) \simeq \mathrm{coker}(H^0(\alpha_{0|W})).$$

On obtient aussi que pour tout $(x, x') \in W$, le morphisme canonique

$$\pi_x : \mathrm{Ext}^1(p_M^\sharp(\mathcal{E})_W, p_{M'}^\sharp(\mathcal{E}')_W) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}'_{x'})$$

est surjectif.

Soit $s \in \mathrm{Ext}^1(p_M^\sharp(\mathcal{E})_W, p_{M'}^\sharp(\mathcal{E}')_W)$ tel que le morphisme associé

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_{x_0}, \mathcal{E}_{x_0}) \oplus \mathrm{Hom}(\mathcal{E}'_{x'_0}, \mathcal{E}'_{x'_0}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_{x_0}, \mathcal{E}'_{x'_0})$$

soit surjectif. Ceci est vrai en tout point d'un ouvert affine $U \subset W$ contenant (x_0, x'_0). On considère l'extension

$$0 \longrightarrow p_M^\sharp(\mathcal{E})_U \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow p_{M'}^\sharp(\mathcal{E}')_U \longrightarrow 0$$

définie par s. Alors $\mathcal{G}$ est plat sur U (cf [29], exposé IV, prop. 1.1). C'est la famille de faisceaux de $\mathcal{Y}$ qui convient au voisinage de (x_0, x'_0). Ceci achève la démonstration du théorème 2.13. $\square$

Le théorème 2.13 est aussi vrai pour des variétés de modules fins définies localement.

Remarque : La démonstration du théorème 2.13 montre que pour toute sous-variété localement fermée Z de N, tout $s \in H^0(Z, \mathrm{coker}(\alpha))$ induit une extension

$$0 \longrightarrow p_M^\sharp(\mathcal{E})_Z \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow p_{M'}^\sharp(\mathcal{E}')_Z \longrightarrow 0.$$

2.7.3. *Exemple*

Soit C une courbe algébrique projective irréductible lisse, de genre g. Soient r, d, r', d' des entiers, avec $r \geq 1$, $r' \geq 1$, r, d premiers entre eux ainsi que r', d'. On note $M(r, d)$ (resp. $M(r', d')$) la variété de modules des fibrés stables de rang r et de degré d (resp. de rang r' et de degré d') sur C, et $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}'$) le fibré universel sur $M(r, d) \times C$ (resp. $M(r', d') \times C$). Soient F un fibré vectoriel algébrique de rang 2 sur C, et

$$X \ = \ \mathbb{P}(F)$$

la surface réglée sur C des droites de F. Soient

$$\pi : X \longrightarrow C$$

la projection et $\mathcal{O}(1)$ le fibré en droites tautologique sur X. On s'intéresse à des extensions du type

$$0 \longrightarrow \pi^*(\mathcal{E}'_{y'}) \otimes \mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow \pi^*(\mathcal{E}_y) \longrightarrow 0.$$

Ceci est bien un cas particulier de ce qu'on a étudié précédemment car

$(M(r',d'),\pi^\sharp(\mathcal{E}')\otimes\mathcal{O}(1))$ et $(M(r,d),\pi^\sharp(\mathcal{E}))$ sont des variétés de modules fins sur X.

Vérifions que les hypothèses du théorème 2.13 sont bien vérifiées. On a pour tout i

$$R^i\pi_*((\pi^*(\mathcal{E}'_{y'})\otimes\mathcal{O}(1))^*\otimes\pi^*(\mathcal{E}_y)) \ = \ {\mathcal{E}'_{y'}}^*\otimes\mathcal{E}_y\otimes R^i\pi_*(\mathcal{O}(-1)) \ = \{0\},$$

donc

$$\mathrm{Ext}^i(\pi^*(\mathcal{E}'_{y'})\otimes\mathcal{O}(1),\pi^*(\mathcal{E}_y)) \ = \ \{0\}$$

pour tout i. On a d'autre part

$$R^i\pi_*(\pi^*(\mathcal{E}_y)^*\otimes\pi^*(\mathcal{E}'_{y'})\otimes\mathcal{O}(1)) \ \simeq \ \mathcal{E}_y^*\otimes\mathcal{E}'_{y'}\otimes R^i\pi_*(\mathcal{O}(1)) \ = \{0\}$$

si $i>0$. On a donc

$$\mathrm{Ext}^i(\pi^*(\mathcal{E}_y),\pi^*(\mathcal{E}'_{y'})\otimes\mathcal{O}(1)) \ \simeq \ H^i(\mathcal{E}_y^*\otimes\mathcal{E}'_{y'}\otimes F^*).$$

En particulier c'est nul si $i\geq 2$.

On peut donc envisager la construction de variétés de modules d'extensions du type précédent. Soient $y\in M(r,d)$ et $y'\in M(r',d')$. Les fibrés $\mathcal{E}_y$ et $\mathcal{E}'_{y'}$ étant simples, le morphisme

$$\begin{aligned}\phi : \mathrm{Hom}(\pi^*(\mathcal{E}'_{y'})\otimes\mathcal{O}(1),\pi^*(\mathcal{E}'_{y'})\otimes\mathcal{O}(1))\oplus\mathrm{Hom}(\pi^*(\mathcal{E}_y),\pi^*(\mathcal{E}_y))\\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\pi^*(\mathcal{E}_y),\pi^*(\mathcal{E}'_{y'})\otimes\mathcal{O}(1))\end{aligned}$$

est surjectif si et seulement si

$$\dim(\mathrm{Ext}^1(\pi^*(\mathcal{E}_y),\pi^*(\mathcal{E}'_{y'})\otimes\mathcal{O}(1))) \ = \ h^1(\mathcal{E}_y^*\otimes\mathcal{E}_{y'}\otimes F^*) \ \leq 1,$$

et si l'extension est non triviale en cas d'égalité. On doit donc avoir

$$\chi(\mathcal{E}_y^*\otimes\mathcal{E}_{y'}\otimes F^*) \ \geq \ -1,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d'}{r'}-\frac{d}{r} \ \geq \ g-1+\frac{deg(F)}{2}-\frac{1}{2rr'}.$$

On obtient alors une variété de modules fins définie localement $(N,(\mathcal{F}_i))$ pout $\mathcal{Y}$, N étant l'ouvert de $M(r',d')\times M(r,d)$ constitué des (y',y) tels que

$$h^1(\mathcal{E}_y^*\otimes\mathcal{E}_{y'}\otimes F^*) \ \leq 1.$$

2.8. Faisceaux admissibles

Définition 6. *On dit qu'un faisceau cohérent E sur X est* admissible *s'il existe un ensemble ouvert de faisceaux cohérents sur X contenant la classe d'isomorphisme de E et admettant une variété de modules fins définie localement.*

D'après la proposition 2.2, si E est admissible, $\mathrm{Aut}(E)$ agit trivialement sur $\mathrm{Ext}^1(E,E)$. Mais cette condition n'est pas suffisante pour que E soit admissible. On donne au §5.3.1 des exemples de fibrés simples sur $\mathbb{P}_2$ qui se déforment en fibrés stables mais ne sont pas admissibles.

On définit maintenant une relation d'équivalence, notée $\equiv$, sur les classes d'isomorphisme de faisceaux admissibles sur X. Cette relation d'équivalence est engendrée par la relation $\sim$ suivante : soient E, F des faisceaux admissibles. Alors $E\sim F$ si et seulement si il existe un germe de courbe lisse (C,x_0), des faisceaux cohérents $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ sur $C\times X$, plats sur C, tels que

$\mathcal{E}_{x_0} \simeq E$, $\mathcal{F}_{x_0} \simeq F$ et $\mathcal{E}_x \simeq \mathcal{F}_x$ si $x \neq x_0$. Par définition on a donc $E \equiv F$ s'il existe une suite $G_1, \ldots, G_n$ de faisceaux admissibles tels que

$$E \sim G_1, \quad G_1 \sim G_2, \ldots, G_{n-1} \sim G_n, \quad G_n \sim F.$$

On donne au § 4.2.3 des exemples de faisceaux simples de rang 1 équivalents et non isomorphes.

3. Faisceaux prioritaires génériques instables sur le plan projectif

3.1. Énoncé des principaux résultats

Les faisceaux prioritaires sur $\mathbb{P}_2$ ont été introduits par A. Hirschowitz et Y. Laszlo dans [17]. Rappelons qu'un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{P}_2$ est dit *prioritaire* s'il est sans torsion et si $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}, \mathcal{E}(-1)) = 0$. Par exemple les faisceaux semi-stables au sens de Gieseker-Maruyama sont prioritaires. On s'intéresse ici à la structure précise du faisceau prioritaire générique de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 lorsqu'il n'existe pas de faisceau semi-stable de mêmes rang et classes de Chern. On en déduira des exemples de variétés de modules fins de faisceaux non simples.

D'après [17], le *champ* des faisceaux prioritaires est lisse et irréductible. Les conditions d'existence des faisceaux prioritaires sont les suivantes : posons

$$\mu \;=\; \frac{c_1}{r}, \quad \Delta \;=\; \frac{1}{r}(c_2 - \frac{r-1}{2r}c_1^2),$$

(si $\mathcal{E}$ est un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{P}_2$ de rang r et de classes de Chern c_1, c_2, on appelle $\mu = \mu(\mathcal{E})$ la *pente* de $\mathcal{E}$ et $\Delta = \Delta(\mathcal{E})$ le *discriminant* de $\mathcal{E}$). Alors, si $-1 \leq \mu \leq 0$, il existe un faisceau prioritaire de pente μ et de discriminant Δ si et seulement si on a

$$\Delta \;\geq\; \frac{\mu(\mu+1)}{2}.$$

Les conditions d'existence des faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$ sont rappelées ci-dessous. On peut voir qu'il existe beaucoup de triplets (r, c_1, c_2) tels qu'il existe un faisceau prioritaire de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 mais pas de faisceau semi-stable avec les mêmes invariants. On note $M(r, c_1, c_2)$ la variété de modules des faisceaux semi-stables de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 sur $\mathbb{P}_2$.

Les conditions d'existence des faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$ (cf. [9]) s'expriment en fonction des seules variables μ et Δ. On montre qu'il existe une unique fonction $\delta(\mu)$ telle qu'on ait $\dim(M(r, c_1, c_2)) > 0$ si et seulement si $\Delta \geq \delta(\mu)$. La fonction $\delta(\mu)$ est décrite à l'aide des *fibrés exceptionnels*.

On dit qu'un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{P}_2$ est *exceptionnel* si $\mathcal{E}$ est *simple* (c'est-à-dire si les seuls endomorphismes de $\mathcal{E}$ sont les homothéties), et si

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \;=\; \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \;=\; \{0\}.$$

Un tel faisceau est alors localement libre et stable, et la variété de modules de faisceaux semi-stables correspondante contient l'unique point $\mathcal{E}$. Il existe une infinité dénombrable de fibrés exceptionnels, et un procédé simple permet de les obtenir tous à partir des fibrés en droites (cf. [2]). Notons qu'un fibré exceptionnel est uniquement déterminé par sa pente. Soit F un fibré exceptionnel. On note x_F la plus petite solution de l'équation

$$X^2 - 3X + \frac{1}{rg(F)^2} \ = \ 0.$$

Alors on montre que les intervalles $]\mu(F) - x_F, \mu(F) + x_F[$ constituent une partition de l'ensemble des nombres rationnels. On va décrire la fonction $\delta(\mu)$ sur cet intervalle. Posons

$$P(X) = \frac{X^2}{2} + \frac{3}{2}X + 1.$$

Sur l'intervalle $]\mu(F) - x_F, \mu(F)]$, on a

$$\delta(\mu) \ = \ P(\mu - \mu(F)) - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{rg(F)^2}),$$

et sur $[\mu(F), \mu(F) + x_F[$, on a

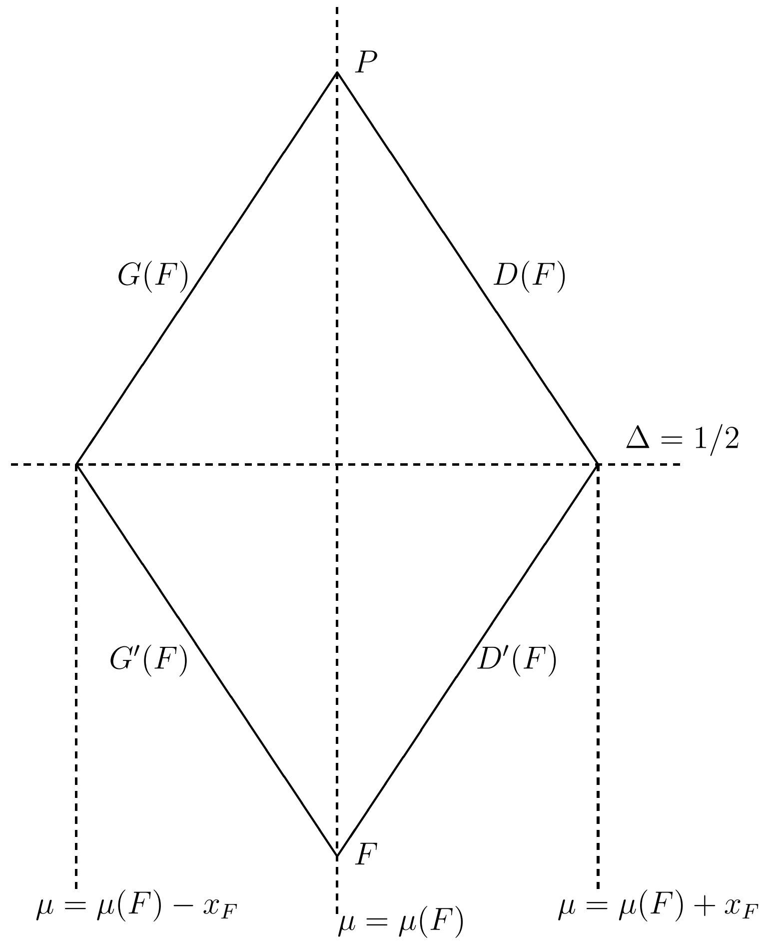
$$\delta(\mu) \ = \ P(\mu(F) - \mu) - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{rg(F)^2}).$$

On obtient les courbes $G(F)$ et $D(F)$ représentées sur la figure qui suit. Ce sont des segments de coniques.

On considère maintenant la courbe $\Delta = \delta'(\mu)$ définie de la façon suivante : sur l'intervalle $]\mu(F) - x_F, \mu(F) + x_F[$, on a

$$\delta'(\mu) = \delta(\mu) - \frac{1}{rg(F)^2}(1 - \frac{1}{x_F} \mid \mu(F) - \mu \mid).$$

On obtient ainsi les segments de coniques $G'(F)$ et $D'(F)$. Le point $(\mu(F), \delta'(\mu(F)))$ est la paire (μ, Δ) correspondant au fibré exceptionnel F. Le point $(\mu(F), \delta(\mu(F)))$ est le symétrique de F par rapport à la droite $\Delta = 1/2$. Notons que si μ est un nombre rationnel différent de la pente d'un fibré exceptionnel, le nombre $\delta'(\mu)$ est irrationnel. Ces courbes, sur l'intervalle $]\mu(F) - x_F, \mu(F) + x_F[$, sont représentées ci-dessous :



Elles forment un "losange" dont les côtés sont des segments de paraboles. Pour tout point x de $\mathbb{P}_2$, soit $\mathcal{I}_x$ le faisceau d'idéaux du point x. On a

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_x, \mathcal{O}) \simeq \mathbb{C}.$$

Soit $\mathcal{V}_x$ l'unique faisceau extension non triviale de $\mathcal{I}_x$ par $\mathcal{O}$ (ce faisceau est localement libre). On va démontrer le

Théorème 3.1. *Soient r, c_1, c_2 des entiers, avec $r \geq 1$, $-1 < \mu \leq 0$,*

$$\Delta \ \geq \ \frac{\mu(\mu+1)}{2},$$

et tels que la variété $M(r, c_1, c_2)$ soit vide.

1 - Si $\Delta < \delta'(\mu)$, il existe des fibrés exceptionnels E_0, E_1, E_2, des espaces vectoriels de dimension finie M_0, M_1, M_2, dont un au plus peut être nul, tels que le faisceau prioritaire générique de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 soit isomorphe à

$$(E_0 \otimes M_0) \oplus (E_1 \otimes M_1) \oplus (E_2 \otimes M_2).$$

2 - On suppose que $c_1 \neq 0$ *ou* $c_2 > 1$. *Si* $\Delta > \delta'(\mu)$, *soit* F *l'unique fibré exceptionnel tel que* $\mu \in \,]\mu(F) - x_F, \mu(F) + x_F[$. *Alors si* $\mu \leq \mu(F)$, *l'entier*

$$p \;=\; r.rg(F)(P(\mu - \mu(F)) - \Delta - \Delta(F))$$

est strictement positif, et le faisceau prioritaire générique de rang r *et de classes de Chern* c_1, c_2 *est isomorphe à une somme directe*

$$(F \otimes \mathbb{C}^p) \oplus \mathcal{E},$$

où $\mathcal{E}$ *est un fibré semi-stable situé sur la courbe* $G(F)$. *De même, si* $\mu \geq \mu(F)$, *l'entier*

$$p \;=\; r.rg(F)(P(\mu(F) - \mu) - \Delta - \Delta(F))$$

est strictement positif, et le faisceau prioritaire générique de rang r *et de classes de Chern* c_1, c_2 *est isomorphe à une somme directe*

$$(F \otimes \mathbb{C}^p) \oplus \mathcal{E},$$

où $\mathcal{E}$ *est un fibré semi-stable situé sur la courbe* $D(F)$.

3 - Si $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, *le faisceau prioritaire générique de rang* r *et de classes de Chern* c_1, c_2 *est isomorphe à une somme directe du type*

$$(\mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^{r-2}) \oplus \mathcal{V}_x.$$

Le résultat précédent apporte des précisions sur ce qui est démontré dans [17], c'est-à-dire que s'il n'existe pas des faisceau semi-stable de rang r et de classes de Chern c_1, c_2, alors deux cas peuvent se produire : la filtration de Harder-Narasimhan du faisceau prioritaire générique de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 comporte deux termes, ou elle en comporte trois. Dans le premier cas, un des termes est semi-exceptionnel (c'est-à-dire de la forme $F \otimes \mathbb{C}^k$, avec F exceptionnel), et dans le second cas les trois termes sont semi-exceptionnels.

La démonstration du théorème 3.1, 1- repose sur le résultat suivant (proposition 3.6) : soient r, c_1, c_2 des entiers tels que $r \geq 2, \Delta = \delta(\mu)$. Alors, si $\mu(F) - x_F < \mu \leq \mu(F)$, il existe un fibré E de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 tel que $\mathrm{Ext}^1(E, F) = \{0\}$, et si $\mu(F) \leq \mu < \mu(F) + x_F$, il existe un fibré E de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 tel que $\mathrm{Ext}^1(F, E) = \{0\}$. On montre cependant au § 3.3.2 qu'il peut exister des fibrés stables de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 n'ayant pas ces propriétés.

