Représentations p-Adiques d'un Corps Local

Pierre Colmez[1]

Abstract. We discuss applications of the theory of (φ, Γ)-modules to the study of p-adic representations of the Galois group of a local field and in particular to Iwasawa theory and explicit reciprocity laws.

Notations

On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$ et un système compatible $\varepsilon = (1, \varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)}, \dots)$ de racines de l'unité avec $\varepsilon^{(1)} \neq 1$ et $(\varepsilon^{(n+1)})^p = \varepsilon^{(n)}$ si $n \in \mathbf{N}$ de telle sorte que $\varepsilon^{(n)}$ est une racine primitive p^n-ième de l'unité si $n \in \mathbf{N}$. Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, on note $\mathscr{G}_K$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K)$ et $\mathscr{H}_K \subset \mathscr{G}_K$ le noyau du caractère cyclotomique χ. On pose aussi $\Gamma_K = \mathscr{G}_K/\mathscr{H}_K$ de telle sorte que Γ_K est le groupe de Galois de l'extension cyclotomique $K_\infty = \cup_{n \in \mathbf{N}} K_n$ de K, où l'on a noté K_n le corps $K(\varepsilon^{(n)})$ si $n \in \mathbf{N}$.

Un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action de $\mathscr{H}_K$ (resp. $\mathscr{G}_K$) est appelé une représentation p-adique de $\mathscr{H}_K$ (resp. $\mathscr{G}_K$). Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$ et $k \in \mathbf{Z}$, on note $V(k)$ la tordue de V par la puissance k-ième du caractère cyclotomique.

I Introduction

Soit G un groupe topologique (comme $\mathscr{H}_K$ ou $\mathscr{G}_K$). Pour mettre un peu d'ordre dans les représentations p-adiques de G, on dispose d'une stratégie, introduite et amplement utilisée par Fontaine, qui consiste à construire des $\mathbf{Q}_p$-algèbres topologiques munies d'une action continue de G et de structures additionnelles respectées par cette action. Chacune de ces algèbres B permet de découper dans l'ensemble des représentations p-adiques de G celles qui sont B-admissibles (i.e. qui deviennent triviales quand on étend les scalaires à B). Si V est une représentation B-admissible de $\mathscr{G}_K$, le B^G-module $(B \otimes V)^G$ est libre de rang $\dim_{\mathbf{Q}_p} V$ et est muni de toutes les structures additionnelles de B respectées par l'action de $\mathscr{G}_K$. Ceci permet d'associer aux représentations de G des invariants plus maniables (en général des objets provenant de l'algèbre linéaire) et, si l'anneau B est assez fin (i.e a suffisamment de structures respectées par G), de classifier les représentations B-admissibles en termes de ces invariants. Cette approche a l'avantage de ramener l'étude de toutes les représentations B-admissibles à celle de l'anneau B.

[1]Recherche financée par le C.N.R.S

Si on injecte dans cette stratégie l'idée, utilisée avec profit par Tate[2] et Sen[3], selon laquelle on a intérêt[4] à dévisser la situation en regardant $\mathscr{G}_K$ comme une extension de Γ_K par $\mathscr{H}_K$ et la théorie du corps des normes de Fontaine et Wintenberger[5] qui associe à l'extension K_∞/K un corps local $\mathbf{E}_K$ de caractéristique p, on aboutit à la théorie des (φ,Γ)-modules[6]. Le point crucial de cette théorie est que l'on peut reconstruire une représentation V de $\mathscr{G}_K$ à partir de son (φ,Γ_K)-module $D(V)$ qui est a priori un objet beaucoup plus maniable[7] et que l'on doit donc être capable de lire sur $D(V)$ toutes les propriétés de V. Dans ce texte, nous donnons quelques applications de ce principe et en particulier la construction d'une vaste généralisation de l'isomorphisme de Coleman et de l'exponentielle de Perrin-Riou qui devrait être utile pour l'étude des fonctions-L p-adiques des motifs.

