FIBRÉS EXCEPTIONNELS ET SUITE SPECTRALE DE BEILINSON GÉNÉRALISÉE SUR $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$

JEAN–MARC DRÉZET

Sommaire

1. Introduction 1
2. Préliminaires 4
3. Caractérisation des fibrés exceptionnels 8
4. Construction des fibrés exceptionnels 10
5. Résolutions de la diagonale de $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$ 15
6. Suite spectrale de Beilinson généralisée 26

Références 27

1. Introduction

Soient r, c_1, c_2 des entiers, avec $r \geq 1$, $M(r, c_1, c_2)$ la variété de modules des faisceaux algébriques semi-stables sur $\mathbb{P}_2$, de rang r et de classes de Chern c_1, c_2, $M_s(r, c_1, c_2)$ l'ouvert des faisceaux stables. On dit que $M(r, c_1, c_2)$ est *exceptionnelle* si $M_s(r, c_1, c_2)$ est de dimension nulle. Dans ce cas, $M(r, c_1, c_2)$ est réduite à un point, qui est une classe d'isomorphisme de fibrés vectoriels homogènes. Les fibrés vectoriels qui sont dans une telle classe sont dits *exceptionnels*. Ils jouent un rôle fondamental dans la détermination des entiers r, c_1, c_2 tels que $M(r, c_1, c_2)$ soit non vide (cf [4]).

Soit E un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$. On dit que E est *rigide* si $\mathrm{Ext}^1(E, E) = \{0\}$, et *simple* si ses seuls endomorphismes sont les homothéties. Un fibré exceptionnel est, par exemple, rigide et simple. Réciproquement, on prouvera le

Théorème 1 : *Soit E un faisceau cohérent rigide et simple sur $\mathbb{P}_2$. Alors E est un fibré exceptionnel.*

On donnera ensuite une construction des fibrés exceptionnels, car jusqu'à présent seuls les plus triviaux d'entre eux sont connus. Cette construction permettra en outre de généraliser la suite spectrale de Beilinson classique (cf. [1], [2], [8]).

Si E est un faisceau cohérent de rang $r \geq 1$, on pose $\mu(E) = c_1(E)/r$, qu'on appelle la *pente* de E. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des pentes des fibrés exceptionnels. D'après [4], un fibré exceptionnel est entièrement déterminé, à isomorphisme près, par sa pente. Pour tout $\alpha \in \mathcal{E}$, soit E_α un fibré

exceptionnel de pente α. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des nombres rationnels diadiques, c'est-à-dire pouvant se mettre sous la forme $p/2^n$, avec p entier et n entier positif ou nul. On définit dans [4] une bijection croissante

$$\epsilon : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$$

(cf. 2.3) La construction des fibrés exceptionnels est basée sur les théorèmes 2 et 4 qui suivent. Les théorèmes 3 et 5 se déduisent des théorèmes 2 et 4 respectivement par dualité.

Théorème 2 : *Soient n, p des entiers, avec $n \geq 0$, $\alpha = \epsilon\left(\frac{p}{2^n}\right)$, $\beta = \epsilon\left(\frac{p+1}{2^n}\right)$. Alors le morphisme canonique*

$$\mathrm{ev} : E_\alpha \otimes \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\beta) \longrightarrow E_\beta$$

est surjectif. Son noyau est le fibré exceptionnel de pente

$$\begin{aligned} \epsilon\left(\frac{2p-1}{2^{n+1}}\right) &\qquad \text{si } p \text{ est impair ou } n = 0, \\ \epsilon\left(\frac{p-2}{2^n}\right) &\qquad \text{si } p \equiv 2 \bmod 4, \\ \epsilon\left(\frac{p+4}{2^n} - 3\right) &\qquad \text{si } p \equiv 0 \bmod 4. \end{aligned}$$

Théorème 3 : *Sous les mêmes hypothèses, le morphisme canonique*

$$\mathrm{ev}^* : E_\alpha \longrightarrow E_\beta \otimes \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\beta)^*$$

est injectif. Son conoyau est le fibré exceptionnel de pente

$$\begin{aligned} \epsilon\left(\frac{2p+3}{2^{n+1}}\right) &\qquad \text{si } p \text{ est pair ou } n = 0, \\ \epsilon\left(\frac{p+3}{2^n}\right) &\qquad \text{si } p \equiv 1 \bmod 4, \\ \epsilon\left(\frac{p-3}{2^n} + 3\right) &\qquad \text{si } p \equiv 3 \bmod 4. \end{aligned}$$

Théorème 4 : *Soient n, p des entiers, avec $n \geq 0$, $\alpha = \epsilon\left(\frac{p}{2^n}\right)$, $\beta = \epsilon\left(3 + \frac{p-1}{2^n}\right)$. Alors le morphisme canonique*

$$\mathrm{ev} : E_\alpha \otimes \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\beta) \longrightarrow E_\beta$$

est surjectif. Son noyau est le fibré exceptionnel de pente $\epsilon\left(\frac{4p-1}{2^{n+2}}\right)$.

Théorème 5 : *Sous les mêmes hypothèses, le morphisme canonique*

$$\mathrm{ev}^* : E_\alpha \longrightarrow E_\beta \otimes \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\beta)^*$$

est injectif. Son conoyau est le fibré exceptionnel de pente $\epsilon\left(3 + \frac{4p-3}{2^{n+2}}\right)$.

On déduit de ce qui précède une construction des fibrés exceptionnels, puisque pour tout entier n on a $\epsilon(n) = n$ et $E_n = \mathcal{O}(n)$.

On obtient un certain nombre de résultats intéressants au cours de la démonstration des théorèmes 2, 3, 4, 5.

Théorème 6 : *Soient E, F des fibrés exceptionnels tels que $\mu(E) < \mu(F)$. Alors*

1 – *On a $\mathrm{Ext}^i(E,F) = \{0\}$ pour tout $i > 0$.*

2 – *Pour tout point x de $\mathbb{P}_2$, et tout sous-espace vectoriel non nul H de E_x, si*

$$K \;=\; \sum_{f\in \mathrm{Hom}(E,F)} f_x(H)\ ,$$

on a $\dfrac{\dim(H)}{\mathrm{rg}(E)} \leq \dfrac{\dim(K)}{\mathrm{rg}(F)}$ *, l'inégalité étant stricte si $H \neq E_x$.*

On déduit de 2 que le morphisme canonique $\mathrm{ev} : E \otimes \mathrm{Hom}(E,F) \to F$ est surjectif. D'autre part, la condition 2 signifie que l'application

$$\mathrm{ev}_x : E_x \otimes \mathrm{Hom}(E,F) \longrightarrow F_x$$

est stable sous l'action du groupe $\mathrm{SL}(E_x) \times \mathrm{SL}(F_x)$ (cf. [3], prop. 15).

On déduit du théorème 6 un amélioration du théorème 1 :

Corollaire 7 : *Soit E un faisceau cohérent rigide sur $\mathbb{P}_2$. Alors E est une somme directe de fibrés exceptionnels.*

On verra que cependant la réciproque est fausse.

On définit ensuite la *suite spectrale de Beilinson généralisée*. Soient p, n des entiers, avec $n \geq 0$, $\alpha = \epsilon\left(\dfrac{p}{2^n}\right)$, $\beta = \epsilon\left(\dfrac{p+1}{2^n}\right)$. On définit dans [4] un nouvel élément de $\mathcal{E}$, noté $\alpha.\beta$. On considère des triplets de rationnels d'un des types suivants

$$(\alpha, \alpha.\beta, \beta), \quad (\beta - 3, \alpha, \alpha.\beta), \quad (\alpha.\beta, \beta, \alpha + 3)\ .$$

Á de tels triplets sont associés des triplets de fibrés exceptionnels, appelés *triades*. On conviendra d'appeler aussi triades des triplets du type $(\mathcal{O}(k), \mathcal{O}(k+1), \mathcal{O}(k+2))$. Soit $\mathcal{T} = (E, G, F)$ une triade, M le conoyau du morphisme canonique

$$G \longrightarrow F \otimes \mathrm{Hom}(G,F)^*\ ,$$

qui est un fibré exceptionnel. On a alors des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}(E,G)^* \;\simeq \mathrm{Hom}(M, E(3)), \quad \mathrm{Hom}(G,F)^* \;\simeq\; \mathrm{Hom}(F,M)\ .$$

On note p_1, p_2 les projections $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, et si E, F sont des faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}_2$, on pose

$$E \boxtimes F \;=\; p_1^*(E) \otimes p_2^*(F)\ .$$

Des isomorphismes précédents on déduit la suite de morphismes de fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$

$$\begin{array}{ccccccccc} R^\bullet_{\mathcal{T}} & : & 0 & \longrightarrow & E \boxtimes E^*(-3) & \longrightarrow & G \boxtimes M^* & \longrightarrow & F \boxtimes F^* & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \| & & \| & & \| & & \\ & & & & R^{-2}_{\mathcal{T}} & & R^{-1}_{\mathcal{T}} & & R^0_{\mathcal{T}} & & \end{array} .$$

Soient Δ la diagonale de $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$, $\mathcal{O}_\Delta$ le faisceau structural de Δ, vu comme quotient de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2}$. On a alors le

Théorème 8 : *La suite $R^\bullet_{\mathcal{T}}$ est un complexe, et c'est une résolution de $\mathcal{O}_\Delta$, via le morphisme canonique*

$$\mathrm{trace}_\Delta : F \boxtimes F^* \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta \ .$$

On peut en déduire toute une série de résultats, dont voici un exemple : si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$, on déduit de $R^\bullet_{\mathcal{T}}$ un complexe

$$E \otimes \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, E)^* \xrightarrow{A_\mathcal{F}} G \otimes \mathrm{Ext}^1(M, \mathcal{F}) \xrightarrow{B_\mathcal{F}} F \otimes \mathrm{Ext}^1(F, \mathcal{F}) \ ,$$

et on a le

Corollaire 9 : *Si $\mathrm{Hom}(F, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, E) = \{0\}$, le morphisme de faisceaux $A_\mathcal{F}$ est injectif, $B_\mathcal{F}$ est surjectif, et $\ker(B_\mathcal{F})/\mathrm{im}(A_\mathcal{F})$ est isomorphe à $\mathcal{F}$.*

On utilisera ce résultat dans [3]. On en déduira une description de certaines variétés de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$, permettant d'en étudier les propriétés et d'en calculer le groupe de Picard.

2. Préliminaires

1 – *Formulaire général*

Si E est un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$, de rang $r > 0$, on pose

$$\Delta(E) \ = \ \frac{1}{r}\left(c_2(E) - \frac{r-1}{2r} c_1(E)^2 \right) \ ,$$

qu'on nomme le *discriminant* de E. On pose

$$P(X) \ = \ \frac{X^2}{2} + \frac{3X}{2} + 1 \ .$$

Si E, F sont des faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}_2$, on pose

$$\chi(E, F) \ = \ \sum_{0 \leq i \leq 2} (-1)^i \dim(\mathrm{Ext}^i(E, F)) \ .$$

Si $\mathrm{rg}(E) > 0$ et $\mathrm{rg}(F) > 0$, on a d'après la proposition (1.1) de [4]

$$\chi(E,F) \;=\; \mathrm{rg}(E)\,\mathrm{rg}(F)\big(P(\mu(F)-\mu(E)) - \Delta(E) - \Delta(F)\big)\ .$$

En fait, la démonstration de ce résultat conduit au suivant : en ne supposant plus nécessairement $\mathrm{rg}(E)$ positif, on a

$$\chi(E,E) \;=\; \mathrm{rg}(E)^2 + (\mathrm{rg}(E)-1)c_1(E)^2 - 2\,\mathrm{rg}(E)c_2(E)\ .$$

On notera Q le fibré quotient canonique de $\mathcal{O}\otimes H^0(\mathcal{O}(1))^*$ sur $\mathbb{P}_2$.