Il est possible de préciser le 1- du théorème 3.1. On rappelle dans le § 3.2.1 la notion de *triade*, qui est un triplet particulier (E, F, G) de fibrés exceptionnels. On ne considère ici que des triades de fibrés exceptionnels dont les pentes sont comprises entre -1 et 0. A la triade (E, F, G) correspond le *triangle* $\mathcal{T}_{(E,F,G)}$ du plan (de coordonnées (μ, Δ)), dont les côtés sont des segments de paraboles et les sommets les points correspondant à E, F et G. Ce triangle est défini par les inéquations

$$\Delta \leq P(\mu - \mu(G)) - \Delta(G), \quad \Delta \geq P(\mu - \mu(H) + 3) - \Delta(H), \quad \Delta \leq P(\mu - \mu(E) + 3) - \Delta(E),$$

H étant le fibré exceptionnel noyau du morphisme d'évaluation $E \otimes \mathrm{Hom}(E, F) \longrightarrow F$. Soit $\mathbf{T}$ l'ensemble des triades de fibrés exceptionnels dont les pentes sont comprises entre -1 et 0. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des points (μ, Δ) du plan tels que

$$-1 \leq \mu \leq 0, \quad \frac{\mu(\mu+1)}{2} \leq \Delta \leq \delta'(\mu).$$

On démontrera le

Théorème 3.2. *1 - Soient (E,F,G), (E',F',G') des éléments distincts de $\mathbf{T}$. Alors les triangles $\mathcal{T}_{(E,F,G)}$ et $\mathcal{T}_{(E',F',G')}$ ont une intersection non vide si et seulement si cette intersection est un sommet commun ou un côté commun. Dans le premier cas, les fibrés exceptionnels correspondants sont identiques, et dans le second les paires de fibrés exceptionnels correspondantes le sont.*

2 - On a $\quad \mathcal{S} \;=\; \bigcup_{(E,F,G)\in\mathbf{T}} \mathcal{T}_{(E,F,G)}.$

3 - Soient r, c_1, c_2 des entiers, avec $r \geq 1$,

$$\mu = \frac{r}{c_1}, \quad \Delta = \frac{1}{r}(c_2 - \frac{r-1}{2r}c_1^2).$$

On suppose que $(\mu,\Delta) \in \mathcal{T}_{(E,F,G)}$. Soit H le noyau du morphisme d'évaluation $E \otimes \mathrm{Hom}(E,F) \longrightarrow F$. Alors

$$m \;=\; r.rg(E).(P(\mu-\mu(E)+3)-\Delta(E)),$$

$$n \;=\; r.rg(H).(P(\mu-\mu(H)+3)-\Delta(H)),$$

$$p \;=\; r.rg(G).(P(\mu-\mu(G))-\Delta(G))$$

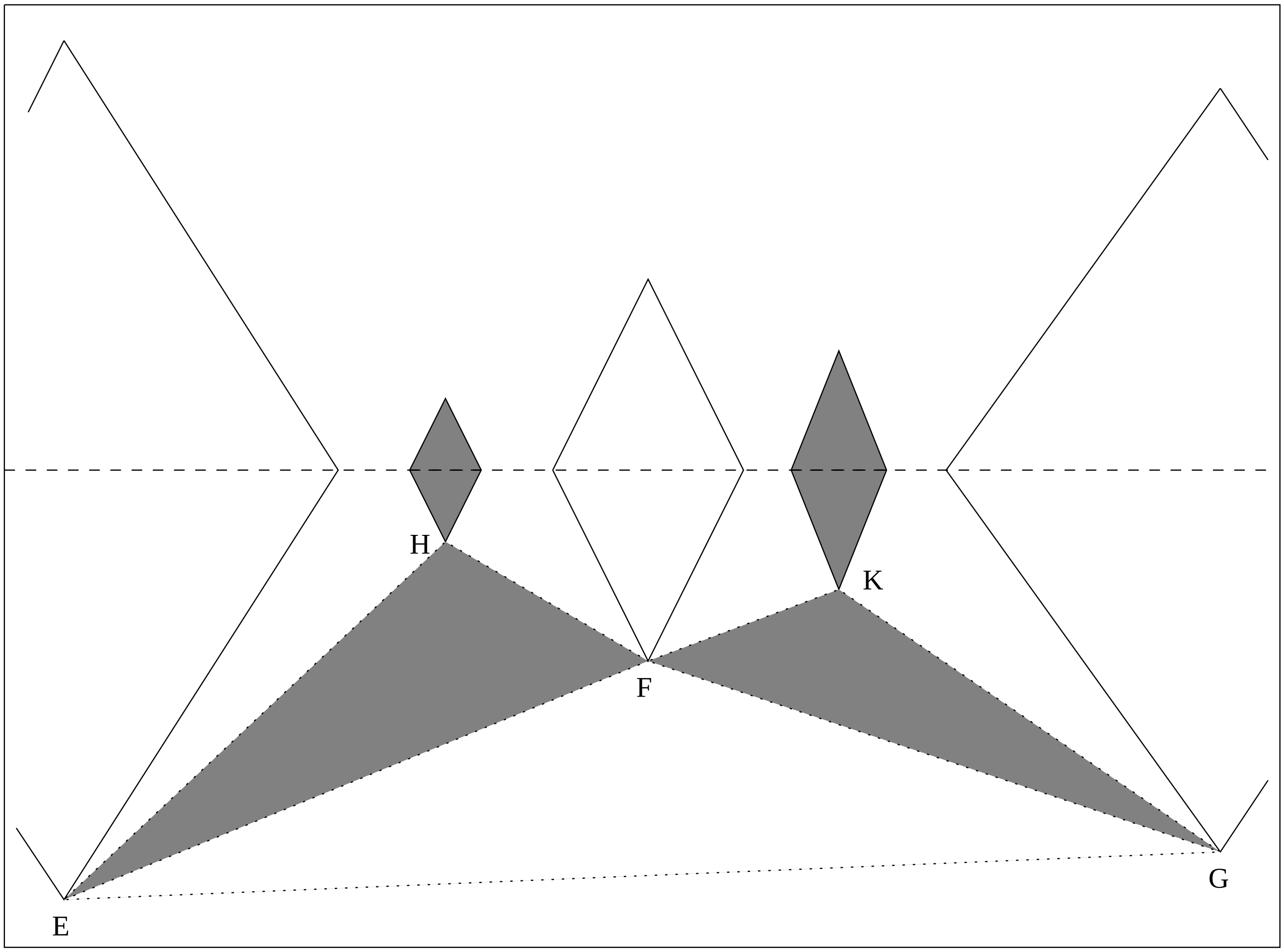
sont des entiers positifs ou nuls, et le fibré prioritaire générique de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 est de la forme

$$(E \otimes \mathbb{C}^m) \oplus (F \otimes \mathbb{C}^n) \oplus (G \otimes \mathbb{C}^p).$$

Le lieu du plan constitué des points (Δ,μ) tels qu'il existe des fibrés prioritaires de pente μ et de discriminant Δ mais pas de fibrés semi-stables ayant les mêmes invariants est donc décomposé en triangles et en losanges (dont les côtés sont des segments de paraboles). Ils peuvent tous être construits de la façon suivante (si on se limite aux pentes comprises entre -1 et 0) : on part du triangle $\mathcal{T}_{(\mathcal{O}(-1),Q^*,\mathcal{O})}$, et des losanges correspondant à $\mathcal{O}(-1)$, Q^* et $\mathcal{O}$. Une récurrence permet ensuite de construire à partir de ces données tous les triangles et tous les losanges. Supposons construit le triangle $\mathcal{T}_{(E,F,G)}$, et les losanges correspondant à E, F et G. Alors le morphisme canonique

$$F \otimes \mathrm{Hom}(F,G) \longrightarrow G \qquad (\text{resp. } \; E \longrightarrow \mathrm{Hom}(E,F)^* \otimes F\;)$$

est surjectif (resp. injectif), et son noyau H (resp. conoyau K) est un fibré exceptionnel. On obtient deux nouveaux triangles $\mathcal{T}_{(E,H,F)}$, $\mathcal{T}_{(F,K,G)}$, et les losanges correspondant à H et K. La situation est résumée par la figure suivante :



On construit dans le § 3.4 des variétés de modules fins (définies localement ou globalement) constituées de faisceaux prioritaires de rang r et de classes de Chern c_1, c_2, dans le cas où $M(r, c_1, c_2) = \emptyset$. Ces variétés ne contiennent pas en général tous les faisceaux prioritaires de rang r et de classes de Chern c_1, c_2, et les faisceaux qui les constituent ne sont pas simples. On donne en particulier un exemple d'ensemble ouvert de faisceaux prioritaires pour lequel il existe une variété de modules fins définie localement mais pas de variété de modules fins définie globalement.

3.2. Fibrés exceptionnels

3.2.1. *Construction des fibrés exceptionnels*

Les résultats qui suivent ont été démontrés dans [9] ou [2]. Un fibré exceptionnel est entièrement déterminé par sa pente. Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des pentes de fibrés exceptionnels. Si $\alpha \in \mathbb{P}$, on note E_α le fibré exceptionnel de pente α, et r_α son rang. On montre que r_α et $c_1(E_\alpha)$ sont premiers entre eux. Soit $\Delta_\alpha = \Delta(E_\alpha)$. Alors on a

$$\Delta_\alpha \;=\; \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{r_\alpha^2}),$$

(ce qui découle du fait que $\chi(E_\alpha, E_\alpha) = 1$).

Soit $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres rationnels diadiques, c'est-à-dire pouvant se mettre sous la forme $p/2^q$, p et q étant des entiers, $q \geq 0$. On a une bijection

$$\epsilon : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{P}.$$

Cette application est entièrement déterminée par les propriétés suivantes :

- Pour tout entier k, on a $\epsilon(k) = k$.
- Pour tout entier k et tout $x \in \mathbb{D}$, on a $\epsilon(x+k) = \epsilon(x) + k$.
- Pour tous entiers p, q, avec $q \geq 0$, on a

$$\epsilon(\frac{2p+1}{2^{q+1}}) \ = \ \epsilon(\frac{p}{2^q}) \times \epsilon(\frac{p+1}{2^q}),$$

où $\times$ est la loi de composition suivante :

$$\alpha \times \beta \ = \ \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\Delta_\alpha - \Delta_\beta}{3+\alpha-\beta}.$$

Cette relation signifie simplement que

$$\chi(E_{\alpha\times\beta}, E_\alpha) \ = \ \chi(E_\beta, E_{\alpha\times\beta}) \ = \ 0.$$

La construction des pentes des fibrés exceptionnels comprises entre -1 et 0 se fait donc en partant des pentes -1 et 0, correspondant aux fibrés exceptionnels $\mathcal{O}(-1)$ et $\mathcal{O}$.

On appelle *triades* les triplets de fibrés exceptionnels de la forme

$(\mathcal{O}(k), \mathcal{O}(k+1), \mathcal{O}(k+2))$, $(E_\alpha, E_{\alpha\times\beta}, E_\beta)$,$(E_{\alpha\times\beta}, E_\beta, E_{\alpha+3})$ ou $(E_{\beta-3}, E_\alpha, E_{\alpha\times\beta})$, α et β étant des éléments de $\mathbb{P}$ de la forme

$$\alpha \ = \ \epsilon(\frac{p}{2^q}), \qquad \beta \ = \ \epsilon(\frac{p+1}{2^q}).$$

où p et q sont deux entiers avec $q \geq 0$. Les triades sont exactement les *bases d'hélice* de [14].

On donne maintenant la construction des triades de fibrés exceptionnels dont les pentes sont comprises entre -1 et 0. Ces triades sont du type $(E_\alpha, E_{\alpha\times\beta}, E_\beta)$. La construction se fait de la façon suivante, par récurrence : on part de la triade $(\mathcal{O}(-1), Q^*, \mathcal{O})$, où Q est le fibré exceptionnel quotient du morphisme canonique $\mathcal{O}(-1) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^0(\mathcal{O}(1))^*$. Supposons la triade (E, F, G) construite. Alors on construit les *triades adjacentes* (E, H, F) et (F, K, G). Le fibré H est le noyau du morphisme canonique surjectif

$$F \otimes \mathrm{Hom}(F, G) \longrightarrow G$$

et K est le conoyau du morphisme canonique injectif

$$E \longrightarrow F \otimes \mathrm{Hom}(E, F)^*.$$

De plus, le morphisme canonique

$$E \otimes \mathrm{Hom}(E, H) \longrightarrow H \qquad (\text{resp. } K \longrightarrow G \otimes \mathrm{Hom}(K, G)^* \ )$$

est surjectif (resp. injectif) et son noyau (resp. conoyau) est isomorphe à $G(-3)$ (resp. $E(3)$).

3.2.2. *Suite spectrale de Beilinson généralisée*

A toute triade (E, G, F) et à tout faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{P}_2$ on associe une suite spectrale $E_r^{p,q}$ de faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}_2$, convergeant vers $\mathcal{E}$ en degré 0 et vers 0 en tout autre degré. Les termes $E_1^{p,q}$ éventuellement non nuls sont

$$E_1^{-2,q} \simeq H^q(\mathcal{E} \otimes E^*(-3)) \otimes E, \quad E_1^{-1,q} \simeq H^q(\mathcal{E} \otimes S^*) \otimes G, \quad E_1^{0,q} \simeq H^q(\mathcal{E} \otimes F^*) \otimes F,$$

S désignant le fibré exceptionnel conoyau du morphisme canonique injectif
$G \longrightarrow F \otimes \mathrm{Hom}(G, F)$.

3.2.3. *Série exceptionnelle associée à un fibré exceptionnel*

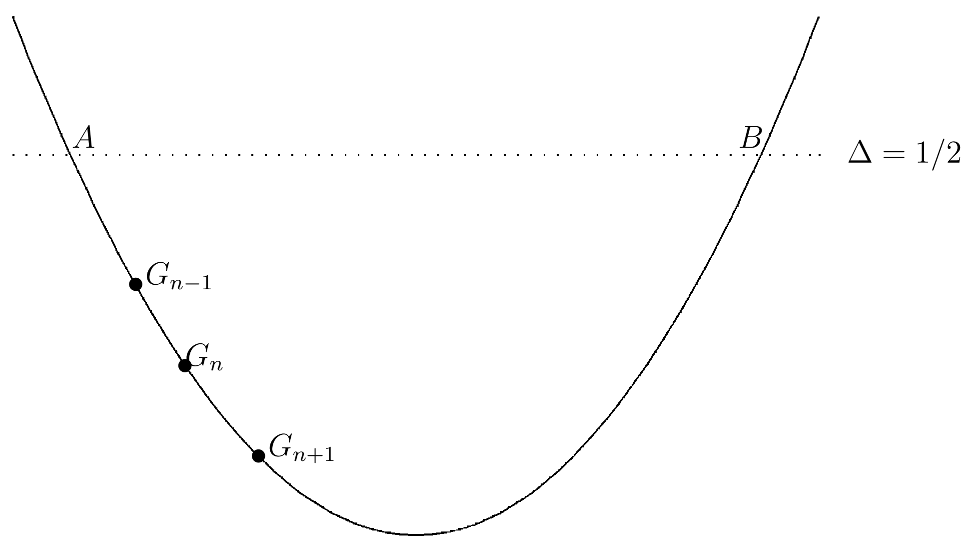
Soit F un fibré exceptionnel. Les triades comportant F comme terme de droite sont de la forme (G_n, G_{n+1}, F), où la suite de fibrés exceptionnels (G_n) est entièrement déterminée par deux de ses termes consécutifs, par exemple G_0 et G_1, par les suites exactes

$$0 \longrightarrow G_{n-1} \longrightarrow (G_n \otimes \mathrm{Hom}(G_{n-1}, G_n)^*) \simeq (G_n \otimes \mathrm{Hom}(G_n, G_{n+1})) \longrightarrow G_{n+1} \longrightarrow 0.$$

On appelle (G_n) la *série exceptionnelle* à gauche associée à F. Les couples $(\mu(G_n), \Delta(G_n))$ sont situés sur la conique d'équation

$$\Delta \;=\; P(\mu - \mu(F)) - \Delta(F),$$

(ce qui traduit le fait que $\chi(F, G_n) = 0$).



Dans la figure ci-dessus, les points A et B sont les intersections de cette conique avec la droite d'équation $\Delta = 1/2$. On a

$$\lim_{n \to -\infty} G_n \;=\; A \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} G_n \;=\; B.$$

Remarquons que $\mu(B) - \mu(A) < 3$.

Si $F = \mathcal{O}$, il existe une unique paire (G_n, G_{n+1}) telle que $\mu(G_{n+1}) - \mu(G_n) \geq 1$, c'est $(\mathcal{O}(-2), \mathcal{O}(-1))$. Supposons que $-1 < \mu(F) < 0$. Il existe alors une unique triade de la forme (E, F, G), avec $-1 \leq \mu(E) < \mu(G) \leq 0$. On en déduit que $(G(-3), E)$ est une des paires (G_n, G_{n+1}). On peut supposer que $(G(-3), E) = (G_0, G_1)$. On a $\mu(G_1) - \mu(G_0) \geq 2$, et (G_0, G_1) est l'unique paire (G_n, G_{n+1}) telle que

$\mu(G_{n+1}) - \mu(G_n) \geq 1$. On l'appelle la paire *initiale* de la série (G_n).

Lemme 3.3. *Le fibré vectoriel $G_0^* \otimes G_1$ est engendré par ses sections globales.*

Démonstration. D'après la construction de (G_0, G_1), il suffit de prouver le résultat suivant : si (A, B, C) est une triade de fibrés exceptionnels telle que $\mu(C) - \mu(A) \leq 1$, les fibrés $B^* \otimes A(3)$, $C^* \otimes B(3)$ et $C^* \otimes A(3)$ sont engendrés par leurs sections globales. On démontre cela par récurrence : il faut montrer que si c'est vrai pour une triade, c'est vrai pour les deux triades adjacentes. Supposons que ce soit vrai pour (A, B, C). Soient H le noyau du morphisme canonique surjectif

$$B \otimes \operatorname{Hom}(B, C) \longrightarrow C$$

et K le conoyau du morphisme canonique injectif

$$A \longrightarrow B \otimes \operatorname{Hom}(A, B)^*.$$

Il faut montrer que le résultat est vrai pour les triades (A, H, B) et (B, K, C). En considérant la triade *duale* $(C^*(-1), B^*(-1), A^*(-1))$, on voit qu'il suffit de considérer (A, H, B). On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow B \otimes \operatorname{Hom}(B, C) \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

On en déduit un morphisme surjectif

$$B^*(3) \otimes A \otimes \operatorname{Hom}(B, C)^* \longrightarrow H^*(3) \otimes A.$$

Puisque $B^*(3) \otimes A$ est engendré par ses sections globales (hypothèse de récurrence), il en est de même de $H^*(3) \otimes A$. On a d'autre part une suite exacte

$$0 \longrightarrow C(-3) \longrightarrow A \otimes \operatorname{Hom}(C(-3), A)^* \longrightarrow H \longrightarrow 0,$$

d'où on déduit un morphisme surjectif

$$B^*(3) \otimes A \otimes \operatorname{Hom}(C(-3), A)^* \longrightarrow B^*(3) \otimes H,$$

d'où on déduit que $B^*(3) \otimes H$ est engendré par ses sections globales. □

Lemme 3.4. *Pour tout entier n, on a $n \geq 1$ si et seulement si pour tous entiers a, b, c positifs ou nuls, le fibré vectoriel*

$$(G_n \otimes \mathbb{C}^a) \oplus (G_{n+1} \otimes \mathbb{C}^b) \oplus (F \otimes \mathbb{C}^c)$$

est prioritaire.

Démonstration. Immédiat. □

On définit de même la *série exceptionnelle à droite* (H_n) associée à F. On a $H_n = G_n(3)$ pour tout n.

3.2.4. *Étude de* $\mathbf{T}$

L'ensemble $\mathbf{T}$ est construit comme une union croissante de sous-ensembles

$$T_0 = \{(\mathcal{O}(-1), Q^*, \mathcal{O})\} \subset T_1 \subset \ldots T_n \subset T_{n+1} \subset \ldots, \qquad \mathbf{T} = \bigcup_{n \geq 0} T_n,$$

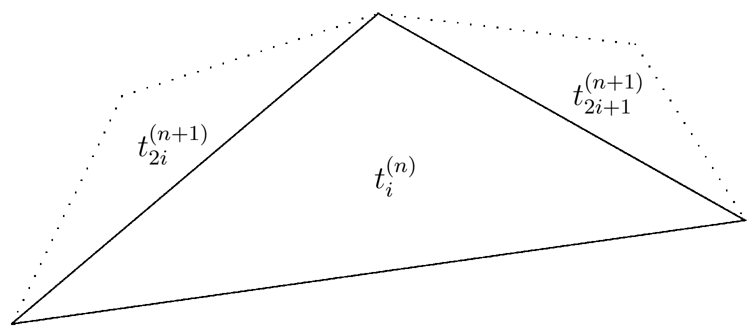
où T_n est l'ensemble des triades $(E_\alpha, E_{\alpha\times\beta}, E_\beta)$, α, β étant de la forme $\alpha = \epsilon(\frac{p}{2^n})$, $\beta = \epsilon(\frac{p+1}{2^n})$, avec p entier. Si $n > 0$, les triades de $T_n \backslash T_{n-1}$ forment une suite $t_0^{(n)}, \ldots, t_{2^n-1}^{(n)}$,

$$t_i^{(n)} \; = \; (E_{\alpha(\frac{i}{2^n})}, E_{\alpha(\frac{2i+1}{2^{n+1}})}, E_{\alpha(\frac{i+1}{2^n})}).$$

On a

$$\mu(E_{\alpha(\frac{i}{2^n})}) \; < \; \mu(E_{\alpha(\frac{2i+1}{2^{n+1}})}) \; < \; \mu(E_{\alpha(\frac{i+1}{2^n})}),$$

et dans le plan de coordonnées (μ, Δ), $E_{\alpha(\frac{2i+1}{2^{n+1}})}$ est situé au dessus de la droite $E_{\alpha(\frac{i}{2^n})}E_{\alpha(\frac{i+1}{2^n})}$.