II LES ANNEAUX $\widetilde{\mathbf{E}}$ ET $\widetilde{\mathbf{A}}^+$

Soit $\mathbf{C}_p$ le complété de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ pour la topologie p-adique. Soit $\widetilde{\mathbf{E}}$ l'ensemble des suites $x=(x^{(0)},\dots,x^{(n)},\dots)$ d'éléments de $\mathbf{C}_p$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p=x^{(n)}$. On munit $\widetilde{\mathbf{E}}$ des lois $+$ et $\cdot$ définies par $x+y=s$ où $s^{(n)}=\lim\limits_{m\to+\infty}(x^{(n+m)}+y^{(n+m)})^{p^m}$ et $x\cdot y=t$, avec $t^{(n)}=x^{(n)}y^{(n)}$, ce qui fait de $\widetilde{\mathbf{E}}$ un corps de caractéristique p algébriquement clos et complet pour la valuation $v_{\mathbf{E}}$ définie par $v_{\mathbf{E}}(x)=v_p(x^{(0)})$. On note $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{E}}$. Soit $\widetilde{\mathbf{A}}^+=W(\widetilde{\mathbf{E}}^+)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ [8]. Si $x\in\widetilde{\mathbf{E}}^+$, soit $[x]$ son représentant de Teichmüller dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+$. Notre système ε de racines de l'unité peut être vu comme un élément de $\widetilde{\mathbf{E}}$, ce qui nous permet d'introduire les éléments $\pi=[\varepsilon]-1$ et $\omega=\frac{\pi}{\varphi^{-1}(\pi)}=1+[\varepsilon^{\frac{1}{p}}]+\cdots+[\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}]$ de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$. Tous les anneaux que nous aurons à considérer dans ce texte s'obtiennent à partir de l'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ en introduisant plus ou moins de dénominateurs en p ou ω et en complétant [9].

---

[2] J. Tate, dans "*Proc. of a conf. on local fields*", Driebergen, 158-183, Springer 1967.

[3] S. Sen, Inv. Math. 62, 89-116, 1980.

[4] Si l'anneau B est assez gros, les représentations de $\mathscr{H}_K$ sont automatiquement B-admissibles et on est ramené à étudier l'anneau $B^{\mathscr{H}_K}$. C'est ce qu'a remarqué Sen dans le cas $B=\mathbf{C}_p$.

[5] J.-P. Wintenberger, Ann. Sci. E.N.S. 16, 59-89, 1983.

[6] J.-M. Fontaine, dans "*The Grothendieck Festschrift*", vol II, 249-309, Birkhaüser 1991.

[7] C'est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps local de dimension 2 muni de deux opérateurs semi-linéaires commutant entre eux

[8] L'anneau $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ est habituellement noté R ou $\mathscr{R}$ dans la théorie des périodes p-adiques et $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ est souvent noté $\mathbf{A}_{\rm inf}$

[9] L'application qui à $\sum_{n=0}^{+\infty}p^n[x_n]$ associe $\sum_{n=0}^{+\infty}p^nx_n^{(0)}$ est un morphisme surjectif d'anneaux de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ sur $\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$ dont le noyau est l'idéal engendré par ω qui est donc premier

III $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ ET LES REPRÉSENTATIONS DE DE RHAM

On note $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ le complété de $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}=\widetilde{\mathbf{A}}^{+}[\frac{1}{p}]$ pour la topologie ω-adique. Cet anneau peut aussi s'obtenir en complétant $\overline{\mathbf{Q}}_p$ pour une topologie adéquate[10]. L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}=\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}[\frac{1}{\omega}]$ est le corps des fractions de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ et est muni d'une filtration décroissante stable par l'action de Galois et définie par $\mathrm{Fil}^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}=\omega^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ si $i\in\mathbf{Z}$. La série $\log[\varepsilon]=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\pi^n$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ vers un élément que nous noterons t sur lequel $\sigma\in\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit via la formule $\sigma(t)=\chi(\sigma)t$ et qui peut être vu comme un analogue p-adique de $2i\pi$. Si $x\in K_\infty((t))$ et $n\in\mathbf{N}$, alors la suite $\frac{1}{p^m}\mathrm{Tr}_{K_m((t))/K_n((t))}(x)$ est stationnaire pour $m\geq n$ assez grand. On note $\mathrm{T}_{K,n}$ l'application de $K_\infty((t))$ dans $K_n((t))$ ainsi définie.

Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$, on note $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ le module $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes V)^{\mathscr{G}_K}$. C'est un K-espace vectoriel de dimension finie muni d'une filtration décroissante par des sous-K-espaces vectoriels. Une représentation $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$-admissible de $\mathscr{G}_K$ est dite "de de Rham". Les représentations de $\mathscr{H}_K$ sont toutes $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$-admissibles et les aplications $\mathrm{T}_{K,n}$ donnent une bonne idée de ce à quoi $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{H}_K}$ ressemble.

PROPOSITION 1. *$K_\infty((t))$ est dense dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{H}_K}$ et $\mathrm{T}_{K,n}$ s'étend par continuité en une application $\mathbf{Q}_p$-linéaire de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{H}_K}$ dans $K_n((t))$.*

IV $\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}$ ET LES REPRÉSENTATIONS CRISTALLINES

On note $\mathbf{A}_{\max}$ le complété de $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}[\frac{\omega}{p}]$ pour la topologie p-adique et $\mathbf{B}_{\max}^{+}=\mathbf{A}_{\max}[\frac{1}{p}]$. Comme l'idéal (p,ω) de $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}$ est stable par φ, l'action de φ s'étend par continuité à $\mathbf{A}_{\max}$ et $\mathbf{B}_{\max}^{+}$ mais n'est plus une bijection et on pose $\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^{+}=\cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathbf{B}_{\max}^{+})$. D'autre part, $\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^{+}$ s'identifie naturellement à un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ contenant t (on a $\varphi(t)=pt$) et on pose $\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}=\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^{+}[1/t]$.

Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$, on note $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ le module $(\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}\otimes V)^{\mathscr{G}_K}$. C'est un $K\cap\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action de φ et $K\otimes_{K\cap\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ s'identifie à un sous-K-espace vectoriel de $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ et donc est muni d'une filtration décroissante. Une représentation $\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}$-admissible de $\mathscr{G}_K$ est dite "cristalline". Une représentation de $\mathscr{H}_K$ est "presque" $\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}$-admissible et même "presque" $\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^{\varphi=1}$-admissible et la proposition suivante nous donne une description de $\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^{\mathscr{H}_K}$ dans le cas ou K est non ramifié sur $\mathbf{Q}_p$.

PROPOSITION 2. *Si K est non ramifié sur $\mathbf{Q}_p$ et $x\in(\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^{+})^{\mathscr{H}_K}$, il existe une unique distribution μ sur $\mathbf{Q}_p$ telle que l'on ait $x=\int_{\mathbf{Q}_p}[\varepsilon^x]\mu$. On dit que x est la transformée de Fourier de μ. D'autre part, si $n\geq 1$, alors $\mathrm{T}_{K,n}(x)$ est la transformée de Fourier de la restriction de μ à $p^{-n}\mathbf{Z}_p$.*

[10] On renvoie à *Périodes p-adiques* exposés II et III, Astérisque 223, 1994 pour les détails concernant cette section et la suivante.

V L'APPLICATION EXPONENTIELLE DE BLOCH-KATO

Les anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ sont reliés par la suite exacte fondamentale

$$0 \longrightarrow \mathbf{Q}_p \longrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^{\varphi=1} \longrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \longrightarrow 0.$$

Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et V une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$. Tensorisant la suite exacte fondamentale avec V et prenant la suite exacte de cohomologie associée, on en déduit une application de $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ dans $H^1(K,V)$ appelée exponentielle de Bloch-Kato[11] et notée $\exp_V$. Cette application se factorise à travers $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^0\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ et son image est incluse dans le noyau $H^1_e(K,V)$ de l'application naturelle de $H^1(K,V)$ dans $H^1(K,\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^{\varphi=1}\otimes V)$.