2 − *Faisceaux semi-stables*

Soit E un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$. On dit que E est *semi-stable* (resp. *stable*) s'il est sans torsion et si pour tout sous-faisceau propre F de E on a

$$\frac{c_1(F)}{\mathrm{rg}(F)} \;\leq \frac{c_1(E)}{\mathrm{rg}(E)}$$

et en cas d'égalité

$$\frac{\chi(F)}{\mathrm{rg}(F)} \;\leq \frac{\chi(E)}{\mathrm{rg}(E)} \qquad (\text{resp. } <)\ .$$

Cette notion de stabilité est celle de Gieseker [5], reprise par Maruyama [7].

Soit E un faisceau cohérent sans torsion sur $\mathbb{P}_2$. Il existe alors un unique sous-faisceau F de E ayant la propriété suivante : pour tout sous-faisceau propre G de E on a $\mu(G) \leq \mu(F)$, en cas d'égalité on a $\chi(G) \leq \chi(F)$, et si $\mu(G) = \mu(F)$ et $\chi(G) = \chi(F)$, on a $\mathrm{rg}(G) \leq \mathrm{rg}(F)$. Le faisceau F est semi-stable, on l'appelle le *sous-faisceau semi-stable maximal de* E. De plus E/F est sans torsion. Il existe une unique filtration de E par des sous-faisceaux cohérents

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_m = E$$

telle que pour $i = 1,\ldots,m$, F_i/F_{i-1} soit le sous-faisceau semi-stable maximal de E/F_{i-1}. On l'appelle la *filtration de Harder-Narasimhan de* E.

3 − *Fibrés exceptionnels*

Les résultats qui suivent sont démontrés dans [4].

On donne d'abord une définition de l'application $\epsilon : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ évoquée dans l'Introduction.

Soit α un nombre rationnel. On note r_α le plus petit entier $r > 0$ tel que $r\alpha$ soit un entier, Δ_α le nombre rationnel

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r_\alpha^2}\right)\ ,$$

et $\chi_\alpha = r_\alpha(P(\alpha) - \Delta_\alpha)$. Soit (α,β) un couple de nombres rationnels tels que $3 + \alpha - \beta \neq 0$. On pose

$$\alpha.\beta \;=\; \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\Delta_\beta - \Delta_\alpha}{3+\alpha-\beta}\ .$$

L'application ϵ est définie de manière unique par les deux relations

1) $\epsilon(n) = n$ pour tout entier n.

2) Pour tous entiers p, q, avec $q \geq 0$

$$\epsilon\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right) \;=\; \epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right).\epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right) .$$

On dit qu'un couple (α, β) d'éléments de $\mathcal{E}$ est *admissible* si $0 \leq \beta - \alpha \leq 2$ et $P(\alpha - \beta) = \Delta_\alpha + \Delta_\beta$, P étant le polynôme défini en 1- (cette définition diffère légèrement de celle de [4]). Pour que (α, β) soit admissible, il suffit que (α, β) soit de la forme $(\epsilon(\frac{p}{2^n}), \epsilon(\frac{p+1}{2^n}))$, avec n, p entiers, $n \geq -1$. Si (α, β) est un couple admissible, on a

$$\mathrm{Ext}^q(E_\beta, E_\alpha) = \{0\} \quad \text{pour } q \geq 0 , \qquad \mathrm{Ext}^2(E_\alpha, E_\beta) = \{0\} .$$

Pour tout élément α de $\mathcal{E}$, on a $\mathrm{rg}(E_\alpha) = r_\alpha$, $\Delta(E_\alpha) = \Delta_\alpha$.

4 − *Formulaire concernant les fibrés exceptionnels*

Soit (α, β) un couple admissible d'éléments de $\mathcal{E}$. Soit $\gamma = \alpha.\beta$. Alors les couples (α, γ) et (γ, β) sont admissibles (proposition (5.1) de [4]). Posons $\alpha' = \alpha.\gamma$, $\beta' = \gamma.\beta$. On a alors les égalités suivantes :

Caractéristique d'Euler-Poincaré

(1) $\chi(E_\alpha, E_\gamma) = 3r_\beta$,
(2) $\chi(E_\gamma, E_\beta) = 3r_\alpha$,
(3) $\chi(E_\alpha, E_{\alpha'}) = 3r_\gamma$,
(4) $\chi(E_\gamma, E_{\beta'}) = 3r_\beta$,
(5) $\chi(E_\beta, E_\alpha(3)) = 3r_\gamma$.

Rang

(6) $r_{\alpha'} + r_\beta = 3r_\alpha r_\gamma$,
(7) $r_{\beta'} + r_\alpha = 3r_\beta r_\gamma$.

Pentes

(8) $3\gamma r_\alpha r_\gamma = \alpha' r_{\alpha'} + \beta r_\beta$,
(9) $3\alpha r_\gamma r_\alpha = \alpha' r_{\alpha'} + (\beta - 3) r_\beta$,
(10) $3\gamma r_\gamma r_\beta = \alpha r_\alpha + \beta' r_{\beta'}$,
(11) $3\beta r_\gamma r_\beta = \beta' r_{\beta'} + (3 + \alpha) r_\alpha$.

Démonstration. Il est immédiat que (2), (3), (4) découlent de (1). Démontrons (1). On a $\chi(E_\gamma, E_\alpha) = 0$, d'où on déduit d'après 1-

$$\chi(E_\alpha, E_\gamma) \;=\; 3r_\alpha r_\gamma(\gamma - \alpha)\ .$$

D'après la démonstration du lemme (5.4) de [4], on a

$$\gamma - \alpha \;=\; \frac{1}{r_\alpha^2(3 + \alpha - \beta)}\ ,$$

et d'après la proposition (5.1) de [4],

$$r_\gamma \;=\; r_\alpha r_\beta(3 + \alpha - \beta)\ ,$$

d'où on déduit $\chi(E_\alpha, E_\gamma) = 3r_\beta$, c'est-à-dire (1).

Démontrons (5). On a $\chi(E_\beta, E_\alpha) = 0$, donc par dualité de Serre, $\chi(E_\alpha(3), E_\beta) = 0$, d'où on déduit avec 1-

$$\chi(E_\alpha, E_\gamma) \;=\; 3r_\alpha r_\beta(3 + \alpha - \beta) \;=\; 3r_\gamma$$

d'après la proposition (5.1) de [4].

Démontrons (6). On a, puisque $\chi(E_\beta, E_\alpha) = 0$,

$$\chi(E_\alpha, E_\beta) \;=\; 3r_\alpha r_\beta(\beta - \alpha) \;=\; 9r_\alpha r_\beta - 3r_\gamma\ ,$$

d'après ce qui précède, et en remplaçant (α, β, γ) par $(\alpha, \gamma, \alpha')$, on obtient

$$\chi(E_\alpha, E_\gamma) \;=\; 9r_\alpha r_\gamma - 3r_{\alpha'}\ ,$$

et comme $\chi(E_\alpha, E_\gamma) = 3r_\beta$ d'après (1), on obtient $3r_\alpha r_\gamma = r_{\alpha'} + r_\beta$, c'est-à-dire (6). On obtient (7) de la même façon, en remplaçant (α, β, γ) par (γ, β, β').

Les formules (8) et (10) (resp. (9) et (11)) sont équivalentes par dualité. Démontrons (8). D'après (2), avec $(\alpha, \gamma, \alpha')$ à la place de (α, β, γ), on a

$$\chi(E_{\alpha'}, E_\gamma) \;=\; 3r_\alpha\ .$$

Mais $\chi(E_{\alpha'}, E_\gamma) = 3r_{\alpha'}r_\gamma(\gamma - \alpha')$, d'où

$$r_{\alpha'}(\alpha' - \gamma) \;=\; -\frac{r_\alpha}{r_\gamma}\ .$$

De même, d'après (2) on a

$$r_\beta(\beta - \gamma) \;=\; \frac{r_\alpha}{r_\gamma}\ .$$

et en additionnant ces égalités et en utilisant (6) on obtient

$$\alpha' r_{\alpha'} + \beta r_\beta - 3\gamma r_\alpha r_\gamma \;=\; 0\ ,$$

c'est-à-dire (8).

Démontrons (11). On a d'après ce qui précède

$$r_{\beta'}(\beta' - \beta) \;=\; -\frac{r_\gamma}{r_\beta}\ , \quad r_\alpha(\alpha + 3 - \beta) \;=\; \frac{r_\gamma}{r_\beta}\ ,$$

et par addition on obtient, compte tenu de (7),

$$\beta' r_{\beta'} + (3 + \alpha)r_\alpha - 3\beta r_\beta r_\gamma \;=\; 0\ ,$$

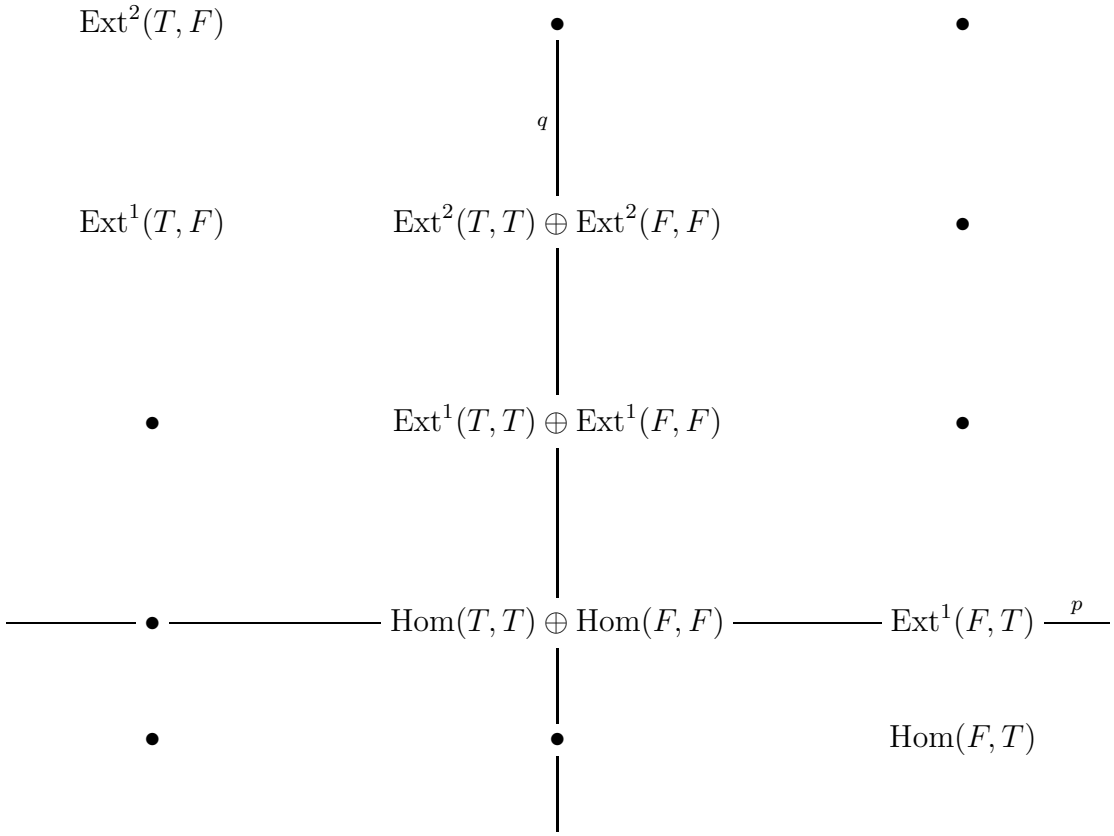
c'est à dire (11). □

3. Caractérisation des fibrés exceptionnels

On démontre ici le théorème 1, c'est-à-dire qu'un faisceau cohérent E sur $\mathbb{P}_2$, rigide et simple est un fibré exceptionnel.