Le segment de conique $E_{-1}E_0$ de $\mathcal{T}_{(E_{-1}, E_{\frac{1}{2}}, E_0)}$ n'est autre que la courbe $\Delta = -\frac{\mu(\mu+1)}{2}$. On en déduit immédiatement le

Lemme 3.5. *Soit* $Z = \bigcup_{(E,F,G)\in\mathbf{T}} \mathcal{T}_{(E,F,G)}$. *Alors, si* $(\mu, \Delta) \in Z$, *on a* $(\mu, \Delta') \in Z$ *si*

$$\frac{\mu(\mu+1)}{2} \; \leq \; \Delta' \; \leq \; \Delta.$$

3.3. Fibrés prioritaires génériques

3.3.1. *Cohomologie naturelle*

Proposition 3.6. *Soient* F *un fibré exceptionnel,* r, c_1, c_2 *des entiers tels que* $r \geq 2$, $\mu(F) - x_F < \mu \leq \mu(F)$ *et* $\Delta = \delta(\mu)$. *Alors il existe un fibré vectoriel stable* $\mathcal{E}$ *de rang* r *et de classes de Chern* c_1, c_2, *tel que* $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, F) = \{0\}$.

Démonstration. On considère la suite (G_n) de fibrés exceptionnels du § 3.2.3. Soient n un entier et $\mathcal{E}$ un faisceau semi-stable de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. On pose

$$k = \chi(\mathcal{E}, F), \quad m_n \; = \; -\chi(\mathcal{E} \otimes G_n^*(-3)),$$

qui sont indépendants de $\mathcal{E}$. Ces entiers sont positifs : pour le premier, cela découle du fait que le point correspondant à $\mathcal{E}$ est situé sous la conique donnant l'équation de $\delta(\mu)$ sur

$]\mu(F),\mu(F)+x_F[$. Pour le second on utilise le fait que $H^0(\mathcal{E}\otimes G_n^*(-3))$ et $H^2(\mathcal{E}\otimes G_n^*(-3))$ sont nuls. On considère les triades $(F,G_{p-1}(3),G_p(3))$. Ceci suggère de trouver $\mathcal{E}$ comme noyau d'un morphisme surjectif adéquat

$$\theta : (F\otimes\mathbb{C}^k)\oplus(G_{p-1}(3)\otimes\mathbb{C}^{m_{p+1}})\longrightarrow G_p(3)\otimes\mathbb{C}^{m_p}.$$

Un tel fibré a en effet les bons rang et classes de Chern, et de plus on a $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},F)=\{0\}$. Pour montrer que $\mathcal{E}$ se déforme en fibré stable, il suffit qu'il soit prioritaire, car le champ des faisceaux prioritaires est irréductible (cf. [17]). On prend $p=1$, c'est-à-dire qu'on considère des morphismes

$$(F\otimes\mathbb{C}^k)\oplus(G_0(3)\otimes\mathbb{C}^{m_2})\longrightarrow G_1(3)\otimes\mathbb{C}^{m_1}.$$

Alors on a $\mu(G_1(3))-\mu(G_0(3))\geq 1$, donc $\mu(G_1(3))-\mu(F)>1$, et la paire $(F,G_1(3))$ est initiale dans la série qui la contient. Ceci entraîne que le faisceau des morphismes précédents est engendré par ses sections globales. Comme $r\geq 2$, il existe un morphisme

$$\theta : (F\otimes\mathbb{C}^k)\oplus(G_0(3)\otimes\mathbb{C}^{m_2})\longrightarrow G_1(3)\otimes\mathbb{C}^{m_1}$$

qui est surjectif. Soit

$$\mathcal{E} \ = \ \ker(\theta).$$

Il reste à montrer que $\mathcal{E}$ est prioritaire, c'est-à-dire que $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E}(-2))=\{0\}$. On a une suite exacte

$$0\longrightarrow\mathcal{E}\longrightarrow(F\otimes\mathbb{C}^k)\oplus(G_0(3)\otimes\mathbb{C}^{m_2})\longrightarrow G_1(3)\otimes\mathbb{C}^{m_1}\longrightarrow 0,$$

d'où on déduit que

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E}(-2)) \ \subset \ (\mathrm{Hom}(\mathcal{E},F(-2))\otimes\mathbb{C}^k)\oplus(\mathrm{Hom}(\mathcal{E},G_0(1))\otimes\mathbb{C}^{m_2}).$$

Il faut montrer que

$$\mathrm{Hom}((\mathcal{E},F(-2))=\mathrm{Hom}(\mathcal{E},G_0(1))=\{0\}.$$

Montrons d'abord que $\mathrm{Hom}((\mathcal{E},F(-2))=\{0\}$. D'après la suite exacte précédente, on a une suite exacte

$$\begin{aligned}(\mathrm{Hom}(F,F(-2))\otimes\mathbb{C}^k)\oplus(\mathrm{Hom}(G_0(3),F(-2))\otimes\mathbb{C}^{m_2})\longrightarrow \mathrm{Hom}((\mathcal{E},F(-2))\\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(G_1(3),F(-2))\otimes\mathbb{C}^{m_1}.\end{aligned}$$

On a $\mathrm{Hom}(F,F(-2))=\mathrm{Hom}(G_0(3),F(-2))=\{0\}$, car $\mu(G_0(3))>\mu(F)>\mu(F(-2))$.

D'autre part,

$$\mathrm{Ext}^1(G_1(3),F(-2)) \ \simeq \ \mathrm{Ext}^1(F(-2),G_1)^*$$

par dualité de Serre. Pour montrer que $\mathrm{Ext}^1(F(-2),G_1)=\{0\}$, il suffit d'après [2] de prouver que $\mu(F(-2))\leq\mu(G_1)$. Si $F=\mathcal{O}$ c'est évident car $G_1=\mathcal{O}(-1)$. Sinon, on a $\mu(G_1)-\mu(G_0)\geq 2$, et si $\mu(F(-2))>\mu(G_1)$, on a $\mu(F)-\mu(G_0)>4$, ce qui est faux car $\mu(F)-\mu(G_0)<3$.

Montrons maintenant que $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},G_0(1))=\{0\}$. On a une suite exacte

$$\begin{aligned}(\mathrm{Hom}(F,G_0(1))\otimes\mathbb{C}^k)\oplus(\mathrm{Hom}(G_0(3),G_0(1))\otimes\mathbb{C}^{m_2})\\ \longrightarrow \mathrm{Hom}((\mathcal{E},G_0(1))\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(G_1(3),G_0(1))\otimes\mathbb{C}^{m_1}.\end{aligned}$$

On a $\mathrm{Hom}(F,G_0(1))=\{0\}$ car $\mu(F)>\mu(G_1)\geq\mu(G_0(1))$, et $\mathrm{Hom}(G_0(3),G_0(1))=\{0\}$. Il reste à prouver que $\mathrm{Ext}^1(G_1(3),G_0(1))=\{0\}$. On a

$$\mathrm{Ext}^1(G_1(3),G_0(1)) \ \simeq \ \mathrm{Ext}^1(G_0(1),G_1)^* \ = \ \{0\}$$

d'après [2] et le fait que $\mu(G_0(1))\leq\mu(G_1)$. □

3.3.2. *Exemples*

On montre ici que sous les hypothèses de la proposition 3.6, il existe en général des fibrés $\mathcal{E}$ tels que $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{E},F)\neq\{0\}$. Soient $n\geq 1$ un entier, X un ensemble de n points distincts de $\mathbb{P}_2$. On a $\dim(\operatorname{Ext}^1(\mathcal{I}_X(1),\mathcal{O}))=n$. Soit

$$0\longrightarrow\mathcal{O}\otimes\mathbb{C}^n\longrightarrow E\longrightarrow\mathcal{I}_X(1)\longrightarrow 0$$

une extension définie par un isomorphisme $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{I}_X(1),\mathcal{O})\simeq\mathbb{C}^n$. Alors E est un fibré vectoriel de rang $n+1$ et de classes de Chern 1 et n. On a $\chi(E,\mathcal{O})=\{0\}$, et si $n\geq 2$, on a $0<\mu(E)<x_{\mathcal{O}}$. De plus, E est de type de décomposition générique $(1,0,\ldots,0)$. Les droites de saut de E sont les droites joignant deux points de X. Le fibré E est stable, à cause du résultat suivant, qui semble connu mais dont je donne une démonstration, n'ayant pu trouver de référence :

Lemme 3.7. *Soit U un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}_2$, de type de décomposition générique $(1,0,\ldots,0)$, ayant un nombre fini de droites de saut, et tel que*

$$h^0(U(-1))=h^0(U^*)=\{0\}.$$

Alors U est stable.

Démonstration. Il faut montrer qu'étant donné un morphisme génériquement injectif de fibrés vectoriels

$$f:G\longrightarrow U,$$

avec $2\leq rg(G)\leq rg(U)-2$, on a $c_1(G)\leq 0$. On a $c_1(G)\leq 1$, car U est de type de décomposition générique $(1,0,\ldots,0)$. Supposons que $c_1(G)=1$. Alors G est de type de décomposition générique $(1,0,\ldots,0)$. Sur une droite générique ℓ on a un morphisme génériquement injectif $G_{|\ell}\longrightarrow U_{|\ell}$, et comme $G_{|\ell}$ et $U_{|\ell}$ sont de type de décomposition $(1,0,\ldots,0)$, ce morphisme est injectif. Il en découle qu'il n'y a qu'un nombre fini de points de $\mathbb{P}_2$ où f n'est pas injectif. On en déduit que si $U_{|\ell}$ est de type $(1,0,\ldots,0)$, il en est de même de $G_{|\ell}$, et donc $\operatorname{coker}(f)$ modulo torsion est de type de décomposition trivial sur ℓ et n'a comme U qu'un nombre fini de droites de saut. Donc $\operatorname{coker}(f)$ modulo torsion est trivial, ce qui contredit le fait que $h^0(U^*)=\{0\}$. $\square$

On a $\Delta(E^*)=\delta(\mu(E^*))$, et $\chi(E^*,\mathcal{O})=3$. Donc si $n\geq 2$, le point $(\mu(E^*),\Delta(E^*))$ est situé sur $G(\mathcal{O})$. De plus on a, si $n\geq 4$,

$$\dim(\operatorname{Hom}(E^*,\mathcal{O}))\ \geq n\ >\ 3,$$

donc

$$\operatorname{Ext}^1(E^*,\mathcal{O})\ \neq\ \{0\}.$$

3.3.3. *Démonstration du théorème 3.1*

Soient F un fibré exceptionnel, r, c_1, c_2 des entiers tels que $\mu(F)-x_F<\mu<\mu(F)+x_F$, $\Delta<\delta(\mu)$ et $(\mu,\Delta)\neq(\mu(F),\Delta(F))$. On peut se limiter au cas où $\mu(F)-x_F<\mu\leq\mu(F)$, l'autre cas s'en déduisant par dualité. On a alors

$$p\ =\ r.rg(F)(P(\mu-\mu(F))-\Delta-\Delta(F))\ \ >\ \ 0.$$

On peut supposer que $\mu > \delta'(\mu)$: dans le cas contraire on montrera au § 3.3.4 qu'il existe un élément t de $\mathbf{T}$ tel que $(\mu, \Delta) \in \mathcal{T}_t$, et que la partie 1- du théorème 3.1 est vraie dans ce cas. Montrons qu'on a $p.rg(F) < r$: ceci équivaut à

$$\delta(\mu) - \Delta \ < \ \frac{1}{rg(F)^2}.$$

L'inégalité est vraie car le terme de droite est la distance des points notés P et F sur la première figure du § 3.1, et le point (μ, Δ) est situé à l'intérieur du "losange" limité par $G(F)$, $G'(F)$, $D(F)$ et $D'(F)$. Il existe donc des entiers r', c'_1, c'_2, tels que r, c_1 et c_2 soient le rang et le classes de Chern d'une somme directe d'un fibré vectoriel $\mathcal{U}$ de rang r' et de classes de Chern c'_1,c'_2 et de $F \otimes \mathbb{C}^p$. Le point correspondant à $\mathcal{U}$ est situé sur la conique d'équation

$$\Delta = P(\mu - \mu(F)) - \Delta(F)$$

(ceci parce que $\chi(F,\mathcal{U}) = 0$), qui est la conique contenant $G(F)$. On vérifie immédiatement qu'on a on a $\Delta \geq \delta'(\mu)$ si et seulement si ce point est situé sur le segment $G(F)$ de la conique.

Supposons que $\Delta \geq \delta'(\mu)$ et $r' \geq 2$. Dans ce cas il existe d'aprés la proposition 3.6 un fibré stable $\mathcal{U}$ de rang r' et de classes de Chern c'_1,c'_2 tel que $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{U}, F) = \{0\}$. Le fibré

$$\mathcal{E} \ = \ (F \otimes \mathbb{C}^p) \oplus \mathcal{U}$$

est prioritaire, de rang r et de classes de Chern c_1,c_2. Les fibrés prioritaires génériques sont de ce type, car les fibrés tels que $\mathcal{E}$ sont définis par la suite de conditions ouvertes suivante :

(i) on a $\mathrm{Ext}^2(F, \mathcal{E}) = \{0\}$.

(ii) Le morphisme canonique d'évaluation

$$ev : F \otimes \mathbb{C}^p = F \otimes \mathrm{Hom}(F, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E}$$

est injectif.

(iii) Si $\mathcal{U} = \mathrm{coker}(ev)$, $\mathcal{U}$ est un fibré stable tel que $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{U}, F) = \{0\}$.

Supposons maintenant que $r' = 1$. Dans ce cas on doit avoir $F = \mathcal{O}$ et $c_2 = 1$. Les faisceaux de $M(r', c'_1, c'_2)$ sont de la forme $\mathcal{I}_x$ (idéal d'un point x de $\mathbb{P}_2$). On a $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_x, \mathcal{O}) = \mathbb{C}$, d'où le théorème 3.1 dans ce cas.

Il reste à traiter le cas où $\Delta < \delta'(\mu)$. C'est une conséquence du théorème 3.2, dont la démonstration suit.

3.3.4. *Démonstration du théorème 3.2*

Soit $(E, F, G) \in \mathbf{T}$. En considérant la suite spectrale de Beilinson généralisée associée à (E, F, G), on voit immédiatement que les points (μ, Δ) de $\mathcal{T}_{(E,F,G)}$ (à coordonnées rationnelles) sont les paires $(\mu(\mathcal{E}), \Delta(\mathcal{E}))$, où $\mathcal{E}$ est de la forme

$$\mathcal{E} \ = (E \otimes \mathbb{C}^a) \oplus (F \otimes \mathbb{C}^b) \oplus (G \otimes \mathbb{C}^c),$$

avec $a, b, c \geq 0$ non tous nuls. Le fibré précédent est prioritaire et rigide, c'est donc un fibré prioritaire générique.

On pose comme dans le lemme 3.5,

$$Z \;=\; \bigcup_{(E,F,G)\in\mathbf{T}} \mathcal{T}_{(E,F,G)}.$$

La partie 1- du théorème 3.2 est une conséquence immédiate du § 3.2.4. Il reste donc à prouver que

$$Z \;=\; \mathcal{S}.$$

Soit $(\mu,\Delta)\in Z$. Alors on a $\Delta\leq\delta'(\mu)$, car les fibrés prioritaires génériques ayant les invariants μ et Δ sont rigides, comme on vient de le voir. On a donc $Z\subset\mathcal{S}$.

Soit F un fibré exceptionnel tel que $-1<\mu(F)\leq 0$, (G_n) la série exceptionnelle à gauche associée à F. On va montrer que lorsque n tend vers l'infini, le segment de conique G_nF de $T_{(G_{n-1},G_n,F)}$ tend vers le segment de conique

$$\{(\mu,\delta'(\mu)),\mu(F)-x_F<\mu\leq\mu(F)\}.$$

On montrerait de même que si $-1\leq\mu(F)<0$, et si (H_n) est la série exceptionnelle à droite associée à F, alors lorsque n tend vers moins l'infini, le segment de conique FH_n de $T_{(F,H_n,H_{n+1})}$ tend vers le segment de conique

$$\{(\mu,\delta'(\mu)),\mu(F)\leq\mu<\mu(F)+x_F\}.$$

D'après le lemme 3.5, ceci entraîne que $\mathcal{S}\subset Z$.

L'équation du segment de conique G_nF de $T_{(G_{n-1},G_n,F)}$ est

$$\Delta \;=\; P(\mu-\mu(G_{n-1})-3)-\Delta(G_{n-1}).$$

On a

$$\lim_{n\to\infty}(\mu(G_{n-1})) \;=\; \mu(F)-x_F, \quad \lim_{n\to\infty}(\Delta(G_{n-1})) \;=\; \frac{1}{2}.$$

Donc le segment G_nF tend vers la courbe

$$\{(\mu,\phi(\mu)),\mu(F)-x_F<\mu\leq\mu(F)\}.$$

avec

$$\phi(\mu) \;=\; P(\mu-\mu(F)+x_F-3)-\frac{1}{2}.$$

On vérifie immédiatement que $\phi(\mu)=\delta'(\mu)$, ce qui achève la démonstration du théorème 3.2.

3.4. Variétés de modules fins de faisceaux prioritaires instables

Soient r, c_1, c_2 des entiers tels que $r\geq 1$ et $M(r,c_1,c_2)=\emptyset$. Soient

$$\mu \;=\; \frac{c_1}{r}, \qquad \Delta \;=\; \frac{1}{r}(c_2-\frac{r-1}{2r}c_1^2), \qquad \chi=\frac{c_1(c_1+3)}{2}+r-c_2.$$

On suppose que

$$-1 \;<\; \mu\leq\; 0 \quad \text{et} \quad \Delta \;\geq\frac{\mu(\mu+1)}{2}.$$

Il existe donc des fibrés prioritaires de rang r et de classes de Chern c_1, c_2.

3.4.1. *Le cas* $\Delta < \delta'(\mu)$

Dans ce cas il existe d'après les théorèmes 3.1 et 3.2 une triade (E, F, G) de fibrés exceptionels de pentes comprises entre -1 et 0 et des entiers m, n, p tels que le faisceau prioritaire générique de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 soit isomorphe à

$$\mathcal{E} \ = \ (E \otimes \mathbb{C}^m) \oplus (F \otimes \mathbb{C}^n) \oplus (G \otimes \mathbb{C}^p).$$

Le fibré $\mathcal{E}$ est rigide. On en déduit immédiatement la

Proposition 3.8. *Tout ensemble ouvert $\mathcal{X}$ de faisceaux de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 sur $\mathbb{P}_2$, constitué de classes d'isomorphisme de faisceaux prioritaires, contient celle de $\mathcal{E}$, et $\mathcal{X}$ admet une variété de modules fins définie localement si et seulement si $\mathcal{X}$ est réduit à la classe d'isomorphisme de $\mathcal{E}$.*

3.4.2. *Le cas* $\Delta > \delta'(\mu)$

3.4.2.1 *Cas d'existence de variétés de modules fins*

Soit F l'unique fibré exceptionnel tel que $\mu(F) - x_F < \mu \leq \mu(F) + x_F$. On supposera que $\mu(F) - x_F < \mu \leq \mu(F)$ (l'autre cas est analogue). On supposera aussi que $(c_1, c_2) \neq (0, 1)$. Soient

$$p \ = \ r.rg(F)(P(\mu - \mu(F)) - \Delta - \Delta(F)) \ = \ r.rg(F)(\delta(\mu) - \Delta)$$

et r', c'_1, c'_2 les entiers tels que le faisceau prioritaire générique de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 soit de la forme

$$(F \otimes \mathbb{C}^p) \oplus \mathcal{U},$$

$\mathcal{U}$ étant un fibré stable de rang r' et de classes de Chern c'_1, c'_2. Soient

$$\mu' \ = \ \frac{c'_1}{r'}, \qquad \Delta' \ = \ \frac{1}{r'}(c'_2 - \frac{r'-1}{2r'}{c'_1}^2), \qquad \chi' = \frac{c'_1(c'_1+3)}{2} + r' - c'_2.$$

On a $\mu(F) - x_F < \mu' \leq \mu(F)$ et $\Delta' = \delta(\mu')$.