D'autre part, si V est de de Rham, l'image de $\exp_V$ est $H^1_e(K,V)$ tout entier. et si $k \gg 0$, alors $\exp_{V(k)}$ est un isomorphisme de $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V(k))$ sur $H^1(K,V(k))$. Par dualité, on définit[12] une application $\exp_V^* : H^1(K,V^*(1)) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V^*(1))$.

VI LES ANNEAUX E, A ET B

On note $\widetilde{\mathbf{A}}$ le complété de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{1}{p}]$ pour la topologie p-adique. L'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}$ est aussi l'anneau $W(\widetilde{\mathbf{E}})$ des vecteurs de Witt à coefficients dans $\widetilde{\mathbf{E}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}} = \widetilde{\mathbf{A}}[\frac{1}{p}]$ en est le corps des fractions. Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, les anneaux $\widetilde{\mathbf{E}}_K = \widetilde{\mathbf{E}}^{\mathscr{H}_K}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_K = \widetilde{\mathbf{A}}^{\mathscr{H}_K}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_K = \widetilde{\mathbf{B}}^{\mathscr{H}_K}$ ont des structures un peu désagréables, ce qui a amené Fontaine à introduire des sous-anneaux $\mathbf{E}$, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$[13] de $\widetilde{\mathbf{E}}$, $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}$ respectivement qui sont stables par φ et $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, on pose[14] $\mathbf{E}_K = \mathbf{E}^{\mathscr{H}_K}$, $\mathbf{A}_K = \mathbf{A}^{\mathscr{H}_K}$ et $\mathbf{B}_K = \mathbf{B}^{\mathscr{H}_K}$.

PROPOSITION 3. *(i)* $\mathbf{B}$ *est un corps valué complet dont* $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{A}}$ *est l'anneau des entiers et* $\mathbf{E}$ *est le corps résiduel. De plus* $\mathbf{E}$ *est la clôture séparable de* $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{F}_p((\varepsilon-1))$ *dans* $\widetilde{\mathbf{E}}$ *et* $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{E}_K) = \mathscr{H}_K$ *si* K *est une extension finie de* $\mathbf{Q}_p$.

(ii) $\mathbf{E}_K$ *est un corps local de caractéristique* p, $\widetilde{\mathbf{E}}_K$ *est le complété de sa clôture radicielle et* $\mathbf{B}_K$ *est un corps local de dimension* 2 *dont* $\mathbf{A}_K$ *est l'anneau des entiers et* $\mathbf{E}_K$ *le corps résiduel.*

Le lien entre $\varphi^{-n}(\mathbf{E}_K)$ et $\widetilde{\mathbf{E}}_K$ ou $\varphi^{-n}(\mathbf{B}_K)$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_K$ est à peu près le même que celui entre $K_n((t))$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{H}_K}$ comme le montre la proposition 7. En particulier, les applications $\mathrm{T}_{K,n} : \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{H}_K} \to K_n((t))$ de la proposition 1 ont des analogues[15] très utiles pour démontrer le théorème 8 par exemple.

---

[11] S. Bloch et K. Kato, dans "*The Grothendieck Fesschrift*", vol. I, 333-400, Birkhaüser 1990.

[12] Cette définition de l'exponentielle duale est un peu détournée, mais K. Kato (Springer Lect. Notes 1553, 50-163, 1993), en a trouvé une construction directe.

[13] Il les note respectivement $E^{\mathrm{sép}}$, $\mathscr{O}_{\widehat{\mathscr{E}^{\mathrm{nr}}}}$ et $\widehat{\mathscr{E}^{\mathrm{nr}}}$.

[14] $\mathbf{E}_K$ est le corps des normes de l'extension K_∞/K et la théorie du corps des normes est l'ingŕedient principal de la démonstration de la proposition 3.

[15] Du point de vue des distributions (cf. prop. 2), passer de $\widetilde{\mathbf{B}}$ à $\mathbf{B}$ revient à ne regarder que les distributions à support dans $\mathbf{Z}_p$ qui a le bon goût d'être compact.