Lemme 10 : *Soit E un faisceau cohérent rigide sur $\mathbb{P}_2$. Alors E est sans torsion.*

Démonstration. Soit T le sous-faisceau de torsion de E. À la filtration $T \subset E$ de E est associée une suite spectrale $E_r^{p,q}$ convergeant vers $\mathrm{Ext}^{p+q}(E,E)$. On va décrire les termes de niveau E_1 pouvant éventuellement être non nuls. Posons $F = E/T$. Alors on a $\mathrm{Hom}(T,F) = \{0\}$ car F est sans torsion, et $\mathrm{Ext}^2(F,T) = \{0\}$ car par dualité de Serre, on a $\mathrm{Ext}^2(F,T) \simeq \mathrm{Hom}(T,F(-3))^*$, qui est nul car $F(-3)$ est sans torsion (pour cette version de la dualité de Serre, cf. proposition (1.2) de [4]). Les termes $E_1^{p,q}$ éventuellement non nuls sont figurés ci-dessous



Toutes les flèches $d_r^{0,1}$ et $d_r^{-r,r}$ sont nulles, donc $E_\infty^{0,1} \simeq E_1^{0,1}$. Mais $E_\infty^{0,1} = \{0\}$, puisque $\mathrm{Ext}^1(E,E) = \{0\}$. Donc $E_1^{0,1} = \{0\}$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Ext}^1(T,T) \oplus \mathrm{Ext}^1(F,F) \;=\; \{0\}\ .$$

Il reste à montrer que si $T \neq 0$, on a $\mathrm{Ext}^1(T,T) \neq \{0\}$. Le rang de T est nul, donc on a d'après 1.1, $\chi(T,T) = -c_1(T)^2 \leq 0$. Puisque $T \neq 0$, $\mathrm{End}(T) \neq \{0\}$ (il contient les homothéties), donc $\dim(\mathrm{Ext}^1(T,T)) > 0$. Ceci démontre le lemme 10. □

Soit E un faisceau cohérent simple et rigide. Il est sans torsion d'après le lemme 10. On considère la filtration de Harder-Narasimhan de E

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_m = E \ .$$

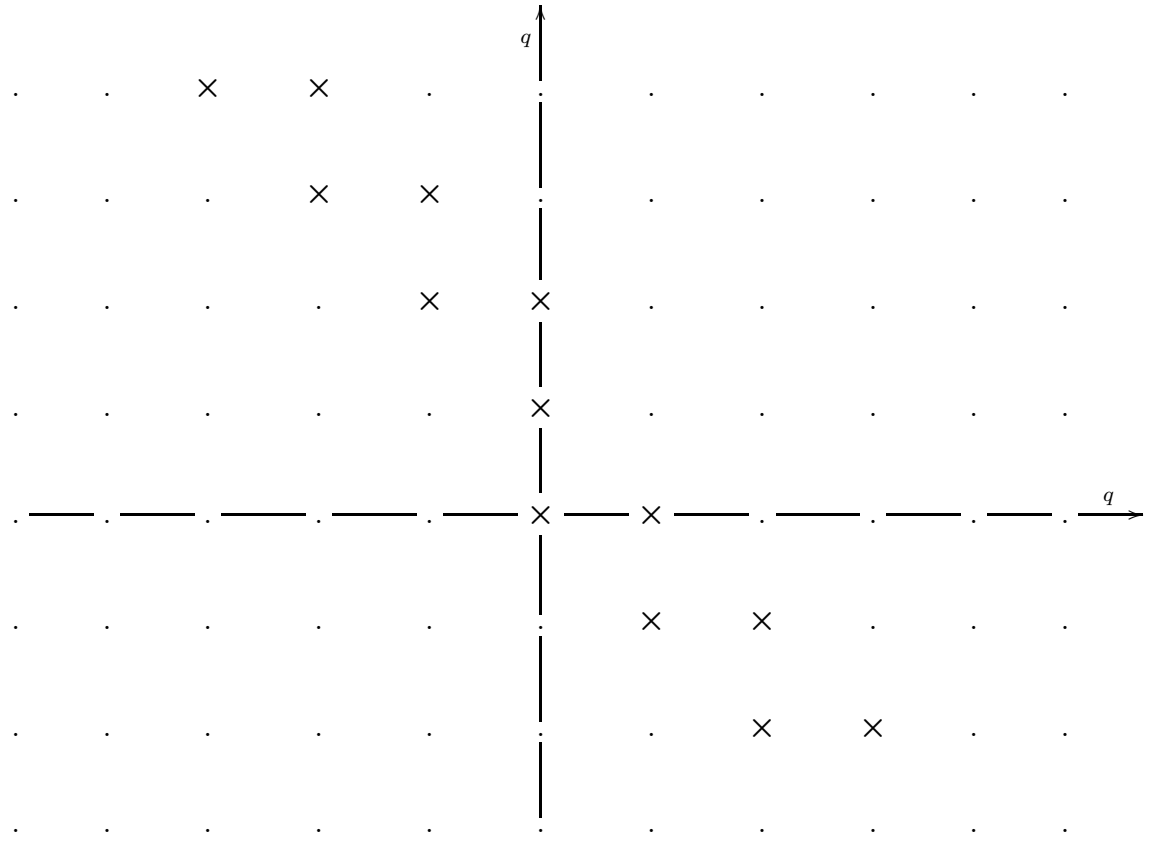
Les gradués $Gr_i = F_i/F_{i-1}$ sont des faisceaux semi-stables. On pose $\mu_i = \mu(Gr_i)$ et $\Delta_i = \Delta(Gr_i)$. Alors on a $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_m$, et $\Delta_i > \Delta_{i-1}$ si $\mu_i = \mu_{i-1}$. Considérons la suite spectrale de cette filtration de terme E_1

$$E_1^{p,q} \ = \ \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ext}^{p+q}(Gr_i, Gr_{i-p})$$

(où $Gr_j = 0$ si $j \neq 1, \ldots, m$) convergeant vers $\mathrm{Ext}^{p+q}(E,E)$. On a, si $p < 0$, $\mathrm{Hom}(Gr_i, Gr_{i-p}) = \{0\}$ pour tout i, donc $E_1^{p,p} = \{0\}$. Si $p \geq 0$, on a

$$\mathrm{Ext}^2(Gr_i, Gr_{i-p}) \ \simeq \ \mathrm{Hom}(Gr_{i-p}, Gr_i(-3))^* \ = \ \{0\},$$

car si Gr_i et Gr_{i-p}, sont non nuls, ils sont semi-stables et $\mu(Gr_{i-p}) > \mu(Gr_i(-3))$. Les termes $E_1^{p,q}$ éventuellement non nuls sont figurés ci-dessous



Toutes les flèches $d_r^{0,1}$ et $d_r^{-r,r}$ sont nulles, donc $E_1^{0,1} = E_\infty^{0,1} = \{0\}$, car c'est un terme du gradué d'une filtration de $\mathrm{Ext}^1(E,E)$, qui est nul. Donc

$$\bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ext}^1(Gr_i, Gr_i) \ = \ \{0\} \ ,$$

ce qui prouve que Gr_i est de la forme $E_{\alpha_i} \otimes \mathbb{C}^{n_i}$, avec $\alpha_i \in \mathcal{E}$ (proposition (4.4) de [4]).

Montrons que $\mathrm{Ext}^2(E,E) = \{0\}$. On a $\mathrm{Ext}^2(E,E) \simeq \mathrm{Hom}(E, E(-3))^*$. Soit $f : E \to E(-3)$ un morphisme, s un morphisme non nul $\mathcal{O}(-3) \to \mathcal{O}$. On en déduit $I_E \otimes s : E(-3) \to E$, et $(I_E \otimes s) \circ f$ est un endomorphisme de E s'annulant sur le lieu des zéros de s, donc partout, puisque $\mathrm{End}(E)$ est réduit aux homothéties, donc $f = 0$, et $\mathrm{Ext}^2(E,E) = \{0\}$.

On définit une sous-suite spectrale ${}'E_r^{p,q}$ de $E_r^{p,q}$ en posant

$$\begin{aligned} {}'E_r^{p,q} &= E_r^{p,q} \quad \text{si} \quad p < 0, \\ &= 0 \qquad \text{sinon,} \end{aligned}$$

les morphismes ${}'d_r^{p,q}$ entre les termes non nuls étant identiques aux $d_r^{p,q}$. Puisque $\mathrm{Ext}^2(E,E) = \{0\}$, cette suite est d'aboutissement nul. On en déduit que

$$\sum_{p,q} (-1)^{p+q} \dim({}'E_1^{p,q}) \;=\; 0 \;,$$

d'où

$$\sum_{i<j} \chi(Gr_i, Gr_j) \;=\; 0 \;.$$

D'après 1.1, on a $\chi(Gr_i, Gr_j) = r_i r_j (P(\mu_j - \mu_i) - \Delta_i - \Delta_j)$, r_i désignant le rang de Gr_i, et par conséquent

$$\sum_{i \neq j} \chi(Gr_i, Gr_j) \;=\; \sum_{i<j} 3 r_i r_j (\mu_i - \mu_j) \;\geq 0 \;.$$

On a

$$\begin{aligned} \chi(E,E) &= 1 \\ &= \sum_{i,j} \chi(Gr_i, Gr_j) \\ &= \sum_i \chi(Gr_i, Gr_i) + \sum_{i<j} 3 r_i r_j (\mu_i - \mu_j), \end{aligned}$$

et puisque $\chi(Gr_i, Gr_i) = n_i^2 \geq 1$, on a $n_1^2 + \cdots + n_m^2 = 1$, d'où on déduit que $m = 1$ et $n_1 = 1$, c'est-à-dire que $E = E_{\alpha_1}$. Donc E est exceptionnel. Ceci démontre le théorème 1.