Supposons que r', c'_1 et χ' soient premiers entre eux. Dans ce cas $M(r', c'_1, c'_2)$ est lisse et il existe un *faisceau universel* $\mathcal{E}$ sur $M(r', c'_1, c'_2) \times \mathbb{P}_2$. Soit $M_0 \subset M(r', c'_1, c'_2)$ l'ouvert constitué des points x tels que $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_x, F) = \{0\}$. Soit $\mathcal{X}_0$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des faisceaux $(F \otimes \mathbb{C}^p) \oplus \mathcal{E}_x$, x parcourant M_0. C'est un ensemble ouvert, et il aisé de voir que $(M_0, (F \otimes \mathbb{C}^p) \oplus \mathcal{E}_{M_0})$ est une variété de modules fins pour $\mathcal{X}_0$. On a une sorte de réciproque :

Proposition 3.9. *Soit $\mathcal{X}$ un ensemble ouvert de classes d'isomorphisme de faisceaux sur $\mathbb{P}_2$ contenant des classes d'isomorphisme de faisceaux prioritaires de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. Alors s'il existe une variété de modules fins définie localement pour $\mathcal{X}$, les entiers r', c'_1 et χ' sont premiers entre eux.*

Démonstration. Quitte à remplacer $\mathcal{X}$ par un ensemble plus petit, on peut supposer que $\mathcal{X}$ est constitué uniquement de classes d'isomorphisme de faisceaux prioritaires de la forme $(F \otimes \mathbb{C}^p) \oplus \mathcal{U}$, où $\mathcal{U}$ est un fibré stable de rang r' et de classes de Chern c'_1, c'_2. On peut aussi supposer que $\mathcal{X}$ admet une variété de modules fins $(M, \mathcal{E}_0)$. Alors M est lisse car pour tout faisceau prioritaire E on a $\operatorname{Ext}^2(E,E) = \{0\}$. Il en découle que le faisceau cohérent $p_{M*}(F^* \otimes \mathcal{E}_0)$ sur M est localement libre de rang p, et le morphisme canonique de fibrés vectoriels sur $M \otimes \mathbb{P}_2$

$$\Phi : F \otimes p_{M*}(F^* \otimes \mathcal{E}_0) \longrightarrow \mathcal{E}_0$$

est injectif. Son conoyau est une famille de fibrés stables de rang r' et de classes de Chern c'_1, c'_2 paramétrée par M. Le morphisme induit par coker(Φ)

$$f : M \longrightarrow M(r', c'_1, c'_2)$$

est une immersion ouverte, comme on peut le voir en examinant le morphisme tangent Tf. Il en découle que M, vu comme ouvert de $M(r', c'_1, c'_2)$, possède un fibré universel. D'après [4], les entiers r', c'_1 et χ' sont premiers entre eux. □

3.4.2.2 *Application du théorème 2.13*

On suppose ici que r', c'_1 et χ' sont premiers entre eux. On note $\mathcal{E}$ un faisceau universel sur $M(r', c'_1, c'_2) \times \mathbb{P}_2$. Soit $\mathcal{Y}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents $\mathcal{U}$ qui peuvent s'écrire comme extensions

$$0 \longrightarrow F \otimes \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow E \longrightarrow 0,$$

E étant un faisceau stable de rang r' et de classes de Chern c'_1, c'_2, de telle sorte que l'application linéaire induite

$$\mathbb{C}^{p*} \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(E, F)$$

soit surjective. De tels faisceaux sont prioritaires, de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. On déduit du théorème 2.13 le

Théorème 3.10. *Soit M l'ouvert de $M(r', c'_1, c'_2)$ constitué des points x tels que $\dim(\operatorname{Ext}^1(\mathcal{E}_x, F)) \leq p$. Alors $\mathcal{Y}$ est un ensemble ouvert et il existe une variété de modules fins définie localement $(M, (\mathcal{E}_i))$ pour $\mathcal{Y}$.*

Remarques : 1 - Si p est suffisamment grand, on a $M = M(r', c'_1, c'_2)$, et M est projective. C'est donc une variété de modules fins définie localement *maximale* (cf. § 2.6). J'ignore si en général M est maximale.

2 - Il existe bien sûr d'autres faisceaux prioritaires de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 que ceux de M. Mais j'ignore s'il existe une variété de modules fins définie localement ne contenant que des faisceaux prioritaires de rang r et de classes de Chern c_1, c_2, mais contenant au moins un faisceau qui n'est pas dans M.

3 - La dimension du groupe d'automorphismes des faisceaux de M est

$$p^2 + 1 + 3pr'.rg(F)(\mu(F) - \mu').$$

3.4.2.3 *Le problème de l'existence d'un faisceau universel global*

On considère la situation du théorème 3.10. Supposons qu'il existe une variété de modules fins $(M, \mathcal{F})$ pour $\mathcal{Y}$ (et donc que les $\mathcal{E}_i$ se recollent). Comme dans la démonstration de la proposition 3.9 on trouve une suite exacte de faisceaux sur $M \times \mathbb{P}_2$

$$0 \longrightarrow F \otimes p_M^*(\gamma) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}_M \otimes p_M^*(L) \longrightarrow 0,$$

γ étant un fibré vectoriel de rang p sur M et L un fibré en droites sur M. Cette suite exacte est associée à

$$\sigma \;\in\; \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_M \otimes p_M^*(L), F \otimes p_M^*(\gamma)).$$

Pour tout $x \in M$, soient

$$\theta_x : \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_M \otimes p_M^*(L), F \otimes p_M^*(\gamma)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_x \otimes L_x, F \otimes \gamma_x) \simeq L(\mathbb{C}^{p*}, \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_x, F))$$

le morphisme canonique et $\sigma_x = \theta_x(\sigma)$. Alors σ_x est surjective.

Réciproquement, soient γ un fibré vectoriel de rang p sur M, L un fibré en droites sur M et $\sigma \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_M \otimes p_M^*(L), F \otimes p_M^*(\gamma))$ tels que pour tout x dans M, σ_x soit surjective. Alors l'extension de $\mathcal{E}_M \otimes p_M^*(L)$ par $F \otimes p_M^*(\gamma)$ associée à σ fournit un faisceau universel pour $\mathcal{Y}$, qui admet donc une variété de modules fins définie globalement.

D'après la démonstration du théorème 2.13 il existe un faisceau cohérent $\mathbb{A}$ sur M tel que pour tout $x \in M(r', c_1', c_2')$ on ait un isomorphisme canonique

$$\mathbb{A}_x \;\simeq\; \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_x, F),$$

et que pour toute sous-variété localement fermée Z et tout $s \in H^0(Z, \mathbb{C}^p \otimes \mathbb{A})$ il existe une suite exacte de faisceaux cohérents sur $Z \times \mathbb{P}_2$

$$0 \longrightarrow F \otimes \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{E}_Z \longrightarrow 0$$

telle qu'en tout point $x \in Z$ l'extension

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{U}_x \longrightarrow \mathcal{E}_x \longrightarrow 0$$

soit associée à $s(x) \in \mathbb{A}_x = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_x, F)$. Lorsqu'on remplace $F \otimes \mathbb{C}^p$ par $F \otimes \gamma$ et $\mathcal{E}$ par $\mathcal{E} \otimes p_m^*(L)$ on a un faisceau $\mathbb{A}(\gamma, L)$ analogue à $\mathbb{A} \otimes \mathbb{C}^p$ tel qu'en tout $x \in M$ on ait un isomorphisme canonique

$$\mathbb{A}(\gamma, L)_x \;\simeq\; \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_x \otimes L_x, F \otimes \gamma_x).$$

On a

$$\mathbb{A}(\gamma, L) \;\simeq\; \mathbb{A}(\gamma, \mathcal{O}) \otimes L^*.$$

Soit n la dimension maximale de $\dim(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_x, F))$, x parcourant $M(r', c_1', c_2')$, et pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, d_i la dimension de la sous-variété localement fermée de $M(r', c_1', c_2')$ constituée des points x tels que $\dim(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_x, F)) = i$. Soit $\mathcal{O}_M(1)$ un fibré en droites très ample sur M. On prend γ trivial et $L = \mathcal{O}_M(-m)$, avec m assez grand pour que le faisceau $\mathbb{A}(\mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^p, L) = \mathbb{A}(\mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^p, \mathcal{O}) \otimes L^*$ soit engendré par ses sections globales. Cela implique que pour tout $x \in M$, θ_x est surjective. On cherche p sections de ce faisceau engendrant $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_x, F)$ pour tout $x \in M$. Un calcul simple permet de démontrer la

Proposition 3.11. *Si* $p \geq \mathrm{Max}(d_i + i, 1 \leq i \leq n)$, *on a* $M = M(r', c_1', c_2')$ *et il existe une variété de modules fins globale* $(M, \mathcal{F})$ *pour* $\mathcal{Y}$.

3.4.2.4 *Exemple : le cas* $(r', c_1', c_2') = (4, -2, 4)$

Dans ce cas F est le fibré vectoriel habituellement noté Q^*, qui est le noyau du morphisme dévaluation $\mathcal{O} \otimes H^0(\mathcal{O}(1)) \longrightarrow \mathcal{O}(1)$. On a ici $\chi' = 1$, donc r', c_1' et χ' sont bien premiers entre eux. Les faisceaux des variétés de modules fins étudiées ici seront des extensions

$$0 \longrightarrow Q^* \otimes \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow E \longrightarrow 0,$$

E étant dans $M(4, -2, 4)$. On a alors

$$(r, c_1, c_2) = (2p+4, -p-2, \frac{p(p+5)}{2} + 4), \qquad \mu = -\frac{1}{2}, \qquad \Delta = \frac{3}{8} + \frac{1}{2(p+2)}.$$

On montre dans la proposition 3.12 ci-dessous qu'avec les notations du § 3.4.2.3, on a $n = 2$, $d_1 = 4$ et $d_2 = 2$. On a un isomorphisme canonique

$$M(r', c_1', c_2') \ \simeq \ \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V).$$

Si D est une droite de S^2V, le faisceau semi-stable correspondant à D est le conoyau $\mathcal{E}_D$ du morphisme canonique injectif

$$\mathcal{O}(-3) \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \otimes (S^2V/D).$$

On a donc un faisceau universel $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{P}(S^2V)$ et une suite exacte de faisceaux sur $\mathbb{P}(S^2V) \times \mathbb{P}_2$

$$0 \longrightarrow p_1^*(\mathcal{O}(-3)) \longrightarrow p_1^*(\mathcal{O}(-1)) \otimes p_2^*(Q) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0,$$

p_1, p_2 désignant les projections $\mathbb{P}(S^2V) \times \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}(S^2V)$ et $\mathbb{P}(S^2V) \times \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ respectivement. Soit $Z \subset \mathbb{P}(S^2V)$ la sous-variété localement fermée correspondant aux éléments décomposables, P la sous-variété fermée isomorphe à $\mathbb{P}_2$ composée des points $\mathbb{C}.u^2$, avec $u \in V\backslash\{0\}$.

Proposition 3.12. *Si* $p = 1$ *on a* $M = \mathbb{P}(S^2V)\backslash P$. *Si* $p \geq 2$ *on a* $M = \mathbb{P}(S^2V)$. *Il existe une variété de modules fins globale* $(M, \mathcal{F})$ *pour* $\mathcal{Y}$ *si et seulement si* $p \neq 2$.

Démonstration. On note $M(V)$ le noyau du morphisme canonique

$$S^2V \otimes V^* \longrightarrow V$$

et ϕ_D l'application canonique

$$M(V) \longrightarrow (S^2V/D) \otimes V^*.$$

Alors de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-3) \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \otimes (S^2V/D) \longrightarrow \mathcal{E}_D \longrightarrow 0$$

on déduit un isomorphisme canonique

$$\operatorname{Ext}^1(\mathcal{E}_D, Q^*) \ \simeq \ \operatorname{coker}({}^t\phi_D) \simeq \ker(\phi_D)^*.$$

Il en découle que

$$\dim(\operatorname{Ext}^1(\mathcal{E}_D, Q^*)) \ = \ 0 \qquad \text{si} \ \ D \in \mathbb{P}(S^2V)\backslash(Z \cup P),$$
$$\dim(\operatorname{Ext}^1(\mathcal{E}_D, Q^*)) \ = \ 1 \qquad \text{si} \ \ D \in Z,$$
$$\dim(\operatorname{Ext}^1(\mathcal{E}_D, Q^*)) \ = \ 2 \qquad \text{si} \ \ D \in P.$$

On en déduit déjà que $M = \mathbb{P}(S^2V)\backslash P$ si $p = 1$, $M = \mathbb{P}(S^2V)$ si $p \geq 2$, et qu'il existe une variété de modules fins $(M, \mathcal{F})$ pour $\mathcal{Y}$ si $p \geq 5$ (d'après la proposition 3.11).

Etant donné que la restriction

$$Pic(\mathbb{P}(S^2V)) \longrightarrow Pic(Z)$$

est surjective, il découle de la discussion du § 3.4.2.3 qu'on peut trouver une variété de modules fins $(M, \mathcal{F})$ pour $\mathcal{Y}$ si $p = 1$. Plus précisément, le fibré en droites $\mathbb{A}$ sur Z peut être rendu trivial si on remplace $\mathcal{E}$ par $\mathcal{E} \otimes p_M^*(\mathbb{L})$, pour un $\mathbb{L}$ convenable dans $Pic(M)$.

Il reste à traiter les cas $2 \leq p \leq 4$. On a une suite exacte de faisceaux sur $M = \mathbb{P}(S^2V)$

$$0 \longrightarrow Q^* \otimes V \longrightarrow \mathcal{O} \otimes M(V)^* \longrightarrow \mathbb{A} \longrightarrow 0,$$

d'où on déduit aisément que

$$\mathbb{A}_{|Z} \ \simeq \ \mathcal{O}_M(1)_{|Z}, \qquad \mathbb{A}_{|P} \ \simeq \ Q_P$$

où Q_P est le fibré Q sur $\mathbb{P}_2$. Puisque Q_P n'est pas la restriction à P d'un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(S^2V)$ (son déterminant n'est pas la restriction à P d'un élément de $Pic(\mathbb{P}(S^2V))$), il n'est pas possible de choisir L et γ (cf. § 3.4.2.3) de telle sorte que $\mathcal{G}_{|P}$ devienne engendré par deux sections globales (c'est-à-dire trivial). On n'a donc pas de variété de modules fins globale dans ce cas.

Supposons que $p = 3$ ou 4. Alors trois sections globales de $\mathcal{O}_Z(1)$ suffisent à engendrer ce fibré, et trois sections globales de Q_P suffisent aussi à l'engendrer. Il en découle que trois sections génériques de $\mathbb{A}$ engendrent ce faisceau. Donc dans ce cas il existe une variété de modules fins pour $\mathcal{Y}$. □

3.4.2.5 *Les cas où* $c_1 = 0$ *et* $c_2 = 1$

On a alors $(r', c_1', c_2') = (1, 0, 1)$, et les faisceaux de $M(r', c_1', c_2')$ sont les idéaux de points de $\mathbb{P}_2$. On a donc

$$M(r', c_1', c_2') \ \simeq \ \mathrm{Hilb}^1(\mathbb{P}_2) \ \simeq \mathbb{P}_2.$$

Pour tout point x de $\mathbb{P}_2$ on a une suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2) \otimes \Lambda^2 x^{\perp} \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \otimes x^{\perp} \longrightarrow \mathcal{I}_x \longrightarrow 0,$$

où $x^{\perp} \subset V^*$ est l'orthogonal de x. On en déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow V^* \otimes Q_x \longrightarrow S^2V^* \otimes \Lambda^2 Q_x \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_x, \mathcal{O}) \longrightarrow 0.$$

Soient p_M, p_2 les projections $\mathrm{Hilb}^1(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathrm{Hilb}^1(\mathbb{P}_2)$ et $\mathrm{Hilb}^1(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ respectivement. On déduit de ce qui précède un faisceau universel $\mathcal{I}'$ sur $\mathrm{Hilb}^1(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2$ et une suite exacte de fibrés vectoriels sur $\mathrm{Hilb}^1(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2$

$$0 \longrightarrow p_2^*(\mathcal{O}(-2)) \otimes p_M^*(\Lambda^2 Q^*) \longrightarrow p_2^*(\mathcal{O}(-1)) \otimes p_M^*(Q^*) \longrightarrow \mathcal{I}' \longrightarrow 0,$$

et une suite exacte de fibrés vectoriels sur $\mathrm{Hilb}^1(\mathbb{P}_2)$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow p_M^*(Q) \otimes V^* \longrightarrow p_M^*(\Lambda^2 Q) \otimes S^2V^* \longrightarrow \mathbb{A} \longrightarrow 0,$$

où $\mathbb{A}$ est le faisceau de la démonstration du théorème 2.13 (qui est ici localement libre de rang 1) tel qu'en tout point x de $\mathbb{P}_2$ on ait $\mathbb{A}_x \simeq \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_x, \mathcal{O})$. On a

$$\mathbb{A} \ \simeq \mathcal{O}(3).$$

Soit

$$\mathcal{I} \ = \ \mathbb{A} \otimes p_M^*(\mathcal{O}(3)).$$

Pour ce nouveau faisceau universel, le fibré $\mathbb{A}$ devient trivial, et la section 1 définit une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow 0$$

telle qu'en tout point x de $\mathbb{P}_2 = \mathrm{Hilb}^1(\mathbb{P}_2)$, sa restriction à $\{x\} \times \mathbb{P}_2$ soit non triviale.

Soit $\mathcal{Y}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des faisceaux $\mathcal{V}_x$, x parcourant $\mathbb{P}_2$. Alors $\mathcal{Y}$ est ouvert et $(\mathbb{P}_2, \mathcal{V})$ est une variété de modules fins pour $\mathcal{Y}$.

Plus généralement, soit $\mathcal{Y}_p$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des faisceaux $\mathcal{V}_x \oplus (\mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^p)$, x parcourant $\mathbb{P}_2$. Alors $\mathcal{Y}_p$ est ouvert et $(\mathbb{P}_2, \mathcal{V} \oplus (\mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^p))$ est une variété de modules fins pour $\mathcal{Y}_p$.

4. Variétés de modules fins de faisceaux de rang 1

4.1. Faisceaux simples de rang 1

On suppose dans toute cette section que $X = \mathbb{P}_2$ ou $X = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. On note ω_X le fibré canonique sur X.

Lemme 4.1. *Soit E un faisceau de rang non nul simple sur X. Alors on a*

$$\mathrm{Ext}^2(E, E) = \{0\}.$$

Démonstration. On a par dualité de Serre

$$\mathrm{Ext}^2(E, E) \;\simeq\; \mathrm{Hom}(E, E \otimes \omega_X)^*.$$

Supposons que $\mathrm{Ext}^2(E, E) \neq \{0\}$. On en déduit un morphisme non nul

$$f : E \longrightarrow E \otimes \omega_X.$$

Soit $\phi : \omega_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$ un morphisme non nul. Il s'annule donc sur une hypersurface de X. Alors $(I_E \otimes \phi) \circ f$ est un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie. On a donc $\mathrm{Ext}^2(E, E) = \{0\}$. $\square$

On s'intéresse aux variétés de modules fins constituées de faisceaux simples de rang 1 et de déterminant trivial. D'après le lemme précédent, de telles variétes sont lisses.