VII Le (φ, Γ_K)-module associé à une représentation de $\mathscr{G}_K$

L'image de $H^1(\mathscr{H}_K, \mathrm{GL}_d(\mathbf{F}_p))$ dans $H^1(\mathscr{H}_K, \mathrm{GL}_d(\mathbf{E}))$ est triviale d'après le théorème de Hilbert 90. Un petit argument de dévissage permet d'en déduire que l'image de $H^1(\mathscr{H}_K, \mathrm{GL}_d(\mathbf{Z}_p))$ dans $H^1(\mathscr{H}_K, \mathrm{GL}_d(\mathbf{A}))$ est triviale puis que l'image de $H^1(\mathscr{H}_K, \mathrm{GL}_d(\mathbf{Q}_p))$ dans $H^1(\mathscr{H}_K, \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}))$ est triviale. On obtient donc la proposition suivante.

Proposition 4. *Toute représentation p-adique de $\mathscr{H}_K$ est $\mathbf{B}$-admissible.*

Cette proposition peut être grandement précisée grâce à l'introduction des notions de φ-module et de (φ, Γ)-module.

Définition 5. Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$.

(i) On appelle φ-module sur $\mathbf{B}_K$ tout $\mathbf{B}_K$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action semi-linéaire de φ.

(ii) On dit qu'un φ-module est étale ou de pente 0 s'il possède une base sur $\mathbf{B}_K$ dans laquelle la matrice de φ appartient à $\mathrm{GL}_d(\mathbf{A}_K)$.

(iii) On appelle (φ, Γ_K)-module sur $\mathbf{B}_K$ tout $\mathbf{B}_K$-espace vectoriel de dimension finie muni d'actions semi-linéaires de Γ_K et φ commutant entre elles. On dit qu'un (φ, Γ_K)-module est étale ou de pente 0 s'il l'est en tant que φ-module.

Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et V est une représentation p-adique de $\mathscr{H}_K$, on pose $D(V) = (\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}_K}$. L'action de φ sur $\mathbf{B}$ commutant à celle de $\mathscr{G}_K$, $D(V)$ est muni d'une action de φ. Si de plus V est la restriction à $\mathscr{H}_K$ d'une représentation de $\mathscr{G}_K$, le module $D(V)$ est muni d'une l'action résiduelle de $\mathscr{G}_K/\mathscr{H}_K = \Gamma_K$ qui commute à celle de φ.

Proposition 6. *L'application qui à V associe $D(V)$ est une équivalence*[16] *de catégories de la catégorie des représentations p-adiques de $\mathscr{H}_K$ (resp. $\mathscr{G}_K$) sur celle des φ-modules (resp. (φ, Γ)-modules) étales sur $\mathbf{B}_K$.*

VIII $\mathbf{B}^\dagger$ et les représentations surconvergentes

Si $n \in \mathbf{N}$, on note $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,n}$ le complété de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{p}{\omega^{p^n}}]$ pour la topologie p-adique et $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,n} = \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,n}[\frac{1}{p}]$. Ces anneaux s'identifient à des sous-anneaux de $\widetilde{\mathbf{B}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger = \cup_{n\in\mathbf{N}}\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,n}$ est un sous-corps de $\widetilde{\mathbf{B}}$ stable par φ. Si $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ tendant p-adiquement vers 0, alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^{-n}(a_k)\big(\frac{p}{\varphi^{-n}(\omega)^{p^n}}\big)^k$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, ce qui nous permet de définir un morphisme[17] d'anneaux φ^{-n} de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,n}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ qui est injectif et commute à l'action de Galois.

[16]Comme $\mathbf{B}^{\varphi=1} = \mathbf{Q}_p$, si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$, alors $(\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{B}_K} D(V))^{\varphi=1}$ est canoniquement isomorphe à V en tant que représentation de $\mathscr{G}_K$

[17]Ce morphisme permet de relier les invariants de V obtenus via la théorie des (φ, Γ)-modules à ceux obtenus via les anneaux des périodes p-adiques ; c'est ce qui justifie l'introduction de la notion de représentation surconvergente.