4. Construction des fibrés exceptionnels

On démontre ici les théorèmes 2 à 6, ainsi que le corollaire 7.

Si α, β sont des éléments de $\mathcal{E}$ et x un point de $\mathbb{P}_2$, on note $\mathrm{ev}_{\alpha,\beta,x}$ l'application canonique $E_{\alpha,x} \otimes \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\beta) \to E_{\beta,x}$, et on dira pour simplifier qu'elle est *stable* si elle vérifie la condition 2 du théorème 6, c'est-à-dire si pour tout sous-espace vectoriel non nul H de $E_{\alpha,x}$, si

$$K \;=\; \sum_{f \in \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\beta)} f_x(H) \;,$$

on a

$$\frac{\dim(H)}{\mathrm{rg}(E_\alpha)} \;\leq\; \frac{\dim(K)}{\mathrm{rg}(E_\beta)} \;,$$

l'inégalité étant stricte si $H \neq E_{\alpha,x}$.

Soient α, β des éléments de $\mathcal{E}$, avec $\alpha < \beta$. Alors on a $\mathrm{Ext}^2(E_\alpha, E_\beta) = \{0\}$, car $\mathrm{Ext}^2(E_\alpha, E_\beta) \simeq \mathrm{Hom}(E_\beta, E_\alpha(-3))^*$, et ce dernier est nul car $\beta > \alpha - 3$. Par conséquent le théorème 6 équivaut à l'assertion suivante : on a

1– $\mathrm{Ext}^1(E_\alpha, E_\beta) = \{0\}$,

2– L'application $ev_{\alpha,\beta,x}$ est stable.

Notons C_n l'assertion suivante : si α, β sont des éléments de $\mathcal{E}$ qui peuvent s'écrire $\alpha = \epsilon\left(\frac{p}{2^n}\right)$, $\beta = \epsilon\left(\frac{q}{2^n}\right)$, avec p, q, n entiers, $n \geq 0$ et $p < q$, alors les conditions 1- et 2- sont satisfaites.

Le théorème 3 (resp. 5) se déduit du théorème 2 (resp. 4) par dualité. Il suffit donc de démontrer les théorèmes 2 et 4.

Notons A_n l'assertion suivante : soient m, p des entiers, avec $0 \leq m \leq n$, $\alpha = \epsilon\left(\frac{p}{2^m}\right)$, $\beta = \epsilon\left(\frac{p+1}{2^m}\right)$. Alors le morphisme canonique $\mathrm{ev} : E_\alpha \otimes \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\beta) \to E_\beta$ est surjectif. Son noyau est le fibré exceptionnel de pente $\epsilon\left(\frac{2p-1}{2^{m+1}}\right)$ si p est impair ou $n = 0$, $\epsilon\left(\frac{p-2}{2^m}\right)$ si $p \equiv 2 \bmod 4$, $\epsilon\left(-3 + \frac{p+4}{2^m}\right)$ si $p \equiv 0 \bmod 4$.

On définit de même l'assertion B_n à l'aide de l'énoncé du théorème 4. Il faut montrer que pour tout n, A_n, B_n, et C_n sont vraies. Pour cela on utilisera un procédé de récurrence. Plus précisément on prouvera

(i) $C_n \Longrightarrow A_n$ et B_n,

(ii) A_{n-1}, B_{n-2} et $C_{n\ 1} \Longrightarrow C_n$,

(iii) C_0 et C_1 sont vraies.

1 – *Démonstration de (i)*

Supposons C_n vraie et démontrons A_n et B_n. Soient p un entier et $\alpha = \epsilon\left(\frac{p}{2^n}\right)$, $\beta = \epsilon\left(\frac{p+1}{2^n}\right)$ (resp. $\beta = \epsilon\left(3 + \frac{p-1}{2^n}\right)$). D'après C_n l'application linéaire

$$\mathrm{ev}_x = \mathrm{ev}_{\alpha,\beta,x} : E_{\alpha,x} \otimes \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\beta) \longrightarrow E_{\beta,x}$$

est stable pour tout point x de $\mathbb{P}_2$, donc on a

$$\frac{\dim(\mathrm{im}(\mathrm{ev}_x))}{\mathrm{rg}(E_\beta)} \geq \frac{\dim(E_{\alpha,x})}{\mathrm{rg}(E_\alpha)} = 1 \ ,$$

donc ev_x est surjective. Soit N le noyau de ev. Montrons que N est simple et rigide. Pour cela considérons le complexe

$$\begin{array}{ccccccc} D^\bullet : 0 & \longrightarrow & E_\alpha \otimes \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\beta) & \xrightarrow{\mathrm{ev}} & E_\beta & \longrightarrow & 0 \ . \\ & & \| & & \| & & \\ & & D^0 & & D^1 & & \end{array}$$

Au complexe $\mathrm{Hom}^\bullet(D^\bullet, D^\bullet)$ est associée une suite spectrale $E_r^{p,q}$ d'aboutissement $H^{p+q}(\mathbb{P}_2, \mathcal{H}om(N,N))$, et de terme E_2

$$E_2^{p,q} \ = \ H^p(H^q(\mathbb{P}_2, \mathrm{Hom}^\bullet(D^\bullet, D^\bullet))) \ .$$

On a $\mathrm{Ext}^i(E_\alpha, E_\beta) = \{0\}$ pour $i > 0$ d'après C_n. On a aussi $\mathrm{Ext}^i(E_\beta, E_\alpha) = \{0\}$ pour $i > 0$ (cela découle du fait que (α, β) ou $(\beta - 3, \alpha)$ est admissible). Donc $E_2^{p,q} = \{0\}$ pour $q > 0$, et la suite spectrale est dégénérée. Il en découle qu'on a

$$\mathrm{End}(N) \simeq E_2^{0,0} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ext}^1(N,N) \simeq E_2^{1,0} \ .$$

Posons $H = \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\beta)$. Écrivons maintenant le complexe $C^\bullet = H^0(\mathbb{P}_2, \mathrm{Hom}^\bullet(D^\bullet, D^\bullet))$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} \oplus \mathrm{End}(H) & \xrightarrow{d} & \mathrm{Hom}(H \otimes E_\alpha, E_\beta) & \longrightarrow & 0 \ . \\ & & \| & & \| & & \\ & & C^0 & & C^1 & & \end{array}$$

On a $\mathrm{Hom}(H \otimes E_\alpha, E_\beta) = \mathrm{End}(H)$, et d est définie par $d(t,f) = tI_H - f$, pour tous $t \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathrm{End}(H)$. Donc $E_2^{0,0} = \mathbb{C}$, et $E_2^{0,1} = \{0\}$, ce qui prouve que N est rigide et simple.

D'après le théorème 1, N est un fibré exceptionnel. Pour achever la démonstration de A_n et B_n, il suffit d'en trouver la pente. Posons $N = E_\lambda$, avec $\lambda \in \mathcal{E}$. On va utiliser les égalités (1) à (11) de 1.4.

Supposons que $\beta = \epsilon\left(\dfrac{p+1}{2^n}\right)$ et que p est impair. D'après (2) on a $\chi(E_\alpha, E_\beta) = r_\mu$, avec $\mu = \epsilon\left(\dfrac{p-1}{2^n}\right)$, et puisque $\mathrm{Ext}^i(E_\alpha, E_\beta) = \{0\}$ pour $i > 0$ d'après C_n, on a $\dim(\mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\beta)) = 3r_\mu$, d'où

$$\lambda \ = \ \frac{3r_\mu \alpha r_\alpha - \beta r_\beta}{3r_\mu r_\alpha - r_\beta} \ .$$

Posons $\alpha' = \epsilon\left(\dfrac{2p-1}{2^{n+1}}\right)$. D'après (6) et (8), on a

$$\alpha' \ = \ \frac{3r_\mu \alpha r_\alpha - \beta r_\beta}{3r_\mu r_\alpha - r_\beta} \ .$$

donc $\lambda = \alpha' = \epsilon\left(\dfrac{2p-1}{2^{n+1}}\right)$. On obtient la même formule avec $n = 0$, p quelconque.

Si $p \equiv 2 \bmod 4$ et $\beta = \epsilon\left(\dfrac{p+1}{2^n}\right)$, on trouve $\lambda = \epsilon\left(\dfrac{p-2}{2^n}\right)$ à l'aide de (4), (7), (10), et si $p \equiv 0 \bmod 4$, on trouve $\lambda = \epsilon\left(-3 + \dfrac{p+4}{2^n}\right)$ en utilisant (3), (6), (9).

Si $\beta = \epsilon\left(3 + \dfrac{p-1}{2^n}\right)$, on trouve $\lambda = \epsilon\left(\dfrac{4p-1}{2^n}\right)$ en utilisant (5), (7) et (11).

Ceci montre que A_n et B_n sont vraies et prouve (i).

2 – *Démonstration de (ii)*

Supposons A_{n-1}, B_{n-2} et C_{n-1} vraies. Soient α, β des éléments de $\mathcal{E}$, avec $\alpha < \beta$, $\alpha = \epsilon\left(\dfrac{p}{2^n}\right)$, $\beta = \epsilon\left(\dfrac{q}{2^n}\right)$. Il faut montrer que $\mathrm{Ext}^1(E_\alpha, E_\beta) = \{0\}$ et que le morphisme canonique

$$\mathrm{ev}_{\alpha,\beta,x} : E_{\alpha,x} \otimes \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\beta) \longrightarrow E_{\beta,x}$$

est stable. On peut supposer que l'un des entiers p, q est impair. Par dualité, les deux cas où un des entiers p, q est pair sont équivalents. Il y a donc en tout deux cas : celui où p est impair et q pair, et celui où p et q sont impairs. Posons $p = 2k-1$.

Lemme 11 : *Soit (λ, μ) un couple d'éléments de $\mathcal{E}$. On suppose que E_α est le noyau du morphisme canonique*

$$\mathrm{ev}_{\lambda,\mu} : E_\lambda \otimes \mathrm{Hom}(E_\lambda, E_\mu) \longrightarrow E_\mu \ .$$

Alors, si $\mathrm{ev}_{\lambda,\mu,x}$ et $\mathrm{ev}_{\lambda,\beta,x}$ sont stables, il en est de même de $\mathrm{ev}_{\alpha,\beta,x}$.