Théorème 4.2. *On suppose que $X = \mathbb{P}_2$ ou $X = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. Soient Y une variété algébrique intègre, $\mathcal{E}$ une famille plate complète de faisceaux de rang 1 simples sur X et de détermiant trivial. Soit U l'ouvert de Y constitué des points y tels que $\mathcal{E}_y$ soit sans torsion, et $Z = Y \backslash U$. Alors si $X = \mathbb{P}_2$, Z est de codimension au moins 4 dans Y, et si $X = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, Z est de codimension au moins 3 dans Y.*

Il en découle que dans toute variété de modules fins de faisceaux simples de rang 1 et de déterminant trivial sur X, l'ouvert correspondant aux faisceaux qui sont des idéaux de sous-schémas de X de dimension 0 est non vide et dense.

Le reste du § 4.1 est consacré à la démonstration du théorème 4.2. Soit m un entier tel que pour tout point y de Y, $\mathcal{E}_y(m)$ soit engendré par ses sections globales, et que

$h^1(\mathcal{E}_y(m)) = h^2(\mathcal{E}_y(m)) = \{0\}$. Soient $p = h^0(\mathcal{E}_y(m))$, qui est indépendant de y, et P le polynôme de Hilbert des faisceaux $\mathcal{E}_y$. Soient enfin

$$\mathbf{Q} \ = \ \mathbf{Hilb}^P(\mathcal{O}_X(-m)\otimes\mathbb{C}^p),$$

et

$$\pi : \mathcal{O}_X(-m)\otimes\mathbb{C}^p \longrightarrow \mathcal{F}$$

le morphisme surjectif universel sur $\mathbf{Q}\otimes X$. On se ramène aisément, $\mathcal{E}$ étant complète, au cas où Y est l'ouvert de Q constitué des points q tels que $\mathcal{F}_q$ soit simple, et où $\mathcal{E} = \mathcal{F}_Y$. Soit $\mathbb{N} = \ker(\pi)$.

Commençons par donner une description des faisceaux simples de rang 1 sur X et une caractérisation de ceux qui sont sans torsion.

Lemme 4.3. *Soit E un faisceau simple de rang 1 sur X et de déterminant trivial. Alors on a $\mathrm{Ext}^2(E,\mathcal{O}_X) = \{0\}$, et E est sans torsion si et seulement si $\dim(\mathrm{Hom}(E,\mathcal{O}_X)) = 1$.*

Démonstration. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{I}_S\otimes L \longrightarrow 0,$$

T désignant le sous-faisceau de torsion de E, S un sous-schéma de dimension 0 de X, $\mathcal{I}_S$ le faisceau d'idéaux de S et L un fibré en droites sur X (pour un étude précise des faisceaux de torsion, voir [23], [25] ou [30]). Supposons T non nul. Alors T est pur de dimension 1, car s'il avait un sous-faisceau de dimension 0, il existerait des morphismes non nuls $\mathcal{I}_S\otimes L \longrightarrow T$, et E ne serait pas simple. Soit D le support schématique de T. On a alors

$$c_1(T) \ = \ \mathcal{O}(D), \qquad L \ = \ \mathcal{O}(-D).$$

On a donc

$$\mathrm{Hom}(E,\mathcal{O}_X) \ \simeq \ \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_S\otimes L,\mathcal{O}_X) \ \simeq \ H^0(\mathcal{O}(D)).$$

et $\dim(\mathrm{Hom}(E,\mathcal{O}_X)) > 1$. Si maintenant T est nul, on a $E \simeq \mathcal{I}_S$, et donc

$\dim(\mathrm{Hom}(E,\mathcal{O}_X)) = 1$.

Il reste à montrer que $\mathrm{Ext}^2(E,\mathcal{O}_X) = \{0\}$. Par dualité de Serre, on a

$$\mathrm{Ext}^2(E,\mathcal{O}_X) \ \simeq \ \mathrm{Hom}(\omega_X^{-1},E)^*.$$

Supposons qu'il existe un $\phi\in\mathrm{Hom}(\omega_X^{-1},E)$ non nul. Puisque $\mathcal{I}_S\otimes L\subset\mathcal{O}_X$, il existe des morphismes $E\longrightarrow\omega_X^{-1}$ dont la restriction au support de T est non nulle. On en déduit par composition avec ϕ un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie. Donc $\mathrm{Ext}^2(E,\mathcal{O}_X) = \{0\}$. □

Soit $q\in Y$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_q,\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_X(m))\otimes\mathbb{C}^{p*} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{N}_q,\mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}_q,\mathcal{O}_X) \longrightarrow 0.$$

Puisque $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{F}_q,\mathcal{O}_X) = \{0\}$, on en déduit que la dimension de $\mathrm{Hom}(\mathbb{N}_q,\mathcal{O}_X)$ ne dépend pas de q. On obtient donc un morphisme de fibrés vectoriels sur Y

$$\Phi : F_0 = \mathcal{O}_Y\otimes H^0(\mathcal{O}_X(m))\otimes\mathbb{C}^{p*} \longrightarrow F_1 = p_{Y*}(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{N},\mathcal{O}_{Y\times X}))$$

tel que le lieu Y_i des points q de Y tels que $\dim(\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_q,\mathcal{O}_X)) = i$ est précisément celui des points où le noyau de Φ est de dimension i. Soient $G = F_0^*\otimes F_1$, vu comme variété algébrique, et G_i la sous-variété localement fermée constituée des morphismes dont le noyau est de dimension

i. Alors G et les G_i sont lisses, et en tout point f de G_i, l'espace normal de G_i en f est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}(\ker(f), \mathrm{coker}(f))$.

Soit q un point de Y tel que $\mathcal{F}_q$ ait de la torsion, et $i = \dim(\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_q, \mathcal{O}_X)) \geq 2$. Alors $q \in G_i$. Le morphisme Φ peut être vu comme un morphisme

$$Y \longrightarrow G.$$

L'application

$$TY_q \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_q, \mathcal{O}_X), \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}_q, \mathcal{O}_X))$$

déduite de $T\phi$ est nulle sur les $PGL(p)$-orbites, donc se factorise de la façon suivante :

$$TY_q \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}_q, \mathcal{F}_q) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_q, \mathcal{O}_X), \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}_q, \mathcal{O}_X)),$$

où α est le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer de $\mathcal{F}$ en q et β le morphisme canonique (pour des démonstrations analogues, voir par exemple [16]). Le théorème 4.2 est donc une conséquence du

Lemme 4.4. *Soit E un faisceau simple de rang 1 sur X de déterminant trivial et ayant de la torsion. Alors l'application canonique*

$$\beta : \mathrm{Ext}^1(E, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}_X), \mathrm{Ext}^1(E, \mathcal{O}_X))$$

est de rang au moins 4 si $X = \mathbb{P}_2$, et de rang au moins 3 si $X = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$.

Démonstration. On considère la suite exacte dejà vue dans le lemme 4.3

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{I}_S \otimes L \longrightarrow 0,$$

T désignant le sous-faisceau de torsion de E (qui est pur de dimension 1), S un sous-schéma de dimension 0 de X, $\mathcal{I}_S$ le faisceau d'idéaux de S et L un fibré en droites sur X. On a $L = \mathcal{O}(-D)$, D désignant le support schématique de T. On a alors

$$c_1(T) \;=\; -c_1(L), \qquad c_2(T) \;= c_1(L)^2 - s + c_2,$$

s désignant la longueur de S, et $c_2 = c_2(E)$.

Etape 1 : *quelques calculs*

Le théorème de Riemann-Roch fournit les résultats suivants, dont on se servira par la suite :

$$\chi(T, \mathcal{I}_S \otimes L) \;=\; \frac{1}{2}c_1(L)^2 - \frac{\omega_X c_1(L)}{2} - c_2 + s, \qquad \chi(\mathcal{I}_S \otimes L, T) \;=\; \frac{1}{2}c_1(L)^2 + \frac{\omega_X c_1(L)}{2} - c_2 + s,$$

$$\chi(T, \mathcal{O}_X) \;=\; -\frac{1}{2}c_1(L)^2 - \frac{\omega_X c_1(L)}{2} - c_2 + s, \qquad \chi(E, \mathcal{O}_X) \;=\; 1 - c_2, \qquad \chi(E, \mathcal{O}_S) \;=\; s.$$

On en déduit

$$\dim(\mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}_X)) \;=\; h^0(L^{-1}), \qquad \dim(\mathrm{Ext}^1(E, \mathcal{O}_X)) \;=\; h^0(L^{-1}) + c_2 - 1,$$

(on a $\mathrm{Ext}^2(E, \mathcal{O}_X) = \{0\}$ d'après le lemme 4.3).

Puisque $\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_S \otimes L, T) = \{0\}$ (car E est simple) et $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_S \otimes L, T) = \{0\}$ (par dualité de Serre) on a

$$\dim(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_S \otimes L, T)) \;=\; -\chi(\mathcal{I}_S \otimes L, T),$$

et c'est la dimension générique. Il en découle qu'en bougeant S il est suffisant de démontrer le lemme 4.4 dans le cas où S ne rencontre pas le support de T (autrement dit, on peut toujours déformer E en faisceau simple tel que S ne rencontre pas le support de T). On a

$$\operatorname{Ext}^2(E, \mathcal{O}_S) \ = \ \{0\}.$$

En effet, par dualité de Serre, on a

$$\operatorname{Ext}^2(E, \mathcal{O}_S) \ \simeq \ \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_S, E \otimes \omega_X)$$

qui est nul car T est pur de dimension 1. On en déduit que

$$\dim(\operatorname{Ext}^1(E, \mathcal{O}_S)) \ = \ s.$$

D'autre part il découle de la démonstration du lemme 3.2 de [25] que T peut se déformer en faisceau lisse (un fibré en droites sur une courbe lisse). On peut donc supposer que $\operatorname{Ext}^2(T, T) = \{0\}$. D'après la suite exacte

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{I}_S \otimes L \longrightarrow 0$$

on en déduit que

$$\operatorname{Ext}^2(E, T) \ = \ \{0\}.$$

Etape 2 : *interprétation de* $\operatorname{coker}(\beta)$

On note $V(L)$ le fibré vectoriel sur X conoyau du morphisme canonique injectif

$$L \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes H^0(L^{-1})^*,$$

et V_S celui du morphisme canonique injectif

$$\mathcal{I}_S \otimes L \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes H^0(L^{-1})^*.$$

On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow L \otimes \mathcal{O}_S \longrightarrow V_S \longrightarrow V(L) \longrightarrow 0.$$

Puisque $\operatorname{Ext}^2(E, T) = \{0\}$, le morphisme canonique

$$f : \operatorname{Ext}^1(E, E) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(E, \mathcal{I}_S \otimes L)$$

est surjectif. On considère maintenant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_S \otimes L \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes H^0(L^{-1})^* \longrightarrow V_S \longrightarrow 0.$$

On en déduit la suite exacte

$$\begin{gathered}\operatorname{Ext}^1(E, \mathcal{I}_S \otimes L) \xrightarrow{\ \ g\ \ } \operatorname{Hom}(\operatorname{Hom}(E, \mathcal{O}_X), \operatorname{Ext}^1(E, \mathcal{O}_X)) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(E, V_S) \longrightarrow \\ \longrightarrow \operatorname{Ext}^2(E, \mathcal{I}_S \otimes L).\end{gathered}$$

On a $\operatorname{Ext}^2(E, \mathcal{I}_S \otimes L) = \{0\}$. En effet, par dualité de Serre, il suffit de vérifier que $\operatorname{Hom}(\mathcal{I}_S \otimes L, E \otimes \omega_X) = \{0\}$. Cela découle du fait que $\operatorname{Hom}(\mathcal{I}_S \otimes L, E) = \{0\}$ (car E est simple), et de ce qu'il existe des morphismes non nuls $\omega_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$. Comme $\beta = g \circ f$, on en déduit un isomorphisme

$$\operatorname{coker}(\beta) \ \simeq \ \operatorname{Ext}^1(E, V_S).$$

Pour démontrer le lemme 4.4, il suffit de montrer que

$$\dim(\operatorname{Hom}(\operatorname{Hom}(E, \mathcal{O}_X), \operatorname{Ext}^1(E, \mathcal{O}_X)) \ - \ \dim(\operatorname{Ext}^1(E, V_S))$$

est supérieur ou égal à 4 si $X=\mathbb{P}_2$, et supérieur ou égal à 3 si $X=\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1$.

Etape 3 : *estimation de* $\dim(\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(E,\mathcal{O}_X),\mathrm{Ext}^1(E,\mathcal{O}_X)))-\dim(\mathrm{Ext}^1(E,V_S))$

On considère la suite exacte

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_S\otimes L\longrightarrow V_S\longrightarrow V(L)\longrightarrow 0.$$

On en déduit la suite exacte

$$\mathrm{Hom}(E,V(L))\longrightarrow\mathrm{Ext}^1(E,\mathcal{O}_S\otimes L)\longrightarrow\mathrm{Ext}^1(E,V_S)\longrightarrow\mathrm{Ext}^1(E,V(L)),$$

d'où

$$\dim(\mathrm{Ext}^1(E,V_S))\ \leq\dim(\mathrm{Ext}^1(E,\mathcal{O}_S\otimes L))+\dim(\mathrm{Ext}^1(E,V(L))).$$

On commence par calculer $\dim(\mathrm{Ext}^1(E,\mathcal{O}_S\otimes L))$. On a $\mathrm{Ext}^2(E,\mathcal{O}_S\otimes L)=\{0\}$ par dualité de Serre. Cette dernière raison implique que

$$\mathrm{Hom}(E,\mathcal{O}_S\otimes L)\ \simeq\ \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_S\otimes L,\mathcal{O}_S\otimes L),$$

qui est de dimension $2s$. Comme $\chi(E,\mathcal{O}_S\otimes L)=\chi(E,\mathcal{O}_S)=s$, on en déduit que

$$\dim(\mathrm{Ext}^1(E,\mathcal{O}_S\otimes L))\ =\ s.$$

On calcule maintenant $\dim(\mathrm{Ext}^1(E,V(L)))$. On a une suite exacte

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_S\otimes L,V(L))\longrightarrow\mathrm{Ext}^1(E,V(L))\longrightarrow\mathrm{Ext}^1(T,V(L)).$$

Donc

$$\dim(\mathrm{Ext}^1(E,V(L)))\ \leq\ \dim(\mathrm{Ext}^1(T,V(L)))+\dim(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_S\otimes L,V(L))).$$

On a $\mathrm{Ext}^2(T,V(L))=\{0\}$. En effet, par dualité de Serre il suffit de montrer que $\mathrm{Hom}(V(L),T\otimes\omega_X)=\{0\}$. Si ce n'était pas le cas, en utilisant une section de $V(L)$ et un morphisme non nul $\omega_X\longrightarrow\mathcal{O}_X$ on obtiendrait une section non nulle de T, donc un morphisme non nul $\mathcal{I}_S\otimes L\longrightarrow T$ qui définirait un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie. On a aussi $\mathrm{Hom}(T,V(L))=\{0\}$ car $V(L)$ est localement libre. Donc, en utilisant le théorème de Riemann-Roch on trouve

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Ext}^1(T,V(L)))\ &=\ -\chi(T,V(L))\\ &=\ c_1(L)^2+(h^0(L^{-1})-1)(\frac{\omega_X c_1(L)}{2}+\frac{c_1(L)^2}{2}+c_2-s).\end{aligned}$$

Pour calculer $\dim(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_S\otimes L,V(L)))$ on considère les suites exactes

$$0\longrightarrow\mathcal{I}_S\otimes L\longrightarrow L\longrightarrow\mathcal{O}_S\otimes L\longrightarrow 0,$$

$$0\longrightarrow L\longrightarrow\mathcal{O}_X\otimes H^0(L^{-1})^*\longrightarrow V(L)\longrightarrow 0.$$

De la seconde on déduit que

$$\mathrm{Ext}^1(L,V(L))\ =\mathrm{Ext}^2(L,V(L))\ =\{0\},$$

d'où il découle avec la première que

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_S\otimes L,V(L))\ \simeq\ \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_S\otimes L,V(L))\ \simeq\ \mathrm{Hom}(V(L),\mathcal{O}_S\otimes L)^*.$$

On a donc

$$\dim(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_S\otimes L,V(L)))\ =\ s(h^0(L^{-1})-1).$$

On a donc

$$\dim(\mathrm{Ext}^1(E,V_S)) \ \leq \ s + c_1(L)^2 + (h^0(L^{-1})-1)(\frac{\omega_X c_1(L)}{2} + \frac{c_1(L)^2}{2} + c_2 - s).$$

On obtient finalement

$$\dim(\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(E,\mathcal{O}_X),\mathrm{Ext}^1(E,\mathcal{O}_X)) - \dim(\mathrm{Ext}^1(E,V_S)) \ \geq \ -\chi(T,\mathcal{I}_S\otimes L).$$

Etape 4 : *fin de la démonstration du lemme 4.4*

On a

$$\chi(T,\mathcal{I}_S\otimes L) \ = \chi(\mathcal{I}_S\otimes L,T) - \omega_X c_1(L).$$

On a $\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_S\otimes L,T) = \mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_S\otimes L,T) = \{0\}$, donc $\chi(\mathcal{I}_S\otimes L,T) < 0$. On a d'autre part $\omega_X c_1(L) \geq 3$ si $X = \mathbb{P}_2$ et $\omega_X c_1(L) \geq 2$ si $X = \mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1$. On en déduit $-\chi(T,\mathcal{I}_S\otimes L) \geq 4$ si $X = \mathbb{P}_2$ et $-\chi(T,\mathcal{I}_S\otimes L) \geq 3$ si $X = \mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1$. Ceci achève la démonstration du lemme 4.4. $\square$

Remarque : On considère la suite spectrale $E_r^{p,q}$ convergeant vers $\mathrm{Ext}^{p+q}(E,E)$ définie par la filtration $T\subset E$. Les termes $E_1^{p,q}$ éventuellement non nuls sont représentés ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}^2(T,\mathcal{I}_S\otimes L) & 0 & 0 \\
\mathrm{Ext}^1(T,\mathcal{I}_S\otimes L) & \mathrm{Ext}^2(T,T)=\{0\} & 0 \\
0 & \mathrm{Ext}^1(T,T)\oplus\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_S,\mathcal{I}_S) & 0 \\
0 & \mathrm{Hom}(T,T)\oplus\mathbb{C} & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_S\otimes L,T)
\end{array}$$

On en déduit un isomorphisme non canonique

$$\mathrm{Ext}^1(E,E) \ \simeq \ \mathrm{Ext}^1(T,T)\oplus\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_S,\mathcal{I}_S)\oplus\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_S\otimes L,T)\oplus\mathrm{Ext}^1(T,\mathcal{I}_S\otimes L).$$

Les trois premiers termes correspondent aux déformations de E obtenues en déformant T, S et l'extension. Le troisième doit représenter des déformations en faisceaux sans torsion ou avec un $\dim(\mathrm{Hom}(E,\mathcal{O}_X))$ plus petit. Je n'ai pas trouvé de démonstration réellement convaincante du théorème 4.2 utilisant cette suite spectrale.

4.2. Un exemple de variété de modules fins maximale non projective

On donne ici des exemples de variétés de modules fins qui sont des cas particuliers de ce qui est décrit au § 5.1. Mais montre ici que ces variétés de modules fins sont maximales.

4.2.1. *Sous-schémas finis de $\mathbb{P}_2$ de longueur $\frac{n(n+1)}{2}$*

Proposition 4.5. *Soient n un entier positif, Z un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_2$ de longueur $\frac{n(n+1)}{2}$. Alors il existe une suite exacte*

$$0\longrightarrow\mathcal{O}(-n-1)\otimes\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathcal{O}(-n)\otimes\mathbb{C}^{n+1}\longrightarrow\mathcal{I}_Z\longrightarrow 0$$

si et seulement si Z n'est pas contenu dans une courbe de degré $n-1$.