On définit un sous-corps $\mathbf{B}^\dagger$ de $\mathbf{B}$ stable par φ et $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et, si $n \in \mathbf{N}$, un sous-anneau $\mathbf{B}^{\dagger,n}$ de $\mathbf{B}$ stable par $\mathscr{G}_K$ en posant $\mathbf{B}^\dagger = \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ et $\mathbf{B}^{\dagger,n} = \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,n}$. Finalement, si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, on pose $\mathbf{B}_K^\dagger = (\mathbf{B}^\dagger)^{\mathscr{H}_K}$ et $\mathbf{B}_K^{\dagger,n} = (\mathbf{B}^{\dagger,n})^{\mathscr{H}_K}$. Les éléments de $\mathbf{B}_K^\dagger$ peuvent se décrire en termes de séries de Laurent surconvergentes et on a le résultat suivant.

PROPOSITION 7. *Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et si n est assez grand, alors $\varphi^{-n}(\mathbf{B}_K^{\dagger,n}) \subset K_n((t))$.*

Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{H}_K$, on pose $D^\dagger(V) = (\mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{H}_K}$ et $D^{\dagger,n}(V) = (\mathbf{B}^{\dagger,n} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{H}_K}$ si $n \in \mathbf{N}$. Une représentation de $\mathscr{H}_K$ qui est $\mathbf{B}^\dagger$-admissible est dite "surconvergente". On peut trouver des représentations de $\mathscr{H}_K$ qui ne sont pas surconvergentes (c'est même le cas général), mais on a le théorème suivant[18] qui montre que l'on n'a pas besoin d'introduire trop de dénominateurs (en π ou ω) pour décrire les représentations $\mathscr{G}_K$.

THÉORÈME 8. *Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, toute représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$ est surconvergente.*

IX $\mathbf{B}^+$ ET LES REPRÉSENTATIONS DE HAUTEUR FINIE

On pose $\widetilde{\mathbf{B}}^+ = \widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{1}{p}]$ et $\mathbf{B}^+ = \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^+$. Si V et une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$, on pose $D^+(V) = (\mathbf{B}^+ \otimes V)^{\mathscr{H}_K}$ et on dit[19] que V est "de hauteur finie" si on n'a pas besoin de dénominateurs pour la décrire, c'est-à-dire si $D^+(V)$ contient une base de $D(V)$ sur $\mathbf{B}_K$.

Un telle représentation est particulièrement sympathique et, dans le cas où K est non ramifié, on a le résultat suivant[20] qui avait été conjecturé par Fontaine.

THÉORÈME 9. *Si K est non ramifié[21] sur $\mathbf{Q}_p$, toute représentation cristalline de $\mathscr{G}_K$ est de hauteur finie.*

---

[18] F. Cherbonnier et P. Colmez, Représentations p-adiques surconvergentes, Inv. Math. Le point de départ de la démonstration est le résultat de Sen (*loc. cit.*) qui permet de montrer que toute représentation de $\mathscr{H}_K$ est $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$-admissible. Pour redescendre de $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ à $\mathbf{B}^\dagger$, on utilise les opérateurs $\mathrm{T}_{K,n}$ et une étude fine de l'action de Γ_K sur $\widetilde{\mathbf{B}}_K^\dagger$.

[19] N. Wach, Bull. de la S.M.F. 124, 375-400, 1996.

[20] P. Colmez, Représentations cristallines et représentations de hauteur finie, 1997. La démonstration qui se trouve dans cette prépublication est très tortueuse. Une démonstration plus directe fournissant une description de $D^+(V)$ serait la bienvenue ; cela a été fait par N. Wach (*loc. cit.*) dans le cas où la longueur de la filtration de $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est inférieure ou égale à $p-1$.

[21] Cette hypothèse peut être remplacée par K_∞ non ramifié sur $\mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})$, mais ne peut être totalement supprimée : il existe des représentations cristallines qui ne sont pas de hauteur finie. D'autre part, on dispose d'un critère simple portant sur l'action de Γ_K sur $D^+(V)$ pour qu'une représentation de hauteur finie soit cristalline (Wach (*loc. cit.*)).