Démonstration. Soient E', F' des sous–espaces vectoriels de $E_{\alpha,x}$, $E_{\beta,x}$ respectivement, avec $F' \neq E_{\beta,x}$, $E' \neq \{0\}$, tels que $\mathrm{ev}_{\alpha,\beta,x}(E' \otimes \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\beta)) \subset F'$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_{\lambda,x} \otimes \mathrm{Hom}(E_\lambda, E_\beta) & \xrightarrow{\quad\mathrm{ev}_{\lambda,\beta,x}\quad} & E_{\beta,x} \\ {\scriptstyle \mathrm{ev}_{\alpha,\lambda,x}\otimes I_{\mathrm{Hom}(E_\lambda,E_\beta)}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_{\alpha,\beta,x}} \\ E_{\alpha,x} \otimes \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\lambda) \otimes \mathrm{Hom}(E_\lambda, E_\beta) & \xrightarrow{I_{E_{\alpha,x}}\otimes\tau} & E_{\alpha,x} \otimes \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\beta) \ , \end{array}$$

τ étant le morphisme canonique. Donc si $G' = \mathrm{ev}_{\alpha,\lambda,x}(E' \otimes \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\lambda))$, on a

$$\mathrm{ev}_{\lambda,\beta,x}(G' \otimes \mathrm{Hom}(E_\lambda, E_\beta)) \ \subset \ F' \ .$$

Supposons que $\mathrm{ev}_{\alpha,\lambda,x}$ soit stable. Alors on a $G' \neq \{0\}$, donc, $\mathrm{ev}_{\lambda,\beta,x}$ étant stable, on a

$$\frac{\dim(G')}{r_\lambda} \ < \ \frac{\dim(F')}{r_\beta} \ .$$

D'autre part, $\mathrm{ev}_{\alpha,\lambda,x}$ étant stable, on a

$$\frac{\dim(E')}{r_\alpha} \ \leq \ \frac{\dim(G')}{r_\lambda} \ .$$

d'où finalement

$$\frac{\dim(E')}{r_\alpha} \ < \ \frac{\dim(F')}{r_\beta} \ .$$

ce qui prouve que $\mathrm{ev}_{\alpha,\beta,x}$ est stable.

Il reste à prouver que $\mathrm{ev}_{\alpha,\lambda,x}$ est stable. Soient E', G' des sous-espaces vectoriels de $E_{\alpha,x}$, $E_{\lambda,x}$ respectivement, avec $E' \neq \{0\}$, $G' \neq E_{\lambda,x}$, tels que

$$\mathrm{ev}_{\alpha,\lambda,x}(E' \otimes \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\lambda)) \ \subset G' \ .$$

Soit

$$H' \ = \ \mathrm{ev}_{\lambda,\mu,x}(G' \otimes \mathrm{Hom}(E_\lambda, E_\mu)) \ .$$

De la suite exacte $0 \to E_\alpha \to E_\lambda \otimes \mathrm{Hom}(E_\lambda, E_\mu) \to E_\mu \to 0$ on déduit une surjection canonique $\theta : \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\lambda)^* \to \mathrm{Hom}(E_\lambda, E_\mu)$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & E_\lambda \otimes \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\lambda)^* \\ & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle I_{E_\lambda} \otimes \theta} \\ E_\alpha & & \\ & \searrow & \\ & & E_\lambda \otimes \mathrm{Hom}(E_\lambda, E_\mu) \end{array}$$

soit commutatif. On en déduit que

$$E' \ \subset \ \ker(G' \otimes \mathrm{Hom}(E_\lambda, E_\mu) \longrightarrow H') \ .$$

On en déduit qu'avec $m = \dim(\mathrm{Hom}(E_\lambda, E_\mu))$, on a

$$\dim(H') \ \leq \ m.\dim(G') - \dim(E') \ .$$

Puisque $E_\alpha \subset E_\lambda \otimes \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\lambda)^*$, on ne peut pas avoir $G' = \{0\}$, et comme $G' \neq E_{\lambda,x}$, on a

$$\frac{\dim(G')}{r_\lambda} \ < \ \frac{\dim(H')}{r_\mu} \ \leq \ \frac{m.\dim(G') - \dim(E')}{mr_\lambda - r_\alpha} \ ,$$

(car $\mathrm{ev}_{\lambda,\mu,x}$ est stable). On a donc

$$\frac{\dim(E')}{r_\alpha} \ < \ \frac{\dim(G')}{r_\lambda} \ ,$$

ce qui prouve la stabilité de $\mathrm{ev}_{\alpha,\lambda,x}$. Ceci achève la démonstration du lemme 11. □

Démontrons maintenant (ii). Supposons que q est pair. On a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow E_\alpha \longrightarrow E_\lambda \otimes \mathrm{Hom}(E_\lambda, E_\mu) \longrightarrow E_\mu \longrightarrow 0 \ ,$$

avec

$$\lambda = \epsilon\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right), \quad \mu = \epsilon\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right) \quad \text{si} \ \ p \equiv 1 \mod 4 \ ,$$

$$\lambda = \epsilon\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right), \quad \mu = \epsilon\left(3 + \frac{k-1}{2^{n-1}}\right) \quad \text{si} \ \ p \equiv 3 \mod 4 \ .$$

Si $p \equiv 1 \bmod 4$, c'est une application de A_{n-1}, et sinon de B_{n-2}.

D'après C_{n-1}, $\mathrm{ev}_{\lambda,\beta,x}$ et $\mathrm{ev}_{\lambda,\mu,x}$ sont stables. Il découle du lemme 11 que $\mathrm{ev}_{\alpha,\beta,x}$ l'est. Il reste à montrer que $\mathrm{Ext}^1(E_\alpha, E_\beta) = \{0\}$. C'est une conséquence des égalités

$$\mathrm{Ext}^1(E_\lambda, E_\beta) = \mathrm{Ext}^2(E_\mu, E_\beta) = \{0\} \ .$$

La première découle du fait que $\lambda \leq \beta$ et que C_{n-1} est vraie. La seconde vient de ce que $\mu \leq \beta$ si $p \equiv 1 \bmod 4$, et sinon $\mu - 3 < \beta$ et on applique le théorème de dualité de Serre.

Supposons maintenant que q soit impair. On a une suite exacte

$$O \longrightarrow E_\alpha \longrightarrow E_\lambda \otimes \mathrm{Hom}(E_\lambda, E_\mu) \longrightarrow E_\mu \longrightarrow 0$$

comme précédemment, et on procède de la même façon en utilisant ce qu'on vient de démontrer : C_n est vraie si p ou q est pair.

On a donc démontré (ii).

3 - *Démonstration de (iii)*

On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow Q^* \longrightarrow \mathcal{O} \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1)) \longrightarrow \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0 \ ,$$

donc C_1 se déduit de C_0 comme précédemment C_n se déduisait de C_{n-1}. Il suffit donc de montrer que C_0 est vraie, ce qui est immédiat.

Les théorèmes 2, 3, 4, 5, 6 sont donc démontrés.

4 – *Démonstration du corollaire 7*

On reprend la démonstration du théorème 1. Soit E un faisceau cohérent rigide sur $\mathbb{P}_2$. Alors E est sans torsion d'après le lemme 10. Soit

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_m = E$$

la filtration de Harder-Narasimhan de E, $\mathrm{Gr}_i = F_i/F_{i-1}$ pour $1 \leq i \leq m$. On a déjà vu qu'on pouvait écrire $\mathrm{Gr}_i = \mathbb{C}^{n_i} \otimes E_{\alpha_i}$, avec $n_i \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_i \in \mathcal{E}$. On a $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_m$, donc d'après le théorème 6 on a $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{Gr}_i, \mathrm{Gr}_j) = \{0\}$ pour $1 \leq j < i \leq m$. Il en découle que $E \simeq \bigoplus_{i=1}^m \mathrm{Gr}_i$, ce qui démontre le corollaire 7.

Le réciproque du corollaire 7 est fausse : on a $H^1(Q^*(-1)) \simeq \mathbb{C}$, et $\mathcal{O} \oplus Q^*(-1) = E$ est une somme directe de fibrés exceptionnels. Cependant on a $\mathrm{Ext}^1(E, E) \simeq \mathbb{C}$.

5. Résolutions de la diagonale de $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$

1 – *Triades*

Soient p, n des entiers, avec $n \geq 0$, $\alpha = \epsilon\left(\dfrac{p}{2^n}\right)$, $\beta = \epsilon\left(\dfrac{p+1}{2^n}\right)$. On considère des triplets de rationnels du type suivant

1 : $(\alpha, \alpha.\beta, \beta)$,

2 : $(\beta - 3, \alpha, \alpha.\beta)$,

3 : $(\alpha.\beta, \beta, \alpha + 3)$.

Pour $n = 0$, on considère aussi les triplets du type $(p, p+1, p+2)$. À de tels triplets sont associés des triplets de fibrés vectoriels, appelés *triades*. L'entier n s'appelle *niveau* de la triade. Soit $\mathbb{T}$ l'ensemble des triades. On pose, pour tout entier m et toute triade $\mathcal{T} = (E, G, F)$,

$$\mathcal{T}(m) \ = \ (E(m), G(m), F(m)) \ ,$$

ce qui définit une bijection $t_m : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$.

On définit une application $j : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ par

$$j(E, G, F) \ = \ (F(-3), E, G) \ .$$

Cette application associe à une triade de type 1 (resp. 2, 3) une triade de type 2 (resp. 3, 1). Pour tout entier $n > 0$, j^n désigne la composée n-iéme de j. On a $j^3 = t_{-3}$, donc j est une bijection.

Lemme 12 : *Soit (E, G, F) une triade. Soient N le noyau du morphisme canonique*

$$\mathrm{ev} : E \otimes \mathrm{Hom}(E, G) \longrightarrow G$$

et M le conoyau du morphisme canonique

$$\mathrm{ev}^* : G \longrightarrow F \otimes \mathrm{Hom}(G, F)^* \ .$$

Alors $M \simeq N(3)$ et les triplets (N, E, F) et (E, F, M) sont des triades.

Démonstration. Posons $\alpha = \epsilon\left(\frac{p}{2^n}\right)$, $\beta = \epsilon\left(\frac{p+1}{2^n}\right)$, avec p, n entiers et $n \geq 0$. On supposera que

$$\begin{aligned} (E, G, F) \ &= \ (E_\alpha, E_{\alpha.\beta}, E_\beta) \quad \text{si } (E, G, F) \text{ est de type 1,} \\ &= \ (E_{\beta-3}, E_\alpha, E_{\alpha.\beta}) \quad \text{si } (E, G, F) \text{ est de type 2,} \\ &= \ (E_{\alpha.\beta}, E_\beta, E_{\alpha+3}) \quad \text{si } (E, G, F) \text{ est de type 3.} \end{aligned}$$

On supposera que $n > 0$, le cas $n = 0$ étant immédiat. Il suffit, en appliquant les théorèmes 2, 3, 4, 5, de calculer les indices de $\mathcal{E}$ correspondant a M et N. Ils sont donnés par le tableau suivant

Type de (E, G, F)	1 $p \equiv 0 \bmod 2$	1 $p \equiv 1 \bmod 2$	2	3
Indice de M	$\epsilon\left(\frac{p+2}{2^n}\right)$	$\epsilon\left(3 + \frac{p-1}{2^n}\right)$	$\epsilon\left(\frac{4p+3}{2^{n+2}}\right)$	$\epsilon\left(3 + \frac{4p+1}{2^{n+2}}\right)$
Indice de N	$\epsilon\left(-3 + \frac{p+2}{2^n}\right)$	$\epsilon\left(\frac{p-1}{2^n}\right)$	$\epsilon\left(-3 + \frac{4p+3}{2^{n+2}}\right)$	$\epsilon\left(\frac{4p+1}{2^{n+2}}\right)$
Type de (N, E, F)	2	1	3	3
Type de (E, F, M)	1	3	2	2

Ceci démontre le lemme 12. □

On appelle *triade dérivée* de $\mathcal{T} = (E, G, F)$ la triade $\mathcal{T}' = (F, M, E(3))$, et on définit ainsi une application $d : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$.