Démonstration. Il est clair que si il existe une telle suite exacte on a $H^0(\mathcal{I}_Z(n-1)) = \{0\}$, c'est-à-dire que Z n'est pas contenu dans une courbe de degré $n-1$. Réciproquement, supposons que Z ne soit pas contenu dans une courbe de degré $n-1$. On a alors

$$H^0(\mathcal{I}_Z(n-1)) \ = \ H^0(\mathcal{I}_Z \otimes Q^*(n-1)) = H^0(\mathcal{I}_Z(n-2)) = \{0\},$$

et aussi

$$H^2(\mathcal{I}_Z(n-1)) \ = \ H^2(\mathcal{I}_Z \otimes Q^*(n-1)) = H^2(\mathcal{I}_Z(n-2)) = \{0\}$$

par dualité de Serre. On a donc $H^1(\mathcal{I}_Z(n-1)) = \{0\}$, car $\chi(\mathcal{I}_Z(n-1)) = 0$. La suite spectrale de Beilinson donne donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-n-1) \otimes H^1(\mathcal{I}_Z(n-2)) \longrightarrow \mathcal{O}(-n) \otimes H^1(\mathcal{I}_Z \otimes Q^*(n-1)) \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow 0.$$

Un calcul simple montre que $h^1(\mathcal{I}_Z(n-2)) = n$, $h^1(\mathcal{I}_Z \otimes Q^*(n-1)) = n+1$. □

Soit $W = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-n-1) \otimes \mathbb{C}^n, \mathcal{O}(-n) \otimes \mathbb{C}^{n+1})$. Sur l'espace projectif

$\mathbb{P} = \mathbb{P}(W)$ agit le groupe algébrique réductif $SL(n) \times SL(n+1)$, et cette action se prolonge de manière évidente à une action sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$. Un point de $\mathbb{P}$, correspondant à un morphisme

$$f : \mathcal{O}(-n-1) \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathcal{O}(-n) \otimes \mathbb{C}^{n+1}$$

est semi-stable pour cette action si et seulement si il est stable, et ceci est vrai si et seulement si pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq n$, et tous sous-espaces vectoriels de dimension p, $M_p \subset \mathbb{C}^n$, $N_p \subset \mathbb{C}^{n+1}$, $f(\mathcal{O}(-n-1) \otimes M_p)$ n'est pas contenu dans $\mathcal{O}(-n) \otimes N_p$ (cf. [3]). Si $\mathbb{P}^s$ désigne l'ouvert des points stables de $\mathbb{P}$, il existe un quotient géométrique

$$N(3, n, n+1) \ = \ \mathbb{P}^s/(SL(n) \times SL(n+1)),$$

et c'est une variété projective lisse de dimension $n(n+1)$. Soient p_N, p_2 les projections $N(3, n, n+1) \times \mathbb{P}_2 \longrightarrow N(3, n, n+1)$ et $N(3, n, n+1) \times \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ respectivement. Alors il existe sur $N(3, n, n+1) \times \mathbb{P}_2$ un *morphisme universel*

$$\Phi : p_2^*(\mathcal{O}(-n-1)) \otimes p_N^*(M_n) \longrightarrow p_2^*(\mathcal{O}(-n)) \otimes p_N^*(N_n),$$

M_n (resp. N_n) étant un fibré vectoriel de rang n (resp. $n+1$) sur $N(3, n, n+1)$. On pose $\mathcal{E} = \mathrm{coker}(\Phi)$.

Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble ouvert des classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents E sur $\mathbb{P}_2$, de rang 1 et de classes de Chern 0 et $\frac{n(n+1)}{2}$, vérifiant

$$H^0(E(n-1)) \ = \ H^1(E(n-1)) \ = \ H^2(E(n-2)) \ = \ \{0\}.$$

D'après la suite spectrale de Beilinson, ce sont les faisceaux qui sont isomorphes à des conoyaux de morphismes injectifs de W. Soit $\mathcal{X}^s$ l'ensemble ouvert de faisceaux constitué des classes d'isomorphisme de conoyaux de morphismes injectifs stables de W. Alors, si U désigne l'ouvert de $N(3, n, n+1)$ constitué des morphismes injectifs (comme morphismes de faisceaux), $(U, \mathcal{E}_U)$ est une variété de modules fins pour $\mathcal{X}^s$.

Proposition 4.6. *1 - Soient Z un sous-schéma fini de longueur $\frac{n(n+1)}{2}$ de $\mathbb{P}_2$, et*

$$f : \mathcal{O}(-n-1) \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathcal{O}(-n) \otimes \mathbb{C}^{n+1}$$

un morphisme dont le conoyau est isomorphe à $\mathcal{I}_Z$. Alors f est stable.

2 - Il existe des points x de U tels que $\mathcal{E}_x$ ait de la torsion.

3 - Si $n \geq 5$ on a $U \neq N(3, n, n+1)$, et donc U n'est pas projective.

Démonstration. Soit
$$g : \mathcal{O}(-n-1) \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathcal{O}(-n) \otimes \mathbb{C}^{n+1}$$
un morphisme injectif non stable. Alors il existe un entier p tel que $1 \leq p \leq n$ et des sous-espaces vectoriels $M_p \subset \mathbb{C}^n$, $N_p \subset \mathbb{C}^{n+1}$ de dimension p tels que
$$g(\mathcal{O}(-n-1) \otimes M_p) \ \subset \ \mathcal{O}(-n) \otimes N_p.$$
Soient
$$g' : \mathcal{O}(-n-1) \otimes M_p \longrightarrow \mathcal{O}(-n) \otimes N_p, \qquad g'' : \mathcal{O}(-n-1) \otimes (\mathbb{C}^n/M_p) \longrightarrow \mathcal{O}(-n) \otimes (\mathbb{C}^{n+1}/N_p)$$
les morphismes déduits de g. On a alors une suite exacte
$$0 \longrightarrow \ker(g'') \longrightarrow \operatorname{coker}(g') \longrightarrow E \longrightarrow \operatorname{coker}(g'') \longrightarrow 0.$$
Mais $\ker(g'')$ est localement libre et $\operatorname{coker}(g')$ de torsion (car de rang nul). Donc $\ker(g'')$ est nul, et $\operatorname{coker}(g')$ est un sous-faisceau de torsion non trivial de E. Ceci prouve 1- (c'est aussi une conséquence de la proposition 5.1).

Pour démontrer 2-, on considère un sous-schéma fini S de $\mathbb{P}_2$ de longueur
$$s \ = \ h^0(\mathcal{O}(n-2)) - 1 \ = \ \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$
contenu dans une unique courbe de degré $n-2$. On a alors
$$H^1(\mathcal{I}_S(n-2)) \ = \ H^2(\mathcal{I}_S(n-2)) \ = \ \{0\}.$$
Soit $\ell = \mathbb{P}(D)$ une droite de $\mathbb{P}_2$ ne rencontrant pas le support de S. On considère une extension
$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_\ell(-n-1) \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{I}_S(-1) \longrightarrow 0$$
donnée par un élément σ de $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{I}_S(-1), \mathcal{O}_\ell(-n-1))$. On a
$$\operatorname{Ext}^1(\mathcal{I}_S(-1), \mathcal{O}_\ell(-n-1)) \ \simeq \ \operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}(-1), \mathcal{O}_\ell(-n-1)) \ \simeq \ S^{n-2}D.$$
Le morphisme canonique
$$\operatorname{Ext}^1(\mathcal{I}_S(-1), \mathcal{O}_\ell(-n-1)) \otimes H^0(\mathcal{O}(n-2)) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_\ell(-2))$$
est l'accouplement canonique
$$S^{n-2}D \otimes S^{n-2}V^* \longrightarrow \mathbb{C}.$$
Il en découle qu'il est possible de choisir σ tel que le morphisme induit
$$H^0(\mathcal{I}_S(n-2)) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_\ell(-2))$$
soit un isomorphisme. On a alors
$$H^0(E(n-1)) \ = \ H^1(E(n-1)) \ = \ H^2(E(n-2)) \ = \ \{0\}.$$
Il en découle que E est isomorphe au conoyau d'un morphisme injectif
$$g : \mathcal{O}(-n-1) \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathcal{O}(-n) \otimes \mathbb{C}^{n+1}.$$
Il reste à voir que g est stable. On a vu dans la démonstration de -1 que si g n'est pas stable, E contient un sous-faisceau de torsion non nul qui est un quotient d'un fibré du type $\mathcal{O}(-n) \otimes \mathbb{C}^p$. Ceci est impossible car
$$\operatorname{Hom}(\mathcal{O}(-n), \mathcal{O}_\ell(-n-1)) \ = \ \{0\}.$$
Donc g est stable.

La démonstration de 3- est donnée au § 4.2.2. □

Théorème 4.7. *La variété de modules fins U est maximale.*

Démonstration. Soit U' une variété de modules fins définie localement contenant strictement U. Soient $x \in U' \backslash U$ et $\mathcal{F}$ un faisceau universel défini sur un voisinage W de x. Supposons que $h^i(\mathcal{F}_x(n-1)) = 0$ pour $i \geq 0$. Alors d'après la proposition 5.1 (avec $E = \mathcal{O}(-n-1)$, $G = \mathcal{O}(-n)$, $F = \mathcal{O}(-n+1)$), on a $x \in U$. Ceci étant faux, x est un point de l'hypersurface $\mathcal{H}$ de W constitué des points y tels que les $h^i(\mathcal{F}_y(n-1))$ ne soient pas tous nuls. D'aprés le théorème 4.2, l'ouvert de $\mathcal{H}$ des points y tels que $\mathcal{F}_y$ soit un faisceau d'idéaux est dense, et $\mathcal{H}$ est irréductible (car dans $\mathbf{Hilb}^{n(n+1)/2}(\mathbb{P}_2)$, l'hypersurface constituée des sous-schémas finis contenus dans au moins une courbe de degré $n-1$ est irréductible). Il existe aussi un point y de $\mathcal{H}$ tel que $\mathcal{F}_y$ soit le faisceau d'idéaux d'un sous-schéma S contenu dans une unique courbe de degré $n-1$. On a un diagramme commutatif avec colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
H^0(Q^*(n-1)) \arrow[r, "i'"] \arrow[d] & H^0(Q^*(n-1)_{|S}) \arrow[d] \\
H^0(\mathcal{O}(n-1)) \otimes V^* \arrow[r, "i"] \arrow[d] & H^0(\mathcal{O}(n-1)_{|S}) \otimes V^* \arrow[d] \\
H^0(\mathcal{O}(n)) \arrow[r, "i''"] \arrow[d] & H^0(\mathcal{O}(n)_{|S}) \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

Soit σ une équation de l'unique courbe C de degré $n-1$ contenant S. Alors

$$\ker(i) = V^* \otimes \mathbb{C}\sigma.$$

Donc l'image dans $H^0(\mathcal{O}(n))$ d'un élément non nul de $\ker(i)$ n'est pas nulle. Ceci implique que i' est injective. On en déduit que

$$H^0(\mathcal{I}_S \otimes Q^*(n-1)) \ = \ \{0\}.$$

Il en découle que

$$h^1(\mathcal{I}_S(n-2)) \ = \ n, \qquad h^1(\mathcal{I}_S \otimes Q^*(n-1)) \ = \ n+1.$$

Soit

$$g : \mathcal{O}(-n-1) \otimes H^1(\mathcal{I}_S(n-2)) \longrightarrow \mathcal{O}(-n) \otimes H^1(\mathcal{I}_S \otimes Q^*(n-1))$$

le morphisme canonique. On va montrer qu'on peut choisir S de telle sorte que g soit stable. On a $\chi(\mathcal{O}_C(-S)(n-1)) = -1$. On peut donc choisir S suffisamment général sur C pour que $h^0(\mathcal{O}_C(-S)(n-1)) = 0$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(1-n) \xrightarrow{\ \sigma\ } \mathcal{I}_S \longrightarrow \mathcal{O}_C(-S) \longrightarrow 0.$$

On en déduit des isomorphismes canoniques

$$H^1(\mathcal{I}_S(n-2)) \ \simeq \ H^1(\mathcal{O}_C(-S)(n-2)), \qquad H^1(\mathcal{I}_S \otimes Q^*(n-1)) \ \simeq \ H^1(\mathcal{O}_C(-S) \otimes Q^*(n-1)).$$

Soit E l'unique extension non triviale

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(-S) \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}(1-n) \longrightarrow 0.$$

Alors E est un faisceau de rang 1 et de classes de Chern 0, $\frac{n(n+1)}{2}$. De plus on a $h^i(E(n-1)) = 0$ pour tout i et $h^2(E(n-2)) = 0$. D'autre part le morphisme canonique

$$\mathcal{O}(-n-1) \otimes H^1(E(n-2)) \longrightarrow \mathcal{O}(-n) \otimes H^1(E \otimes Q^*(n-1))$$

est canoniquement isomorphe à g. Il en découle que g est injectif et $\operatorname{coker}(g) \simeq E$.

Montrons maintenant que g est stable. Dans le cas contraire, il existe un entier p tel que $1 \leq p \leq n-1$ et des sous-espaces vectoriels de dimension p, $M_p \subset H^1(E(n-2))$, $N_p \subset H^1(E \otimes Q^*(n-1))$, tels que

$$g(\mathcal{O}(-n-1) \otimes M_p) \ \subset \ \mathcal{O}(-n) \otimes N_p.$$

Soient

$$g' : \mathcal{O}(-n-1) \otimes M_p \longrightarrow \mathcal{O}(-n) \otimes N_p, \qquad g'' : \mathcal{O}(-n-1) \otimes (\mathbb{C}^n/M_p) \longrightarrow \mathcal{O}(-n) \otimes (\mathbb{C}^{n+1}/N_p)$$

les morphismes déduits de g. On a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker(g'') \longrightarrow \operatorname{coker}(g') \longrightarrow E \longrightarrow \operatorname{coker}(g'') \longrightarrow 0.$$

Comme dans la démonstration de la proposition 4.6 on en déduit que g'' est injectif. Puisque le support de $\operatorname{coker}(g')$ est une courbe de degré p et que $\operatorname{coker}(g') \subset \mathcal{O}_C(-S)$, on a $p = n-1$. On a aussi un morphisme surjectif

$$\operatorname{coker}(g'') \longrightarrow \mathcal{O}(1-n).$$

Mais on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-n-1) \longrightarrow \mathcal{O}(-n) \otimes \mathbb{C}^2 \longrightarrow \operatorname{coker}(g'') \longrightarrow 0,$$

donc $\operatorname{coker}(g'')$ est isomorphe à $\mathcal{O}_\ell(-n) \oplus \mathcal{O}(-n)$ ou $\mathcal{I}_x(-n)$ (ℓ étant une droite et x un point de $\mathbb{P}_2$). Dans aucun des deux cas il ne peut exister de morphisme surjectif $\operatorname{coker}(g'') \longrightarrow \mathcal{O}(1-n)$. Donc g est stable.

Soient x le point de U' correspondant à $\mathcal{I}_S$, et y celui qui correspond à E. On considère un germe de courbe lisse S sur U' d'origine x et tel que $S \backslash \{x\} \subset U$. On note p_S la projection $S \times \mathbb{P}_2 \longrightarrow S$. En considérant le conoyau du morphisme injectif de fibrés sur $S \times \mathbb{P}_2$

$$\mathcal{O}(-n-1) \otimes R^1 p_{S*}(\mathcal{F}_S \otimes \mathcal{O}(n-2)) \longrightarrow \mathcal{O}(-n-1)) \otimes R^1 p_{S*}(\mathcal{F}_S \otimes Q^*(n-1))$$

on obtient un morphisme $\phi : S \longrightarrow U'$ tel que $\phi(s) = s$ si $s \neq x$, et $\phi(x) = y$. Ceci est absurde, donc $U' \subset U$. □

4.2.2. *Morphismes stables non injectifs*

On démontre ici le 3- de la proposition 4.6. Rappelons d'abord quelques résultats de [3]. La variété $N(3, n, n+1)$ est isomorphe à la variété de modules $M(n+2, -1, n+1)$ des faisceaux semi-stables de rang $n+2$ et de classes de Chern -1, $n+1$ sur l'espace projectif dual $\mathbb{P}_2^*$. De tels faisceaux sont d'ailleurs stables et localement libres. L'isomorphisme est défini de la façon suivante : à un morphisme stable sur $\mathbb{P}_2$

$$g : \mathcal{O}(-n-1) \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathcal{O}(-n) \otimes \mathbb{C}^{n+1}$$

on associe d'abord le morphisme sur $\mathbb{P}_2^*$:

$$\overline{g} : \mathcal{O}(-1) \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow Q^* \otimes \mathbb{C}^{n+1}$$

(en utilisant le fait que $H^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(1)) = H^0(\mathbb{P}_2^*, Q^*(1)))$. Le fibré stable associé à g est coker$(\overline{g})$. La partie 3- de la proposition 4.6 équivaut alors à la

Proposition 4.8. *Si* $n \geq 5$ *il existe des fibrés stables de rang* $n+2$ *et de classes de Chern* -1*,* $n+1$ *sur* $\mathbb{P}_2$ *qui ne sont pas de type de décomposition générique rigide.*

Lemme 4.9. *Soit* E *un fibré stable de rang* n *et de classes de Chern* 0*,* n *sur* $\mathbb{P}_2$*, qui n'est pas de type de décomposition générique* $(0, \ldots, 0)$ *ou* $(1, 0, \ldots, 0, -1)$*. Alors il existe des extensions non triviales*

$$0 \longrightarrow Q^* \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

Le fibré $\mathcal{E}$ *obtenu est stable de rang* $n+2$ *et de classes de Chern* -1*,* $n+1$ *et n'est pas de type de décomposition générique rigide.*

Démonstration. Puisque E est stable, on a $\mathrm{Hom}(E, Q^*) = \mathrm{Ext}^2(E, Q^*) = \{0\}$. On a donc

$$\dim(\mathrm{Ext}^1(E, Q^*)) \;=\; -\chi(E, Q^*) \;=\; 2n \;> 0,$$

donc il existe bien des extensions non triviales.

Montrons maintenant que $\mathcal{E}$ est stable. Il faut montrer que pour tout sous-fibré propre $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$, on a $\mu(\mathcal{F}) < 0$. Soient $\mathcal{F}''$ l'image de $\mathcal{F}$ dans E, et $\mathcal{F}'$ le noyau de $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}''$. On a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0.$$

Supposons d'abord que $\mathcal{F}'$ est non nul. On a alors $\mu(\mathcal{F}') < 0$ et $\mu(\mathcal{F}'') \leq 0$. Donc $\mu(\mathcal{F}) < 0$. On peut donc supposer que $\mathcal{F}'$ est nul, et $\mathcal{F} = \mathcal{F}''$. Donc, E étant stable, $\mu(\mathcal{F})$ ne peut être positif ou nul que si $\mathcal{F} = E$. Mais ceci est impossible car alors l'extension serait triviale.

Il reste à montrer que $\mathcal{E}$ est de type de décomposition générique non rigide, c'est-à-dire que pour toute droite ℓ de $\mathbb{P}_2$ on a $h^0(\mathcal{E}_\ell(-1)) > 0$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{E}_\ell(-1)) \longrightarrow H^0(E_\ell(-1)) \longrightarrow H^1(Q^*_\ell(-1)) = \mathbb{C},$$

et le résultat découle du fait que $h^0(E_\ell(-1)) \geq 2$, à cause du type de décomposition générique de E. $\square$

La proposition 4.8 est donc une conséquence de la

Proposition 4.10. *Si* $n \geq 5$*, il existe un fibré stable de rang* n *et de classes de Chern* 0*,* n *sur* $\mathbb{P}_2$*, qui n'est pas de type de décomposition générique* $(0, \ldots, 0)$ *ou* $(1, 0, \ldots, 0, -1)$*.*

Démonstration. On montre d'abord qu'il suffit de trouver un fibré semi-stable E de rang n et de classes de Chern 0, n sur $\mathbb{P}_2$, qui n'est pas de type de décomposition générique $(0, \ldots, 0)$ ou $(1, 0, \ldots, 0, -1)$. En effet, si un tel E existe, dans toute déformation complète de E paramétrée par un germe de variété lisse S, les fibrés semi-stables non-stables constituent une sous-variété de codimension au moins $\frac{n(n-1)}{2}$ de S (cf. la démonstration du théorème 4.10 de [9]). D'autre part, pour toute droite ℓ de $\mathbb{P}_2$, le morphisme de restriction

$$\mathrm{Ext}^1(E, E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(E_\ell, E_\ell)$$

est surjectif. Il en découle (cf. [1]) que la sous-variété fermée de S correspondant aux fibrés dont le type de décomposition générique est différent de $(0,\ldots,0)$ et $(1,0,\ldots,0,-1)$ est de codimension 6. Comme $\frac{n(n-1)}{2} > 6$ on peut déformer E en fibré stable de type de décomposition générique différent de $(0,\ldots,0)$ et $(1,0,\ldots,0,-1)$.