X Modules d'Iwasawa associés à une représentation p-adique

Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$, on note $H^i_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ le groupe de cohomologie continue $H^i(\mathscr{G}_K, \mathbf{Z}_p[[\Gamma_K]] \otimes V)$. On peut aussi voir $\mathbf{Z}_p[[\Gamma_K]] \otimes V$ comme l'ensemble des mesures sur Γ_K à valeurs dans V et comme l'application $\mu \to \chi(x)^k\mu$ est un isomorphisme $\mathscr{G}_K$-équivariant de $\mathbf{Z}_p[[\Gamma_K]] \otimes V$ sur $\mathbf{Z}_p[[\Gamma_K]] \otimes V(k)$, on en déduit des isomorphismes $H^i_{\mathrm{Iw}}(K,V(k)) \cong H^i_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ et des applications[22] $\mu \to \int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^k\mu$ de $H^i_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ dans $H^i(K_n,V(k))$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$.

Les groupes $H^i_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ ont été étudiés en détail par Perrin-Riou[23]. On a en particulier le résultat suivant.

Proposition 10. *Soit V une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$.*

i) $H^i_{\mathrm{Iw}}(K,V) = 0$ si $i \neq 1,2$.

ii) $H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ est un $\mathbf{Q}_p \otimes \mathbf{Z}_p[[\Gamma_K]]$-module de type fini dont le sous-module de torsion est naturellement isomorphe à $V^{\mathscr{H}_K}$ et $H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)/V^{\mathscr{H}_K}$ est libre de rang $[K:\mathbf{Q}_p]\dim_{\mathbf{Q}_p} V$.

iii) $H^2_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ est isomorphe à $V(-1)^{\mathscr{H}_K}$ en tant que $\mathbf{Q}_p \otimes \mathbf{Z}_p[[\Gamma_K]]$-module ; en particulier, il est de torsion.

XI La machine à fonctions-L p-adiques

Afin de mieux comprendre la construction par Coates et Wiles[24] de la fonction-L p-adique d'une courbe elliptique à multiplication complexe à partir des unités elliptiques, Coleman[25] a montré comment associer à tout $u \in \varprojlim \mathscr{O}^*_{K_n}$ une mesure λ_u sur $\mathbf{Z}_p^*$ dans le cas où K est non ramifié sur $\mathbf{Q}_p$. L'application qui à u associe λ_u est presque un isomorphisme de $\mathbf{Z}_p[[\Gamma_K]]$-modules et est appelé l'isomorphisme de Coleman. Si on prend pour u le système des unités cyclotomiques, la mesure λ_u que l'on obtient donne la fonction zêta de Kubota-Leopoldt. Quand on a la chance de disposer d'une telle construction pour une fonction-L p-adique, il y a toujours des retombées arithmétiques spectaculaires et il semble donc intéressant d'essayer de généraliser la construction de Coleman à d'autres représentations que $\mathbf{Q}_p(1)$[26]. Cela a été fait par Perrin-Riou[27] dans le cas d'une représentation cristalline d'une extension non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$, ce qui lui a permis[28] de donner une définition (conjecturale) de la fonction-L p-adique d'un motif ayant bonne réduction en p. Sa construction repose sur une interpolation p-adique des exponentielles de Bloch-Kato

[22] Utilisant ces applications, on montre que $H^i_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ est isomorphe à $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \varprojlim H^i(K_n,T)$, où T est un $\mathbf{Z}_p$-réseau de V stable par $\mathscr{G}_K$ et la limite projective est prise relativement aux applications de corestriction. On retombe donc sur la définition usuelle des modules d'Iwasawa.

[23] B. Perrin-Riou, Inv. Math. 115, 81-149, 1994

[24] J. Coates et A. Wiles, J. Australian Math. Soc., A 26, 1-25, 1978

[25] R. Coleman, Inv. Math. 53, 91-116, 1979

[26] La théorie de Kummer nous fournit une application δ de $\varprojlim \mathscr{O}^*_{K_n}$ dans $H^1_{\mathrm{Iw}}(K,\mathbf{Q}_p(1))$

[27] *loc. cit.*

[28] B. Perrin-Riou, Astérisque 229, 1995

pour les représentations $V(k)$ avec $k \in \mathbf{Z}$ et fournit une application “exponentielle” qui, dans le cas de $\mathbf{Q}_p(1)$ donne l'inverse de l'isomorphisme de Coleman. Dans la suite de ce texte, nous allons présenter deux généralisations de sa construction.