Lemme 13 : *On a* $d^2 = t_3$.

Démonstration. Ou encore, pour toute triade $\mathcal{T} = (E, G, F)$, on a $\mathcal{T}'' = (\mathcal{T}')' = \mathcal{T}(3)$.

Soient N le noyau de $\mathrm{ev} : E \otimes \mathrm{Hom}(E, G) \to G$, M le conoyau de $\mathrm{ev}^* : G \to F \otimes \mathrm{Hom}(G, F)^*$. L'isomorphisme $M \simeq N(3)$ induit des suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 0 & & & & 0 & & \\ & & & & & \searrow & & \nearrow & & & \\ & & & & & & M & & & & \\ & & & & & \nearrow^{\phi_0} & & \searrow_{\psi_0} & & & \\ 0 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\mathrm{ev}^*} & F \otimes \mathrm{Hom}(G,F)^* & & \longrightarrow & & E(3)\,\mathrm{Hom}(E,G) & \xrightarrow{\mathrm{ev}} & 0\ . \end{array}$$

On a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}(G, F)^* \ \simeq\ \mathrm{Hom}(F, M)\ , \qquad \mathrm{Hom}(E, G)\ \simeq\ \mathrm{Hom}(M, E(3))^*\ ,$$

tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} F \otimes \mathrm{Hom}(G,F)^* & & & & E(3) \otimes \mathrm{Hom}(E,G) \\ \| & \searrow^{\phi_0} & & \nearrow^{\psi_0} & \| \\ & & M & & \\ \| & \nearrow_{\mathrm{ev}} & & \searrow_{\mathrm{ev}^*} & \| \\ F \otimes \mathrm{Hom}(F,M) & & & & E(3) \otimes \mathrm{Hom}(M, E(3))^*\ . \end{array}$$

Par suite, $\mathcal{T}'' = (E(3), G(3), F(3))$. □

Il découle du lemme 13 que d est une bijection.

On appelle *triade duale* de $\mathcal{T} = (E, G, F)$ la triade $\mathcal{T}^* = (F^*, G^*, E^*)$. On a $(\mathcal{T}^*)' = (\mathcal{T}')^*(3)$.

On note $\mathcal{T}^\vee$ la triade $(E^*(-3), M^*, F^*) = (\mathcal{T}')^*$.

2 − *Morphismes de fibrés sur* $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$.

À une triade $\mathcal{T} = (E, G, F)$ on associe la suite de morphismes de fibrés sur $\mathbb{P}_2$

$$\begin{array}{rccccccccc} R^\bullet_{\mathcal{T}} :\ 0 & \longrightarrow & E \boxtimes E^*(-3) & \xrightarrow{a} & G \boxtimes M^* & \xrightarrow{b} & F \boxtimes F^* & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ & & R^{-2} & & R^{-1} & & R^0 & & \end{array}$$

où $(F, M, E(3)) = \mathcal{T}'$, a et b étant les morphismes associés aux éléments de $\mathrm{Hom}(E, G) \otimes \mathrm{Hom}(M, E(3))$ et $\mathrm{Hom}(G, F) \otimes \mathrm{Hom}(F, M)$ définis par les dualités $\mathrm{Hom}(E, G) \simeq \mathrm{Hom}(M, E(3))^*$ et $\mathrm{Hom}(G, F) \simeq \mathrm{Hom}(F, M)^*$.

On va maintenant démontrer le théorème 8, c'est-à-dire que si Δ désigne la diagonale de $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$, $R^\bullet_{\mathcal{T}}$ est un complexe et c'est une résolution de $\mathcal{O}_\Delta$, via le morphisme canonique $\mathrm{trace}_\Delta : F \boxtimes F^* \to \mathcal{O}_\Delta$.

Lemme 14 : 1 – *Soit* $\sigma : \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$ *la symétrie par rapport à la diagonale. Alors on a*

$$\sigma^*(R^\bullet_{\mathcal{T}}) \simeq R^\bullet_{\mathcal{T}^\vee} .$$

2 – *On a*

$$(R^\bullet_{\mathcal{T}})^* \simeq R^\bullet_{\mathcal{T}^*} \otimes p_2^*(\mathcal{O}(-3)) .$$

(La démonstration est immédiate).

Si $R^\bullet$ est une suite de morphismes de fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$:

$$R^\bullet : \cdots \longrightarrow R^i \xrightarrow{\delta_i} R^{i+1} \longrightarrow \cdots ,$$

on note $\mathrm{dec}(R^\bullet)$ la suite de morphismes de fibrés vectoriels

$$S^\bullet : \cdots \longrightarrow S^i \xrightarrow{\nu_i} S^{i+1} \longrightarrow \cdots ,$$

définie par $S^i = R^{i+1}$, $\nu_i = \delta_{i+1}$ pour tout i.

Lemme 15 : *Si* $\mathcal{T}$ *est une triade, la suite* $R^\bullet_{\mathcal{T}}$ *est un complexe et il existe un complexe acyclique* $K^\bullet$ *de fibrés vectoriels sur* $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$*, et une suite exacte*

$$0 \longrightarrow R^\bullet_{\mathcal{T}} \longrightarrow K^\bullet \longrightarrow \mathrm{dec}(R^\bullet_{j(\mathcal{T})}) \longrightarrow 0 .$$

Supposons le lemme 15 démontré. On va en déduire le théorème 8.

L'ensemble $\mathbb{T}$ est homogène sous le groupe des automorphismes de $\mathbb{T}$ engendré par j et d : en effet, si $\mathcal{T}_0 = (\mathcal{O}(-1), \mathcal{O}, \mathcal{O}(1))$, l'orbite de $\mathcal{T}_0$ contient la translatée $j(\mathcal{T}_0) = \mathcal{T}_0(-1)$, et donc aussi toutes les triades de niveau 0. D'autre part, il découle du tableau du lemme 12 que si l'orbite de $\mathcal{T}_0$ contient toutes les triades de niveau n, elle contient aussi toutes les triades de niveau $n+1$. Il en découle que cette orbite est égale à $\mathbb{T}$ tout entier.

Le théorème 8 est vrai pour $\mathcal{T}_0$, c'est la résolution connue de $\mathcal{O}_\Delta$ conduisant à la suite spectrale de Beilinson classique. Par conséquent il suffit de montrer que si le théorème 8 est vrai pour $\mathcal{T}$, il l'est aussi pour $\mathcal{T}'$ et $j(\mathcal{T})$.

D'après le lemme 14, si le théorème 8 est vrai pour $\mathcal{T}$, il l'est pour $\mathcal{T}^\vee$, ainsi que pour $(\mathcal{T}^\vee)^* = \mathcal{T}'$. D'autre part, il découle du lemme 15 que $R^\bullet_{j(\mathcal{T})}$ est un complexe, et qu'on a des isomorphismes $H^i(R^\bullet_{j(\mathcal{T})}) \simeq H^i(R^\bullet_{\mathcal{T}})$. On verra que ces isomorphismes sont compatibles avec l'augmentation. Le théorème 8 en découle pour $j(\mathcal{T})$.

Il reste donc à prouver le lemme 15, et à montrer qu'on a un triangle commutatif (T)

$$\begin{array}{ccc} H^0(R^\bullet_{j(\mathcal{T})}) & & \\ \| & \searrow^{\lambda_0} & \\ f & & \mathcal{O}_\Delta \\ & \nearrow_{\mu_0} & \\ H^0(R^\bullet_{\mathcal{T}}) & & \end{array}$$

l'isomorphisme f provenant de la suite exacte du lemme 15, λ_0 et ν_0 des applications trace_Δ.

3 – *Préliminaires à la démonstration du lemme 15*

Soit $\mathcal{T} = (E, G, F)$ une triade. Soient M, K, H les conoyaux de ev^* dans les suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 0 & & & & & & 0 & & \\ & & & \searrow & & & & \nearrow & & & \\ & & & & M & & & & & & \\ & \nearrow & & & & \searrow & & & & \searrow & \\ D_0^\bullet : 0 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\mathrm{ev}^*} & F \otimes \mathrm{Hom}(G,F)^* & & \longrightarrow & & E(3) \otimes \mathrm{Hom}(E,G) & \xrightarrow{\mathrm{ev}} & G(3) \longrightarrow 0\ , \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 0 & & & & & & 0 & & \\ & & & \searrow & & & & \nearrow & & & \\ & & & & K & & & & & & \\ & \nearrow & & & & \searrow & & & & \searrow & \\ D_1^\bullet : 0 & \longrightarrow & F(-3) & \xrightarrow{\mathrm{ev}^*} & E \otimes \mathrm{Hom}(F,E(3))^* & & \longrightarrow & & G \otimes \mathrm{Hom}(G,F) & \xrightarrow{\mathrm{ev}} & F \longrightarrow 0\ , \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 0 & & & & & & 0 & & \\ & & & \searrow & & & & \nearrow & & & \\ & & & & H & & & & & & \\ & \nearrow & & & & \searrow & & & & \searrow & \\ D_2^\bullet : 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\mathrm{ev}^*} & G \otimes \mathrm{Hom}(E,G)^* & & \longrightarrow & & F \otimes \mathrm{Hom}(F,E(3)) & \xrightarrow{\mathrm{ev}} & E(3) \longrightarrow 0\ . \end{array}$$

À la suite $D_0^\bullet$, correspond un élément w_0 de $\mathrm{Ext}^2(G(3), G)$. On verra dans la démonstration du lemme 16 qu'il est non nul. De même on définit des éléments w_1 de $\mathrm{Ext}^2(F, F(-3))$ et w_2 de $\mathrm{Ext}^2(E(3), E)$ associés à $D_1^\bullet$ et $D_2^\bullet$ respectivement. Quitte à modifier les injections $M \to E(3) \otimes \mathrm{Hom}(E, G)$ et $H \to F \otimes \mathrm{Hom}(F, E(3))$, on peut supposer que la propriété suivante est vérifiée :

(P) *Dans* $H^2(\mathcal{O}(-3)) \simeq \mathbb{C}$, *on a* $\mathrm{trace}(w_0) = \mathrm{trace}(w_1) = \mathrm{trace}(w_2)$.

On suppose que dans les suites $D_0^\bullet$, $D_1^\bullet$, $D_2^\bullet$, les termes de degré 0 sont respectivement G, $F(-3)$ et E. On note $\mathrm{Mor}^1(D_0^\bullet, D_2^\bullet)$ l'espace des morphismes de degré 1.

Lemme 16 : *On suppose la propriété (P) vérifiée. Alors tout* $f \in \mathrm{Mor}^1(D_0^\bullet, D_2^\bullet)$ *est de la forme* $(I_G \otimes u, \gamma, I_{E(3)} \otimes u)$, *avec* $\gamma : F \otimes \mathrm{Hom}(G,F)^* \to F \otimes \mathrm{Hom}(F, E(3))$, $u \in \mathrm{Hom}(E,G)^*$, *et l'application* $f \mapsto u$ *est un isomorphisme de* $\mathrm{Mor}^1(D_0^\bullet, D_2^\bullet)$ *sur* $\mathrm{Hom}(E,G)^*$.