Pour toute famille complète de faisceaux semi-stables de rang n et de classes de Chern 0, n paramétrée par une variété lisse S, les points de S correspondant aux faisceaux non localement libres constituent une sous-variété fermée de codimension au moins $n-1$. Il en découle que si $n > 7$ il suffit de trouver un faisceau semi-stable E de rang n et de classes de Chern 0, n sur $\mathbb{P}_2$, qui n'est pas de type de décomposition générique $(0,\ldots,0)$ ou $(1,0,\ldots,0,-1)$.

On va maintenant construire par récurrence sur n un faisceau semi-stable E de rang n et de classes de Chern 0, n sur $\mathbb{P}_2$, qui n'est pas de type de décomposition générique $(0,\ldots,0)$ ou $(1,0,\ldots,0,-1)$, et qui est localement libre si $n \leq 7$. Soit x un point de $\mathbb{P}_2$. On prend

$$E \ = \ (S^4Q^*)(-2) \oplus (n-5)\mathcal{I}_x$$

si $n \neq 6,7$. Pour $n=6$, on prend une extension non triviale

$$0 \longrightarrow (S^4Q^*)(-2) \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{I}_x \longrightarrow 0,$$

et pour $n=7$ on prend $E = (S^6Q^*)(-3)$. □

4.2.3. *Exemples de faisceaux simples de rang 1 équivalents*

On reprend les notations de la démonstration du théorème 4.7. Soit S un sous-schéma fini de $\mathbb{P}_2$ de longueur $\frac{n(n+1)}{2}$ contenu dans une unique courbe lisse C de degré $n-1$, tel que $h^0(\mathcal{O}_C(-S)(n-1)) = 0$. On a une unique extension non triviale

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(-S) \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}(1-n) \longrightarrow 0.$$

Ce faisceau dépend en fait uniquement de $L = \mathcal{O}_C(S)$ (et pas de S). On notera donc $E = E_L$. Le faisceau E_L fait partie de la variété de modules fins U définie précédemment et d'après la démonstration du théorème 4.7 on a

$$E_L \ \equiv \ \mathcal{I}_S.$$

Donc si S' est un autre diviseur de C ayant les mêmes propriétés que S tel que $\mathcal{O}_C(S) \simeq \mathcal{O}_C(S')$ on a

$$\mathcal{I}_S \ \equiv \ \mathcal{I}_{S'}.$$

Il existe une sous-variété localement fermée de dimension au moins $3n-3$ de $\mathrm{Hilb}^{n(n+1)/2}(\mathbb{P}_2)$ constituée de tels S'.

Soit

$$\phi : \mathrm{Ext}^1(E,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_C(-S), \mathcal{O}(1-n))$$

le morphisme canonique. Alors ϕ est surjectif et son noyau est l'espace tangent en E de $N = U\backslash \mathrm{Hilb}^{n(n+1)/2}(\mathbb{P}_2)$. En utilisant la dualité de Serre sur C et $\mathbb{P}_2$ on obtient un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_C(-S), \mathcal{O}(1-n)) \ \simeq \ H^0(\mathcal{O}(S)).$$

Soient $\sigma \in \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(S)))$ et (D,E) un germe de courbe lisse sur U passant par E tel que l'image par ϕ de la tangente en E à D soit σ. Alors on montre aisément que le point limite de correspondant dans $\mathrm{Hilb}^{n(n+1)/2}(\mathbb{P}_2)$ est le sous-schéma fini de C défini par σ.

5. Variétés de modules fins et variétés de modules de morphismes

Dans ce chapitre on étudie des variétés de modules fins de faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}_2$. On utilise la théorie des fibrés exceptionnels, déjà rappelée au § 3. Les résultats peuvent s'étendre sans difficultés aux autres surfaces pour lesquelles une théorie similaire existe, c'est-à-dire les *surfaces de Del Pezzo* (cf. [13], [14], [19], [20]).

5.1. Variétés de modules de morphismes

5.1.1. *Modules de Kronecker*

Les résultats de ce chapitre sont démontrés dans [3]. Soient L un espace vectoriel complexe de dimension finie avec $q = \dim(L) \geq 3$, m et n des entiers positifs. Les applications linéaires

$$L \otimes \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

sont appelées des *L-modules de Kronecker*. Soit

$$W \ = \ \mathrm{Hom}(L \otimes \mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n).$$

Sur W opère de manière évidente le groupe algébrique réductif

$$G = (GL(m) \times GL(n))/\mathbb{C}^*.$$

L'action de $SL(m) \times SL(n)$ sur $\mathbb{P}(W)$ se linéarisant de façon évidente, on a une notion de point *(semi-)stable* de $\mathbb{P}(W)$ (au sens de la géométrie invariante). On montre que si $f \in W$, f est semi-stable (resp. stable) si et seulement si pour tous sous-espaces vectoriels M' de $\mathbb{C}^m$ et N' de $\mathbb{C}^n$, tels que $M' \neq \{0\}$, $N' \neq \mathbb{C}^n$, et $f(L \otimes M') \subset N'$, on a

$$\frac{\dim(N')}{\dim(M')} \geq \frac{n}{m} \quad (\text{resp.} \ > \ ).$$

Soit W^{ss} (resp. W^s) l'ouvert des points semi-stables (resp. stables) de W. Alors il existe un bon quotient (resp. un quotient géométrique)

$$N(q,m,n) = W^{ss}//G \quad (\text{resp.} \ \ N_s(q,m,n) = W^s/G\ ),$$

$N(q,m,n)$ est projective, et $N_s(q,m,n)$ est un ouvert lisse de $N(q,m,n)$. De plus, si m et n sont premiers entre eux, on a $N(q,m,n) = N_s(q,m,n)$.

5.1.2. *Applications aux variétés de modules fins de faisceaux cohérents*

Soient (E,G,F) une triade de fibrés exceptionnels sur $\mathbb{P}_2$. Soient m, n des entiers positifs. On considère des morphismes

$$E \otimes \mathbb{C}^m \longrightarrow G \otimes \mathbb{C}^n.$$

On suppose que $n.rg(G) > m.rg(E)$ (le cas $n.rg(G) < m.rg(E)$ est analogue). Soient $W = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(E,G)^* \otimes \mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$, W_0 l'ouvert de W constitué des morphismes injectifs (comme morphismes de faisceaux). Le morphisme canonique universel

$$\phi : E \otimes \mathbb{C}^m \longrightarrow G \otimes \mathbb{C}^n$$

sur $W_0 \times \mathbb{P}_2$ est injectif. Soit $\mathcal{F}$ son conoyau. Alors pour tout point x de W_0, $\mathcal{F}$ est une déformation complète de $\mathcal{F}_x$. C'est ce qui fait l'intérêt de ces morphismes. On les utilise dans [3] pour décrire certaines variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$ (pour une généralisation aux surfaces de Del Pezzo, voir [19], [20]).

Proposition 5.1. *Soient (E, G, F) une triade de fibrés exceptionnels sur $\mathbb{P}_2$, H le fibré exceptionnel noyau du morphisme d'évaluation $E \otimes \mathrm{Hom}(E, G) \longrightarrow G$. Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent simple sur $\mathbb{P}_2$ tel que $h^i(\mathcal{E} \otimes F^*) = 0$ pour $i \geq 0$. Supposons que $\chi(\mathcal{E}, E) \leq 0$ (resp. $\chi(\mathcal{E}, E) > 0$). Alors on a*

$$H^2(\mathcal{E} \otimes E^*(-3)) \ = \ H^2(\mathcal{E} \otimes H^*(-3)) \ = \{0\},$$

et une suite exacte

$$0 \longrightarrow E \otimes H^1(\mathcal{E} \otimes E^*(-3)) \xrightarrow{\ f\ } G \otimes H^1(\mathcal{E} \otimes H^*(-3)) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

(resp.

$$H^1(\mathcal{E} \otimes E^*(-3)) \ = \ H^1(\mathcal{E} \otimes H^*(-3)) \ = \{0\},$$

et une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow E \otimes H^2(\mathcal{E} \otimes E^*(-3)) \xrightarrow{\ f\ } G \otimes H^2(\mathcal{E} \otimes H^*(-3)) \longrightarrow 0).$$

Si de plus il existe un ensemble ouvert de classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents contenant celle de $\mathcal{E}$ et admettant une variété de modules fins définie localement, le morphisme f est stable, et $h^1(\mathcal{E} \otimes E^*(-3))$ et $h^1(\mathcal{E} \otimes H^*(-3))$ (resp. $h^1(\mathcal{E} \otimes E^*(-3))$ et $h^1(\mathcal{E} \otimes H^*(-3))$) sont premiers entre eux.

Démonstration. Le diagramme de Beilinson de $\mathcal{E}$ correspondant à la triade (E, G, F) a l'allure suivante :

$$\begin{array}{ccc} E \otimes H^2(\mathcal{E} \otimes E^*(-3)) \xrightarrow{d_1^{-2,2}} & G \otimes H^2(\mathcal{E} \otimes H^*(-3)) & 0 \\ E \otimes H^1(\mathcal{E} \otimes E^*(-3)) \xrightarrow{d_1^{-2,1}} & G \otimes H^1(\mathcal{E} \otimes H^*(-3)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Il en découle que $d_1^{-2,2}$ est surjectif, $d_1^{-2,1}$ injectif, et qu'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{coker}(d_1^{-2,1}) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \ker(d_1^{-2,2}) \longrightarrow 0.$$

Mais un calcul simple montre que

$$\mathrm{Ext}^1(\ker(d_1^{-2,2}), \mathrm{coker}(d_1^{-2,1})) \ = \ \{0\}.$$

On a donc un isomorphisme

$$\mathcal{E} \ \simeq \ \ker(d_1^{-2,2}) \oplus \mathrm{coker}(d_1^{-2,1}).$$

Puisque $\mathcal{E}$ est simple, on a $\mathcal{E} = \ker(d_1^{-2,2})$ ou $\mathcal{E} = \mathrm{coker}(d_1^{-2,1})$.

Supposons maintenant qu'il existe un ensemble ouvert $\mathcal{X}$ de classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents contenant celle de $\mathcal{E}$ et admettant une variété de modules fins définie localement. En prenant un ensemble plus petit que $\mathcal{X}$, on se ramène au cas où $\mathcal{X}$ admet une variété de modules fins $(M, \mathcal{F})$. On peut supposer que $\chi(\mathcal{E}, E) \leq 0$ (l'autre cas est analogue). Soit M_0 l'ouvert de M constitué des points x tels que

$$h^i(\mathcal{F}_x \otimes F^*) \ = \ h^j(\mathcal{F}_x \otimes E^*(-3)) \ = \ h^j(\mathcal{F}_x \otimes H^*(-3)) \ = \ 0$$

pour $i \geq 0$ et $j = 0, 2$. Il existe alors un point x_0 de M_0 tel que $\mathcal{F}_{x_0} \simeq \mathcal{E}$. Soient $p_M : M \times \mathbb{P}_2 \longrightarrow M$ la projection et U un voisinage ouvert de x_0 dans M_0 sur lequel les fibrés vectoriels $R^1 p_{M*}(\mathcal{F} \otimes E^*(-3))$ et $R^1 p_{M*}(\mathcal{F} \otimes H^*(-3))$ sont triviaux. Soient enfin

$$m \ = \ -\chi(\mathcal{E} \otimes E^*(-3)), \qquad n \ = \ -\chi(\mathcal{E} \otimes H^*(-3)),$$

$W = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(E, G)^* \otimes \mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$, W_0 l'ouvert de W constitué des morphismes injectifs de faisceaux dont le conoyau est isomorphe à un $\mathcal{F}_x$, avec $x \in U$. Le morphisme canonique

$$\pi : \mathbb{P}(W_0) \longrightarrow U$$

(associant à f le point x tel que $\mathcal{F}_x = \mathrm{coker}(f)$) a une section (définie par les trivialisations précédentes). Il en découle aisément que c'est un quotient géométrique par $SL(m) \times SL(n)$. D'après [28] (converse 1.13) il existe un $L \in Pic^{SL(m) \times SL(n)}(\mathbb{P}(W))$ tel que $\mathbb{P}(W_0) \subset \mathbb{P}(W)^{ss}(L)$. Mais $SL(m) \times SL(n)$ n'ayant pas de caractère non trivial, la seule linéarisation possible équivaut à la linéarisation canonique (autrement dit il n'y a qu'une seule notion de stabilité pour les points de $\mathbb{P}(W)$). Donc f est stable. La démonstration du reste de la proposition 5.1 est analogue à celle du théorème G de [10]. $\square$

On en déduit la

Proposition 5.2. *Soient (E, G, F) une triade de fibrés exceptionnels sur $\mathbb{P}_2$, H le fibré exceptionnel noyau du morphisme d'évaluation $E \otimes \mathrm{Hom}(E, G) \longrightarrow G$, r, c_1, c_2 des entiers, tels que $r \geq 0$. Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. On suppose que $\chi(F, \mathcal{E}) = 0$. Soient*

$$m \ = \mid \chi(E(3), \mathcal{E}) \mid, \qquad n \ = \mid \chi(H(3), \mathcal{E}) \mid .$$

On suppose que m et n sont non nuls et premiers entre eux.

1 - Soit $\mathcal{Y}_F$ l'ensemble ouvert des classes d'isomorphismes de faisceaux simples de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 qui sont des conoyaux de morphismes stables injectifs de faisceaux $E \otimes \mathbb{C}^m \longrightarrow G \otimes \mathbb{C}^n$ si $\chi(E(3), \mathcal{E}) < 0$, et noyaux de tels morphismes stables et surjectifs si $\chi(E(3), \mathcal{E}) > 0$. Alors il existe une variété de modules fins $(U, \mathcal{F})$ pour $\mathcal{Y}_F$, U étant un ouvert de $N(3rg(F), m, n)$.

2 - Soit $\mathcal{X}_F$ l'ensemble ouvert des classes d'isomorphismes de faisceaux simples de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 tels que $h^i(F^* \otimes \mathcal{E}) = 0$ pour $i \geq 0$. Soit $\mathcal{X}$ un ensemble ouvert de faisceaux de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 admettant une variété de modules fins définie localement. Alors on a

$$\mathcal{X} \cap \mathcal{X}_F \ \subset \ \mathcal{Y}_F.$$

5.2. Autres types de variétés de modules de morphismes

Soient (E, G, F) une triade de fibrés exceptionnels sur $\mathbb{P}_2$. Soient m, n, p des entiers positifs. On considère des morphismes

$$E \otimes \mathbb{C}^m \longrightarrow (G \otimes \mathbb{C}^n) \oplus (F \otimes \mathbb{C}^p).$$

On suppose que $n.rg(G) + p.rg(F) > m.rg(E)$ (le cas $n.rg(G) + p.rg(F) < m.rg(E)$ est analogue). Soient

$$W \ = \ \mathrm{Hom}(E \otimes \mathbb{C}^m, (G \otimes \mathbb{C}^n) \oplus (F \otimes \mathbb{C}^p)),$$

W_0 l'ouvert de W constitué des morphismes injectifs (comme morphismes de faisceaux). Le morphisme canonique universel

$$\phi : E \otimes \mathbb{C}^m \longrightarrow (G \otimes \mathbb{C}^n) \oplus (F \otimes \mathbb{C}^p)$$

sur $W_0 \times \mathbb{P}_2$ est injectif. Soit $\mathcal{F}$ son conoyau. Alors pour tout point x de W_0, $\mathcal{F}$ est une déformation complète de $\mathcal{F}_x$. On peut donc envisager de décrire des variétés de modules fins de faisceaux en utilisant de tels morphismes. C'est ce qui est fait dans [6] pour le cas des variétés de modules *extrémales* de faisceaux stables. En général, il faut pouvoir construire des quotients d'ouverts adéquats de W par le groupe

$$G = \mathrm{Aut}(E \otimes \mathbb{C}^m) \times \mathrm{Aut}((G \otimes \mathbb{C}^n) \oplus (F \otimes \mathbb{C}^p))$$

qui n'est pas réductif. C'est ce qui est fait dans [11], [7] et [8].

Le groupe G possède un sous-groupe normal unipotent maximal γ évident, isomorphe au groupe additif $\mathrm{Hom}(G \otimes \mathbb{C}^n, F \otimes \mathbb{C}^p)$. Soient λ, μ des nombres rationnels positifs tels que $\lambda n + \mu p = 1$, et

$$f : E \otimes \mathbb{C}^m \longrightarrow (G \otimes \mathbb{C}^n) \oplus (F \otimes \mathbb{C}^p)$$

un morphisme. On dit f est *semi-stable* (resp. *stable*) relativement à (λ, μ) si pour tous sous-espaces vectoriels $M' \subset \mathbb{C}^m$, $N' \subset \mathbb{C}^n$, $P' \subset \mathbb{C}^p$, avec M' non nul et $N' \neq \mathbb{C}^n$ ou $P' \neq \mathbb{C}^p$, et tout $f' \in \gamma.f$ tel que $f'(E \otimes M') \subset (G \otimes N') \oplus (F \otimes P')$, on a

$$\lambda \dim(N') + \mu \dim(P') \ \geq \ \frac{\dim(M')}{m} \quad (\text{resp.} \quad > \quad).$$

La paire (λ, μ) s'appelle une *polarisation* de l'action de G sur W. On note W^{ss} (resp. W^s) l'ouvert de W constitué des morphismes semi-stables (resp. stables) relativement à (λ, μ). Pour certaines valeurs de (λ, μ) on sait construire un bon quotient $W^{ss}//G$ (resp. un quotient géométrique W^s/G).

Soient r le rang et c_1, c_2 les classes de Chern des conoyaux de morphismes injectifs de W. Soit $\chi = \frac{c_1(c_1+3)}{2} + r - c_2$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de ces conoyaux. On suppose que r, c_1 et χ sont premiers entre eux. Soient W^s/G un quotient géométrique construit dans [8] (cf. théorème 5.6 de cet article), et M_0 l'ouvert correspondant aux morphismes injectifs. Alors, en utilisant la proposition 2.4 de [8] on voit aisément qu'il existe un *faisceau universel* sur $M_0 \times \mathbb{P}_2$. On obtient ainsi une variété de modules fins de faisceaux de rang r et de classes de Chern c_1, c_2.

Dans le cas des variétés de modules extrémales $M(r, c_1, c_2)$ étudiées dans [6] (dans le cas où r, c_1 et χ sont premiers entre eux), la variété W^s/G est isomorphe à $M(r, c_1, c_2)$ pour une polarisation donnée (λ, μ). En faisant varier la polarisation on obtient des modifications de $M(r, c_1, c_2)$ qui sont d'autres variétés de modules fins de faisceaux de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. Un tel exemple est donné au § 5.3.2.