L'élément w_0 associé à $D_0^\bullet$ est défini de la manière suivante : on considère la suite spectrale d'aboutissement $\mathrm{Ext}^\bullet(D_0^\bullet, D_0^\bullet)$ dont le terme E_1 est donné par

$$E_1^{p,q}(D_0^\bullet, D_0^\bullet) \;=\; \bigoplus_j \mathrm{Ext}^q(D_0^j, D_0^{j+p})\ .$$

Compte tenu du chapitre 4 les termes $E_1^{p,q}$ non nuls pour $p \leq 0$ sont $E_1^{-3,2}$ et $E_1^{0,0}$. Il en découle qu'on a un isomorphisme

$$d_3 : E_1^{-3,2} = \mathrm{Ext}^2(G(3), G) \longrightarrow \ker(d_1^{0,0}) = \mathrm{End}(D_0^\bullet)$$

et w_0 est défini par $d_3(w_0) = I_{D_0^\bullet}$. On définit de même w_1 et w_2.

Soit $f : D_0^\bullet \to D_2^\bullet$ un morphisme de degré 1, de la forme $(I_F \otimes u, w, I_{E(3)} \otimes v)$, avec u, v dans $\mathrm{Hom}(E, G)^*$. On va montrer que $u = v$. Considérons pour cela la suite spectrale d'aboutissement $\mathrm{Ext}^\bullet(D_0^\bullet, D_2^\bullet) = 0$, de terme E_1

$$E_1^{p,q}(D_0^\bullet, D_2^\bullet) \ = \ \bigoplus_j \mathrm{Ext}^q(D_0^j, D_2^{j+p}) \ .$$

Compte tenu du chapitre 4, on obtient un isomorphisme

$$d_3^{-2,2} : E_2^{-2,2}(D_0^\bullet, D_2^\bullet) \longrightarrow \ker(d_1^{1,0}) = \mathrm{Mor}^1(D_0^\bullet, D_2^\bullet)$$

et une suite exacte (S)

$$\begin{array}{ccccccc} & & E_1^{-3,2} & & & & E_1^{-2,2} \\ & & \| & & & & \| \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^2(G(3), E) & \xrightarrow{d_1} & \mathrm{Ext}^2(E(3) \otimes \mathrm{Hom}(E, G), E) \oplus \mathrm{Ext}^2(G(3), G \otimes \mathrm{Hom}(E, G)^*) & & \\ & & & & & \xrightarrow{\Phi} E_2^{-2,2} \longrightarrow 0 & \end{array}$$

La multiplication à gauche par f induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_2^{-3,2}(D_0^\bullet, D_0^\bullet) & \xrightarrow{d_3^{-3,2}} & \mathrm{End}(D_0^\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_2^{-2,2}(D_0^\bullet, D_2^\bullet) & \xrightarrow{d_3^{-2,2}} & \mathrm{Mor}^1(D_0^\bullet, D_2^\bullet) \end{array}$$

d'où on déduit que $f = d_3^{-2,2} \circ \Phi(w_0 \otimes u)$.

En considérant la multiplication à droite par f, on obtient aussi $f = d_3^{-2,2} \circ \Phi(w_2 \otimes v)$. On a donc $\Phi(w_2 \otimes v - w_0 \otimes u) = 0$.

D'autre part on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(E, G) \otimes \mathrm{Ext}^2(G(3), E) & \xrightarrow{\text{Yoneda}} & \mathrm{Ext}^2(G(3), G) \\ \downarrow \text{Yoneda} & & \downarrow \text{trace} \\ \mathrm{Ext}^2(E(3), E) & \xrightarrow{\text{trace}} & H^2(\mathcal{O}(-3)) \ , \end{array}$$

d'où on déduit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^2(G(3), E) & \xrightarrow{\lambda} & \mathrm{Ext}^2(G(3), G \otimes \mathrm{Hom}(E, G)^*) \\ \downarrow \mu & & \downarrow \text{trace} \\ \mathrm{Ext}^2(E(3) \otimes \mathrm{Hom}(E, G), E) & \xrightarrow{\text{trace}} & \mathrm{Hom}(E, G)^* \otimes H^2(\mathcal{O}(-3)) \ . \end{array}$$

Le morphisme d_1 de la suite exacte (S) ci-dessus n'est autre que (λ, μ). Dans $\mathrm{Hom}(E,G)^* \otimes H^2(\mathcal{O}(-3))$ on a donc

$$u.\mathrm{trace}(w_0) - v.\mathrm{trace}(w_2) \;=\; 0\ ,$$

d'où $u = v$, puisqu'on a supposé que $\mathrm{trace}(w_0) = \mathrm{trace}(w_2)$.

Réciproquement, si u est un élément de $\mathrm{Hom}(E,G)^*$, on pose $f = d_3^{-2,2}(w_0 \otimes u)$. Ce morphisme est de la forme $(I_G \otimes u', w', I_{E(3)} \otimes u')$, et on a $f = d_3(w_0 \otimes u')$, d'où $\Phi(w_0 \otimes u) = \Phi(w_0 \otimes u')$, et $\mathrm{trace}(w_0) \otimes u = \mathrm{trace}(w_0) \otimes u'$, et donc $u = u'$.

Ceci achève la démonstration du lemme 16.

4 − *Dualités*

Considérons les suites exactes

$$(1)\quad 0 \longrightarrow G \xrightarrow{\mathrm{ev}^*} F \otimes \mathrm{Hom}(G,F)^* \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

$$(2)\quad 0 \longrightarrow H \longrightarrow F \otimes \mathrm{Hom}(F,E(3)) \xrightarrow{\mathrm{ev}} E(3) \longrightarrow 0$$

déduites de $D_0^\bullet$ et $D_2^\bullet$, et les isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{Hom}(G,H) \\ & \overset{\phi}{\nearrow} & \\ \mathrm{Hom}(E,G)^* & & \\ & \underset{\psi}{\searrow} & \\ & & \mathrm{Hom}(M,E(3)) \end{array}$$

associés aux deux autres suites exactes courtes extraites de $D_0^\bullet$ et $D_2^\bullet$. À tout élément u de $\mathrm{Hom}(E,G)^*$ est associé d'après le lemme 16 un morphisme $D_0^\bullet \to D_2^\bullet$ de degré 1, qui conduit à un morphisme (1) → (2), de la forme $(\phi(u), I_F \otimes \theta(u), \psi(u))$, avec $\theta(u) : \mathrm{Hom}(G,F)^* \to \mathrm{Hom}(H,F)^*$.

Lemme 17 : *Considérons le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(G,F)^* & \xrightarrow[\simeq]{\psi'} & \mathrm{Hom}(F,M) \\ \downarrow{\scriptstyle \delta} & \overset{\theta(u)}{\searrow} & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_0} \\ \mathrm{Hom}(H,F)^* & \xrightarrow[\simeq]{\phi'} & \mathrm{Hom}(F,E(3)) \end{array}\ ,$$

où les flèches horizontales sont déduites de (1) et (2), ϵ_0 est la multiplication à gauche par $\psi(u)$, δ la transposée de la multiplication à droite par $\phi(u)$. Alors, si la propriété (P) est vérifiée, ce diagramme est commutatif.

Démonstration. La multiplication à gauche par $\psi(u)$ donne un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F\otimes \mathrm{Hom}(F,M) & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ F\otimes \mathrm{Hom}(F,E(3)) & \longrightarrow & E(3)\ , \end{array}$$

et si on compose avec ψ' on obtient un morphisme $(1)\to(2)$, se relevant en un morphisme de degré 1 de $D_0^\bullet$ dans $D_2^\bullet$, de la forme $(w,w',I_{E(3)}\otimes u)$. D'après le lemme 16, ce morphisme coïncide avec celui qui est défini par u, ce qui entraine la commutativité du triangle de droite. Celle du triangle de gauche s'obtient de même en considérant $\phi(u)$. Ceci démontre le lemme 17. □

5 – *Définition de la suite $K^\bullet$*

Soit u un élément de $\mathrm{Hom}(E,G)^*$. On en déduit un morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E^*(-3) & \longrightarrow & F^*\otimes \mathrm{Hom}(F,E(3))^* & \longrightarrow & H^* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle {}^t\psi(u)} & & \downarrow{\scriptstyle I_{F^*}\otimes {}^t\theta(u)} & & \downarrow{\scriptstyle {}^t\phi(u)} & & \\ 0 & \longrightarrow & M^* & \longrightarrow & F^*\otimes \mathrm{Hom}(G,F) & \longrightarrow & G^* & \longrightarrow & 0\ . \end{array}$$

Soit (e_i) une base de $\mathrm{Hom}(E,G)$, (e^i) la base duale dans $\mathrm{Hom}(E,G)^*$. On pose pour tout i, $u^i=\phi(e^i)$, $v^i=\psi(e^i)$. Alors les morphismes $a_{\mathcal{T}}: E\boxtimes E^*(-3)\to G\boxtimes M^*$ et $b_{j(\mathcal{T})}: E\boxtimes H^*\to G\boxtimes G^*$ sont

$$a_{\mathcal{T}}=\sum_i e_i\boxtimes {}^tv^i,\quad b_{j(\mathcal{T})}=\sum_i e_i\boxtimes {}^tu^i\ .$$

On a alors un morphisme de suites exactes de fibrés sur $\mathbb{P}_2\times\mathbb{P}_2$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E\boxtimes E^*(-3) & \longrightarrow & E\boxtimes (F^*\otimes \mathrm{Hom}(F,E(3))^*) & \longrightarrow & E\boxtimes H^* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle a_{\mathcal{T}}} & & \downarrow{\scriptstyle A} & & \downarrow{\scriptstyle b_{j(\mathcal{T})}} & & \\ 0 & \longrightarrow & G\boxtimes M^* & \longrightarrow & G\boxtimes (F^*\otimes \mathrm{Hom}(G,F)) & \longrightarrow & G\boxtimes G^* & \longrightarrow & 0\ . \end{array}$$

Ce diagramme se complète en le diagramme (R)

Diagramme (R)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & E \boxtimes E^*(-3) & \xrightarrow{a_{\mathcal{T}}} & G \boxtimes M^* & \xrightarrow{b_{\mathcal{T}}} & F \boxtimes F^* & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & F(-3) \boxtimes F^* & \xrightarrow{B'} & E \boxtimes (F^* \otimes \mathrm{Hom}(F, E(3))^*) & \xrightarrow{A} & G \boxtimes (F^* \otimes \mathrm{Hom}(G, F)) & \xrightarrow{B} & F \boxtimes F^* & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & F(-3) \boxtimes F^* & \xrightarrow{a_{j(\mathcal{T})}} & E \boxtimes H^* & \xrightarrow{b_{j(\mathcal{T})}} & G \boxtimes G^* & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

où B est défini par

$$B(\alpha' \boxtimes (\beta \otimes \xi)) \ = \ \xi(\alpha') \boxtimes \beta \ ,$$

pour $\alpha' \in G$, $\beta \in F^*$ (au-dessus du même point de $\mathbb{P}_2$), $\xi \in \mathrm{Hom}(G,F)$, et B' par

$$\langle B'(\alpha'' \boxtimes \beta), \eta \rangle \ = \ \eta(-3)(\alpha'') \boxtimes \beta \ ,$$

pour $\alpha'' \in F(-3)$, $\beta \in F^*$ (au-dessus du même point de $\mathbb{P}_2$) et $\eta \in \mathrm{Hom}(F, E(3))$. Le lemme 15 découle des assertions suivantes : si (P) est satisfaite, on a

a – Le diagramme (R) est commutatif.

b – la seconde ligne de (R) est isomorphe à $D_1^\bullet \boxtimes F^*$.

La seconde ligne de (R) est donc le complexe acyclique du lemme 15.

6 – *Démonstration de a-*

Il faut montrer que deux carrés dans (R) sont commutatifs : le carré (1) supérieur droit et le carré (2) inférieur gauche.

Démontrons que (1) est commutatif. Soit (ϵ_j) une base de $\mathrm{Hom}(G,F)$, (ϵ^j) la base duale dans $\mathrm{Hom}(G,F)^*$, $w^j = \psi'(\epsilon^j)$, élément de $\mathrm{Hom}(F,M)$. Alors on a

$$b_{\mathcal{T}} \ = \ \sum_j \epsilon_j \boxtimes {}^t w^j \ .$$

Soient $\alpha \in G$, $\beta \in M^*$ (au-dessus du même point de $\mathbb{P}_2$). Alors l'image de $\alpha \boxtimes \beta$ dans $G \boxtimes (F^* \otimes \mathrm{Hom}(G,F))$ est

$$\sum_j \alpha \boxtimes ({}^t w^j(\beta) \otimes \epsilon_j) \ ,$$

élément dont l'image dans $F \boxtimes F^*$ est

$$\sum_j \epsilon_j(\alpha) \boxtimes {}^t w^j(\beta) \ = \ b_{\mathcal{T}}(\alpha \boxtimes \beta) \ ,$$

ce qui prouve la commutativité de (1).

Démontrons que (2) est commutatif. Soit (η_l) une base de $\mathrm{Hom}(F, E(3))$, (η^l) la base duale dans $\mathrm{Hom}(F, E(3))^*$, (y_l) son image réciproque par l'isomorphisme ${}^t\phi' : \mathrm{Hom}(H,F) \simeq \mathrm{Hom}(F, E(3))^*$, qui est une base de $\mathrm{Hom}(H,F)$. Alors, pour $\alpha \in F(-3)$, $\beta \in F^*$ (au-dessus du même point de $\mathbb{P}_2$), on a

$$B'(\alpha \boxtimes \beta) \ = \ \sum_l \eta_l(-3)(\alpha) \boxtimes (\beta \otimes \eta^l) \ ,$$

donc cet élément a pour image dans $E \otimes H^*$

$$\sum_l \eta_l(-3)(\alpha) \boxtimes {}^t y_l(\beta) \ = \ a_{j(\mathcal{T})}(\alpha \boxtimes \beta) \ ,$$

ce qui démontre la commutativité de (2).

7 – *Démonstration de b-*

La seconde ligne de (R) est isomorphe à $L^\bullet \boxtimes F^*$, $L^\bullet$ étant la suite

$$0 \longrightarrow F(-3) \xrightarrow{\mathrm{ev}^*} E \otimes \mathrm{Hom}(F, E(3))^* \xrightarrow{\Theta} G \otimes \mathrm{Hom}(G, F) \xrightarrow{\mathrm{ev}} F \longrightarrow 0 \ ,$$

où Θ est défini par

$$\alpha \otimes \beta \mapsto \sum_i e_i(\alpha) \otimes {}^t\theta(e^i)(\beta) \ ,$$

pour $\alpha \in E$, $\beta \in \mathrm{Hom}(F, E(3))^*$. D'après le lemme 17, Θ se factorise suivant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E \otimes \mathrm{Hom}(F, E(3))^* & & \\ \simeq \big\downarrow {\scriptstyle I_E \otimes {}^t\phi'} & \searrow^{\Theta} & \\ E \otimes \mathrm{Hom}(H, F) & \xrightarrow{\Theta'} & G \otimes \mathrm{Hom}(G, F) \end{array} \ ,$$

où

$$\Theta'(\alpha \otimes \beta) \ = \ \sum_i e_i(\alpha) \otimes (\beta \circ u^i) \ ,$$

pour $\alpha \in E$, $\beta \in \mathrm{Hom}(H, F)$. L'image de $\Theta'(\alpha \otimes \beta)$ dans F est donc $\sum_i \beta \circ u^i \circ e_i(\alpha)$. Or, en vertu de la suite exacte extraite de $D_2^\bullet$:

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow G \otimes \mathrm{Hom}(E, G)^* \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

et de la définition de u^i, on a $\sum_i u^i \circ e_i(\alpha) = 0$ dans H. Par conséquent on a $\mathrm{ev} \circ \Theta = 0$.

De même, Θ se factorise suivant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E \otimes \mathrm{Hom}(F, E(3))^* & \xrightarrow{\Theta''} & G \otimes \mathrm{Hom}(F, M)^* \\ & \searrow^{\Theta} & \big\downarrow \\ & & G \otimes \mathrm{Hom}(G, F) \end{array} \ ,$$

où

$$\langle \Theta''(\alpha \otimes \beta), \xi \rangle \ = \ \sum_i e_i(\alpha) \langle \beta, v^i \circ \xi \rangle$$

pour $\alpha \in E$, $\beta \in \mathrm{Hom}(F, E(3))^*$ et $\xi \in \mathrm{Hom}(F, M)$. On a alors, pour $\alpha'' \in F(-3)$ au dessus du même point de $\mathbb{P}_2$ que α

$$\langle \Theta'' \circ \mathrm{ev}^*(\alpha''), \xi \rangle \ = \ \sum_{i,l} e_i \circ \eta_l(-3)(\alpha'') \langle \eta^l, v^i \circ \xi \rangle \ = \ \sum_i e_i \circ (v^i \circ \xi)(-3)(\alpha'') \ .$$

Mais, d'après la suite exacte déduite de $D_0^\bullet$:

$$0 \longrightarrow M(-3) \longrightarrow E \otimes \mathrm{Hom}(E, G) \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

et la définition de v_i, le morphisme $\sum_i e_i \circ v^i(-3) : M \to G$ est nul. Donc $\Theta \circ \mathrm{ev} = 0$.

On a $a_{\mathcal{T}} \neq 0$, donc $\Theta \neq 0$. Le morphisme Θ induit donc un endomorphisme non nul du fibré exceptionnel K, et comme celui-ci est simple, cet endomorphisme est une homothétie de rapport non nul. Il en découle que $L^\bullet \simeq D_1^\bullet$, et que $L^\bullet \boxtimes F^*$ est un complexe acyclique.

Le lemme 15 est donc démontré.

8 − *Fin de la démonstration du théorème 8*

Il reste à montrer que le triangle (T) de 2- est commutatif. Cela découle du fait que (T) est induit par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G\boxtimes(F^*\otimes\mathrm{Hom}(G,F)) & \xrightarrow{B} & F\boxtimes F^* \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{trace}} \\ G\boxtimes G^* & \xrightarrow{\mathrm{trace}} & \mathcal{O}_\Delta \end{array}$$

Le théorème 8 est donc démontré.

6. Suite spectrale de Beilinson généralisée

On démontre ici le corollaire 9. Soit $\mathcal{T}=(E,G,F)$ une triade, M le conoyau du morphisme canonique $\mathrm{ev}^*: G\to F\otimes\mathrm{Hom}(G,F)^*$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$ tel que $\mathrm{Hom}(F,\mathcal{F})=\mathrm{Hom}(\mathcal{F},E)=\{0\}$.

Puisque $\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2\times\mathbb{P}_2}}(\mathcal{O}_\Delta,p^*(\mathcal{F}))=0$ pour $i>0$, la suite $R^\bullet_{\mathcal{T}}\otimes(\mathcal{O}\boxtimes\mathcal{F})$ est une résolution de $(\mathcal{O}\otimes\mathcal{F})\otimes\mathcal{O}_\Delta=\mathcal{F}_\Delta$. On a

$$p_{2*}(\mathcal{F}_\Delta)\simeq\mathcal{F},\quad R^ip_{2*}(\mathcal{F}_\Delta)=0\quad\text{si}\quad i>0\ ,$$

et la suite spectrale du foncteur dérivé Rp_{2*} appliquée à la résolution précédente de $\mathcal{F}_\Delta$ converge vers $\mathcal{F}$ en degré 0, et vers 0 en les autres degrés. Les termes $E_1^{p,q}$ de cette suite sont

$$E_1^{p,q}\ =\ E_p\otimes H^q(\mathcal{F}\otimes F_p)\ ,$$

avec $E_{-2}=E,\ F_{-2}=E^*(-3),\ E_{-1}=G\ ,\ F_{-1}=M^*,\ E_0=F,\ F_0=F^*,$ et $E_i=F_i=0$ si $i\neq 0,-1,-2$.

D'après les hypothèses, les seuls termes éventuellement non nuls sont $E_1^{-2,1}$, $E_1^{-1,1}$ et $E_1^{0,1}$. On en déduit immédiatement le corollaire 9 (cf. [8], proposition 7.1 et [6], proposition 20).

Remerciement : Je tiens à remercier J. Le Potier pour les simplifications notables qu'il a apportées aux démonstrations de ces résultats, ainsi que pour l'amélioration de certains d'entre eux : je lui dois les versions finales des théorèmes 1 et 6, ainsi que le corollaire 7.

Références

[1] Barth, W. *Moduli of vector bundles on the projective plane.* Invent. Math. 42 (1977), 63-91.

[2] Beilinson, A.A. *Coherent sheaves on $\mathbb{P}_n$ and problems of linear algebra.* Funkts. Anal. Prilozh. 12 (1978), 68-69.

[3] Drézet, J.-M. *Fibrés exceptionnels et variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.* Journ. für die reine und angew. Math. 380 (1987), 14-58.

[4] Drézet, J.-M., Le Potier, J. *Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur $\mathbb{P}_2$.* Ann. Éc. Norm. Sup. 18 (1985), 193-244.

[5] Gieseker, D. *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface.* Ann. Math. 106 (1977), 45-60.

[6] Le Potier, J. *Fibrés stables de rang 2 sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.* Math. Ann. 241 (1979), 217-256.

[7] Maruyama, M. *Moduli of stables sheaves II.* J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978), 557-614.

[8] Verdier, J.-L. *Instantons. Les équations de Yang-Mills.* Astérisque 71-72 (1980), 105-134.

Notes : Ce texte reproduit l'article

Fibrés exceptionnels et suite spectrale de Beilinson généralisée sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Math. Ann. 275 (1986), 25-48.

avec quelques améliorations dans la rédaction et la bibliographie.

La construction donnée des fibrés exceptionnels a été ensuite étendue à $\mathbb{P}_n$ dans

Gorodentsev, A.L., Rudakov, A.N. *Exceptional vector bundles on projective spaces.* Duke Math. Journ. 54 (1987), 115-130.

Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France

E-mail address: drezet@math.jussieu.fr