5.3. Exemples

5.3.1. *Fibrés simples non admissibles*

Soit $n > 1$ un entier. On considère des morphismes de fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}_2$

$$\mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^{2n-1} \longrightarrow Q \otimes \mathbb{C}^{2n+1}.$$

D'après [3], les morphismes stables de ce type sont injectifs, et leurs conoyaux sont les fibrés stables de rang $2n+3$ et de classes de Chern $2n+1$, $(n+1)(2n+1)$. On a en fait un isomorphisme

$$M(2n+3, 2n+1, (n+1)(2n+1)) \ \simeq \ N(3, 2n-1, 2n+1).$$

Proposition 5.3. *Il existe des morphismes injectifs non stables*

$$\phi : \mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^{2n-1} \longrightarrow Q \otimes \mathbb{C}^{2n+1}$$

tels que $\operatorname{coker}(\phi)$ *soit sans torsion et simple.*

Démonstration. Puisque la sous-variété de $\operatorname{Hom}(V^*, \mathbb{C}^{n+1})$ constituée des applications de rang inférieur ou égal à 1 est de codimension $2n$ il existe une application linéaire

$$\phi'' : \mathbb{C}^n \longrightarrow \operatorname{Hom}(V^*, \mathbb{C}^{n+1})$$

telle que pour tout $u \in \mathbb{C}^n$ non nul $\phi''(u)$ soit de rang au moins 2. On peut même choisir ϕ'' de telle sorte que le morphisme de fibrés associé

$$\phi'' : \mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow Q \otimes \mathbb{C}^{n+1}$$

soit stable et injectif. Il en découle que ϕ'' ne contient pas de sous-module de Kronecker du type

$$V^* \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},$$

et ne possède donc pas de modules de Kronecker quotients du type

$$V^* \otimes \mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}^n.$$

Soit

$$\phi' : \mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow Q \otimes \mathbb{C}^n$$

un morphisme de fibrés stable et injectif. Soient $E' = \operatorname{coker}(\phi')$ et $E'' = \operatorname{coker}(\phi'')$. Alors on a

$$\operatorname{Hom}(E'', E') \ = \ \operatorname{Ext}^2(E'', E') \ = \ \{0\}.$$

La seconde égalité découle de la stabilité de E' et E''. Pour montrer la première, on remarque qu'un morphisme non nul $E'' \longrightarrow E'$ provient d'un morphisme de modules de Kronecker $\phi'' \longrightarrow \phi'$, c'est-à-dire d'applications linéaires $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$, $g : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ telles qu'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V^* \otimes \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\phi''} & \mathbb{C}^{n+1} \\ {\scriptstyle I_{V^*} \otimes f} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle g} \\ V^* \otimes \mathbb{C}^{n-1} & \xrightarrow{\phi'} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

Les stabilités de ϕ'' et ϕ' entraînent que f et g sont surjectives, et ϕ' est un module de Kronecker quotient de ϕ'', ce qui est impossible. Donc

$$\dim(\operatorname{Ext}^1(E'', E')) \ = \ -\chi(E'', E') \ = n^2 > 0.$$

Il existe donc des extensions non triviales

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0.$$

Le fibré E est isomorphe au conoyau d'un morphisme injectif

$$\phi : \mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^{2n-1} \longrightarrow Q \otimes \mathbb{C}^{2n+1}$$

qui est une extension de ϕ'' par ϕ', et n'est donc pas stable. On vérifie aisément que E est simple. □

On obtient donc des fibrés simples qui se déforment en fibrés stables mais qui ne peuvent pas faire partie d'une variété de modules fins de faisceaux simples (d'après la proposition 5.2 avec $E = \mathcal{O}$ et $G = Q$).

5.3.2. *Exemples non triviaux de variétés de modules fins projectives de faisceaux simples*

Soit $n > 3$ un entier. On considère des morphismes de fibrés sur $\mathbb{P}_2$ du type

$$\phi : \mathcal{O}(-2) \otimes \mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \otimes \mathbb{C}^{2n-3}.$$

Si un tel ϕ est injectif (comme morphisme de faisceaux) on a, avec $\mathcal{E} = \mathrm{coker}(\phi)$,

$$rg(\mathcal{E}) = n-2, \quad c_1(\mathcal{E}) = 1, \quad c_2(\mathcal{E}) = n.$$

D'après la suite spectrale de Beilinson, un faisceau cohérent E est isomorphe au conoyau d'un morphisme injectif ϕ si et seulement si on a

$$\chi(E) \;=\; h^0(E) \;=\; h^2(E(-1)) \;=\; 0.$$

Dans ce cas on a $h^1(E(-1)) = n-1$, $h^1(E \otimes Q^*) = 2n-3$ et ϕ est isomorphe au morphisme canonique

$$\mathcal{O}(-2) \otimes H^1(E(-1)) \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \otimes H^1(E \otimes Q^*).$$

Soit

$$W_n \;=\; \mathrm{Hom}(V \otimes \mathbb{C}^{n-1}, \mathbb{C}^{2n-3}).$$

Proposition 5.4. *Soit* $\phi \in W_n^{ss}$. *Alors* ϕ *est injectif comme morphisme de faisceaux.*

Démonstration. On voit ϕ comme une application linéaire $V \otimes \mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}^{2n-3}$. Soit $x \in \mathbb{P}_2$ tel que ϕ_x ne soit pas injectif. Il existe donc un élément non nul u de $\mathbb{C}^{n-1}$ tel que $\phi(x \otimes u) = 0$. Il en découle que

$$\dim(\phi(V \otimes u)) \;=\; 2$$

(la dimension ne peut pas être 1 car ϕ est semi-stable). On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & V/x \arrow[d] \\ V \otimes \mathbb{C}^{n-1} \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{C}^{2n-3} \end{tikzcd}$$

les flèches verticales étant injectives, et α associant $v \otimes u$ à v. Soit $H \subset \mathbb{C}^{n-1}$ le sous-espace vectoriel engendré par les u comme précédemment. Il existe donc une base $(u_1, \ldots, u_m)$ de H et des points $x_1, \ldots, x_m$ de $\mathbb{P}_2$ tels qu'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V \otimes H & \xrightarrow{\phi_0} & \bigoplus_{1 \leq i \leq m} (V/x_i) \\ {\scriptstyle \alpha_0} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \beta} \\ V \otimes \mathbb{C}^{n-1} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{C}^{2n-3} \end{array}$$

où α_0 est l'inclusion, et ϕ_0 est défini par

$$\phi_0\Big(\sum_{1 \leq i \leq m} v_i \otimes u_i\Big) \ = \ \sum_{1 \leq i \leq m} \overline{v_i}$$

pour tous $v_i \in V$, $\overline{v_i}$ désignant l'image de v_i dans V/x_i. La semi-stabilité de ϕ entraîne que deux cas seulement peuvent se produire :

(i) β est injective,

(ii) $\ker(\beta)$ est de dimension 1 et $H = \mathbb{C}^{n-1}$.

Dans le cas (i), l'ensemble des points de $\mathbb{P}_2$ où ϕ n'est pas injectif est le même que celui où ϕ_0 ne l'est pas, et c'est exactement $\{x_1, \ldots, x_m\}$, qui est fini.

On peut donc supposer qu'on est dans le cas (ii), et que $(u_1, \ldots, u_m)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^{n-1}$. Le module de Kronecker ϕ est donc à isomorphisme près de la forme

$$V \otimes \mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow \Big(\bigoplus_{1 \leq i \leq n-1} V/x_i\Big)/D$$

$$(v_1, \ldots, v_{n-1}) \longmapsto q(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_{n-1}}),$$

D étant une droite de $\bigoplus_{1 \leq i \leq n-1} V/x_i$, $\overline{v_i}$ la classe de v_i dans V/x_i et

$$q : \bigoplus_{1 \leq i \leq n-1} V/x_i \longrightarrow \Big(\bigoplus_{1 \leq i \leq n-1} V/x_i\Big)/D$$

la projection. Posons

$$D \ = \ \mathbb{C}.\sum_{1 \leq i \leq n-1} \overline{w_i},$$

avec $w_i \in V$. Alors on a $\overline{w_i} \neq 0$, car sinon la restriction de ϕ

$$V \otimes \big(\bigoplus_{j \neq i} \mathbb{C}u_i\big) \longrightarrow \Big(\bigoplus_{i \neq j} V/x_i\Big)/D$$

est un sous-module de Kronecker de ϕ contredisant sa semi-stabilité. Soit z_i une équation de la droite de $\mathbb{P}_2$ contenant w_i et x_i. On voit sans peine que le conoyau E du morphisme injectif

$$\mathcal{O}(-1) \xrightarrow{(z_1, \ldots, z_{n-1})} \bigoplus_{1 \leq i \leq n-1} \mathcal{I}_{x_i}$$

vérifie

$$rg(E) \ = \ n-2, \quad c_1(E) \ = \ 1, \quad c_2(E) \ = \ n,$$

$$h^0(E) \ = \ h^2(E(-1)) \ = \ 0,$$

et que son module de Kronecker est isomorphe à ϕ, qui est donc injectif comme morphisme de faisceaux. □

Avec les notations de la proposition 5.2 on obtient donc une variété de modules fins $(N(3,n-1,2n-3),\mathcal{F})$ pour $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}}$, et $N(3,n-1,2n-3)$ étant projective, cette variété de modules fins est maximale. Précisons que $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}}$ contient des faisceaux ayant de la torsion, ainsi que des faisceaux stables. Le groupe de Picard de $N(3,n-1,2n-3)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, tandis que celui de la variété de modules correspondante $M(n-2,1,n)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ (cf. [5]).

Remarque : Soient p un entier tel que

$$2n-2 \ \leq \ p \ < \ \frac{3+\sqrt{5}}{2}(n-1),$$

et

$$r \ = \ p-n, \quad c_1 \ = \ 2n-2-p, \quad c_2 \ = \ \frac{p(p-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}-2(n-1)p.$$

Alors d'après [3], les faisceaux (semi-)stables de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 sont précisément les conoyaux des morphismes (semi-)stables

$$\mathcal{O}(-2)\otimes\mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow \mathcal{O}(-1)\otimes\mathbb{C}^p$$

et on a un isomorphisme $M(r,c_1,c_2) \ \simeq \ N(3,n-1,p)$.

5.3.3. *Exemple de variété de modules fins de faisceaux simples sans torsion, projective et contenant des faisceaux instables*

On considère ici des faisceaux de rang 6 et de classes de Chern -3,8 sur $\mathbb{P}_2$. Dans ce cas on a $\chi=-2$, donc r, c_1 et χ sont premiers entre eux. On va décrire une variété de modules fins M_1 de faisceaux de rang 6 et de classes de Chern -3,8, qui est une modification de $M(6,-3,8)$. On utilise les variétés de modules de morphismes décrites au § 5.2. On considère des morphismes de fibrés

$$\mathcal{O}(-3)\otimes\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathcal{O}(-2)\oplus(\mathcal{O}(-1)\otimes\mathbb{C}^7).$$

Soient W l'espace vectoriel de ces morphismes, λ, μ des nombres rationnels positifs tels que $\lambda+7\mu=1$, définissant une polarisation de l'action du groupe

$$G \ = \ GL(2)\times \mathrm{Aut}(\mathcal{O}(-2)\oplus(\mathcal{O}(-1)\otimes\mathbb{C}^7))$$

sur W. On sait (d'après [11], [7], [8]) construire un quotient géométrique

$$M(\lambda,\mu)=W^s/G$$

dès que

$$\rho \ = \ \frac{\lambda}{\mu} > 3.$$

D'après [6], si $\rho=3+\epsilon$, avec ϵ positif suffisamment petit, les morphismes stables du type précédent sont injectifs et leurs conoyaux sont les faisceaux stables de rang 6 et de classes de Chern -3,8. On a en fait un isomorphisme $M(3,-6,8)\simeq M(\lambda,\mu)$.

On montre aisément qu'il n'existe qu'une seule valeur de $\rho>3$ pour laquelle il existe des morphismes semi-stables non stables. C'est $\rho=7$. Pour $\rho<7$, on a

$M(\lambda,\mu) = M(3,-6,8)$, et pour $\rho > 7$ on obtient une nouvelle variété de modules fins, notée M_1, qu'on va décrire, munie d'un faisceau universel $\mathcal{E}$.

Tout d'abord on vérifie aisément qu'un morphisme stable pour une des polarisations précédentes est nécessairement injectif. Soit

$$\phi = (\phi_1, \phi_2) : \mathcal{O}(-3) \otimes \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathcal{O}(-2) \oplus (\mathcal{O}(-1) \otimes \mathbb{C}^7)$$

un morphisme stable. Alors ϕ_1 est non nul. Les morphismes ϕ peuvent donc être de deux types, selon le rang de l'application induite par ϕ_1, $f_1 : \mathbb{C}^2 \longrightarrow H^0(\mathcal{O}(1))$.

Type 1 : f_1 est de rang 2. Il existe dans ce cas un unique point x de $\mathbb{P}_2$ tel que $\mathrm{Im}(\phi_1) = \mathcal{I}_x(-2)$, et on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-4) \longrightarrow \mathcal{O}(-3) \otimes \mathbb{C}^2 \xrightarrow{\ \phi_1\ } \mathcal{O}(-2) \longrightarrow \mathbb{C}_x(-2) \longrightarrow 0.$$

On a aussi une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-4) \xrightarrow{\ \beta\ } \mathcal{O}(-1) \otimes \mathbb{C}^7 \longrightarrow \mathrm{coker}(\phi) \longrightarrow \mathbb{C}_x(-2) \longrightarrow 0$$

(le morphisme β étant la restriction de ϕ_2 à $\ker(\phi_1)$). La stabilité de ϕ entraîne que β induit une injection $\mathbb{C}^{7*} \longrightarrow H^0(\mathcal{I}_x(3))$. La G-orbite de ϕ est entièrement déterminée par x et par l'image de cette injection.

Type 2 : f_1 est de rang 1. Soit ℓ la droite de $\mathbb{P}_2$ définie par l'image de f_1. On a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-3) \longrightarrow \mathcal{O}(-3) \otimes \mathbb{C}^2 \xrightarrow{\ \phi_1\ } \mathcal{O}(-2) \longrightarrow \mathcal{O}_\ell(-2) \longrightarrow 0.$$

On montre dans ce cas que la semi-stabilité de ϕ implique que le morphisme

$$\mathbb{C}^2 \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_\ell(2)) \otimes \mathbb{C}^7$$

déduit de ϕ_2 est injectif. La G-orbite de ϕ est alors entièrement déterminée par la $GL(7)$-orbite de l'image de ce morphisme.

Description de M_1 et des faisceaux correspondants

Ces faisceaux sont les $\mathrm{coker}(\phi)$, ϕ étant de type 1. On a donc un isomorphisme

$$M_1 \ \simeq\ \mathbf{G},$$

$\mathbf{G}$ étant le fibré en grassmanniennes sur $\mathbb{P}_2$ dont la fibre en x est $\mathbf{Gr}(7, H^0(\mathcal{I}_x(3)))$. L'intersection $M_1 \cap M(6,-3,8)$ au dessus du point x de $\mathbb{P}_2$, est l'ouvert de la grassmannienne $\mathbf{Gr}(7, H^0(\mathcal{I}_x(3)))$ constitué des $K \subset H^0(\mathcal{I}_x(3))$ ne contenant aucun sous-espace vectoriel de la forme $s.H^0(\mathcal{O}(2))$, s étant une section non nulle de $\mathcal{I}_x(1)$.

On donne maintenant une description plus précise des faisceaux paramétrés par M_1. Soient $x \in \mathbb{P}_2$ et $K \in \mathbf{Gr}(7, H^0(\mathcal{I}_x(3)))$. On en déduit un morphisme injectif

$$\beta_K : \mathcal{O}(-4) \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \otimes \mathbb{C}^7$$

nul en x. Soit $\mathcal{F}_K = \mathrm{coker}(\beta_K)$. Du fait que β_K s'annule en x on a

$$\dim(\mathrm{Ext}^1(\mathbb{C}_x, \mathcal{F}_K)) \ =\ 1.$$

On obtient donc le faisceau $\mathcal{E}_K$, unique extension non triviale

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_K \longrightarrow \mathcal{E}_K \longrightarrow \mathbb{C}_x \longrightarrow 0.$$

Ce faisceau est sans torsion et a au plus deux points singuliers. C'est le faisceau correspondant au point K de M_1.

On obtient ainsi une variété de modules fins de faisceaux simples sans torsion, projective, et qui n'est pas une variété de modules de faisceaux stables.

Références

[1] Brieskorn, E. Über holomorphe $\mathbb{P}_n$-Bündel über $\mathbb{P}_1$. Math. Ann. 157 (1967), 343-357.

[2] Drézet, J.-M. *Fibrés exceptionnels et suite spectrale de Beilinson généralisée sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Math. Ann. 275 (1986), 25-48.

[3] Drézet, J.-M. *Fibrés exceptionnels et variétés de modules de faisceaux semi-stables sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Journ. Reine angew. Math. 380 (1987), 14-58.

[4] Drézet, J.-M. *Points non factoriels des variétés de modules de faisceaux semi-stables sur une surface rationnelle.* J. reine angew. Math. 413 (1991), 99-126.

[5] Drézet, J.-M. *Groupe de Picard des variétés de modules de faisceaux semi-stables sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Ann. Inst. Fourier 38, 3 (1988), 105-168.

[6] Drézet, J.-M. *Variétés de modules extrémales de faisceaux semi-stables sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ .Math. Ann. 290 (1991), 727-770.

[7] Drézet, J.-M. *Espaces abstraits de morphismes et mutations.* Preprint Paris VII (1996).

[8] Drézet, J.-M. *Quotients algébriques par des groupes non réductifs et variétés de modules de complexes.* To appear in the International Journal ot Math.

[9] Drézet, J.-M., Le Potier, J. *Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur* $\mathbb{P}_2$. Ann. Ec. Norm. Sup. 18 (1985), 193-244.

[10] Drézet, J.-M., Narasimhan, M.S. *Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques.* Invent. Math. 97 (1989), 53-94.

[11] Drézet, J.-M., Trautmann, G. *Moduli spaces of decomposable morphisms of sheaves and quotients by non-reductive groups.* Preprint (1998), e-print service at http ://xxx.lanl.gov/list/math/9805.

[12] Gieseker, D. *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface.* Ann. Math. 106 (1977), 45-60.

[13] Gorodentsev, A.L. *Exceptional bundles on surfaces with a moving anticanonical class.* Math. Izvestiya AMS transl. 33 (1989), 67-83.

[14] Gorodentsev, A.L., Rudakov, A.N. *Exceptional vector bundles on projective spaces.* Duke Math. Journ. 54 (1987), 115-130.

[15] Grothendieck, A. *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV : les schémas de Hilbert.* Séminaire Bourbaki, 1960/61, no. 221.

[16] Hirschowitz, A. *rank techniques and jump stratifiacations.* Vector bundles on algebraic varieties, Tata Inst. Bombay. Oxford Univ. Press (1987), 159-205.

[17] Hirschowitz, A., Laszlo, Y. *Fibrés génériques sur le plan projectif.* Math. Ann. 297 (1993), 85-102.

[18] Hirschowitz, A., Narasimhan, M.S. *Fibrés de t'Hooft spéciaux et applications.* Enumerative geometry and Classical algebraic geometry, Progr. in Math. 24 (1982).

[19] Karpov B.V. *Semistable sheaves on a two-dimensional quadric and Kronecker modules.* Math. Izvestiya AMS transl. 40 (1993), 33-66.

[20] Karpov B.V. *Semistable sheaves on Del Pezzo surfaces and Kronecker modules.* Preprint (1994).

[21] Le Potier J. *Fibrés stables de rang 2 sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Math. Ann. 241 (1979), 217-256.

[22] Le Potier, J. *Fibré déterminant et courbes de saut sur les surfaces algébriques.* Complex Projective Geometry. London Math. Soc. : Bergen (1989), 213-240.

[23] Le Potier, J. *Systèmes cohérents et structures de niveau.* Astérisque 214. Soc. Math. de France (1993).

[24] Le Potier, J. *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques.* Public. Math. Univ. Paris 7 - Denis Diderot, 35 (1995).

[25] Le Potier, J. *Faisceaux semi-stables de dimension 1 sur le plan projectif.* Revue roumaine de math. pures et appliquées 38 (1993), 635-678.

[26] Maruyama, M. *Moduli of stable sheaves I.* J. Math. Kyoto Univ. 17 (1977), 91-126.

[27] Maruyama, M. *Moduli of stable sheaves II.* J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978), 577-614.

[28] Mumford, D., Fogarty, J. *Geometric invariant theory.* Ergeb. Math. Grenzgeb. Bd. 34. Berlin Heidelberg New-York : Springer (1982)

[29] SGA1. *Revêtements Etales et Groupe Fondamental.* Dirigé par A. Grothendieck. Lect. Notes in Math. 224. Springer-Verlag (1971).

[30] Simpson, C.T. *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety I.* Publ. Math. IHES 79 (1994), 47-129.

[31] Siu Y., Trautmann, G. *Deformations of coherent analytic sheaves with compact supports.* Memoirs of the Amer. Math. Soc., Vol. 29, N. 238 (1981).

[32] Strømme, S.A. *Deforming vector bundles on the projective plane.* Math. Annalen 263 (1983), 385-397.

[33] Yoshioka, K. *A note on the universal family of moduli of stable sheaves.* preprint (1997).

Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France

Email address: `drezet@math.jussieu.fr`

URL: `http://www.math.jussieu.fr/~drezet`