XII L'application logarithme

Soit V une représentation de de Rham telle que $(\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^{\varphi=1} \otimes V)^{\mathscr{G}_{K_n}} = \{0\}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$[29]. Notons $H^1_{\mathrm{Iw},e}(K,V)$ le sous-ensemble des éléments μ de $H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ tels que $\int_{\Gamma_{K_n}} \mu \in H^1_e(K_n,V)$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. L'ensemble $H^1_{\mathrm{Iw},e}(K,V)$ peut très bien être réduit à 0, mais il existe $k(V) \in \mathbf{Z}$ tel que l'on ait $H^1_{\mathrm{Iw},e}(K,V) = H^1_{\mathrm{Iw}}(K_n, V(k))$ si $k \geq k(V)$.

Si $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw},e}(K,V)$ et $\tau \to \mu_\tau$ est un cocycle continu représentant μ, il existe, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, un élément $c_n \in \mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^{\varphi=1} \otimes V$ tel que l'on ait $(1-\tau)c_n = \int_{\Gamma_{K_n}} \mu_\tau$ quel que soit $\tau \in \mathscr{G}_{K_n}$. L'élément c_n est bien déterminé grâce à l'hypothèse faite sur V.

THÉORÈME 11. *Si $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw},e}(K,V)$, alors la suite de terme général $p^n c_n$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^{\varphi=1} \otimes V$ vers un élément de $(\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^{\varphi=1} \otimes V)^{\mathscr{H}_K}$ qui ne dépend pas du choix du cocycle $\tau \to \mu_\tau$; il est noté* $\mathrm{Log}(\mu)$.

Cette application logarithme[30] est une généralisation de l'isomorphisme de Coleman et, dans le cas où V est cristalline, est, à normalisation près, un inverse de l'application exponentielle introduite par Perrin-Riou. Plus précisément, utilisant la transformée de Fourier des distributions et les résultats de Perrin-Riou, on démontre le résultat suivant.

THÉORÈME 12. *Soit K une extension finie non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$.*

(i) Si V est une représentation cristalline de $\mathscr{G}_K$ telle que $\mathrm{Fil}^1\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \{0\}$ *et $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw},e}(K,V)$, alors il existe une (unique) distribution*[31] *$\lambda_V(\mu)$ sur $\mathbf{Q}_p$ à valeurs dans $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ dont $\mathrm{Log}_V(\mu)$ est la transformée de Fourier et si k est un entier suffisamment grand, alors*

$$\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}\Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*} \frac{k!}{(-tx)^k}\lambda_V(\mu)\Big) = \exp^{-1}_{V(k)}\Big(\int_{\Gamma_K} \chi(x)^k \mu\Big)$$

(ii) Si $u \in \varprojlim \mathscr{O}^*_{K_n}$, la mesure λ_u que l'on obtient via l'isomorphisme de Coleman est la restriction à $\mathbf{Z}_p^*$ de $\lambda_{\mathbf{Q}_p(1)}(\delta(u))$.

[29] Cette hypothèse n'est là que pour simplifier les énoncés qui suivent et devient automatique si on remplace V par $V(k)$ sauf pour un nombre fini de $k \in \mathbf{Z}$.

[30] P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, Ann. of Math.

[31] L'existence de cette distribution traduit une propriété de continuité p-adique de l'application $k \to \exp_{V(k)}$. L'idée qu'une telle continuité devait exister a d'ailleurs été le point de départ de Perrin-Riou.

XIII La loi de réciprocité explicite de Perrin-Riou

Revenons au cas où K est une extension finie quelconque de $\mathbf{Q}_p$ et V une représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$. Si $n \in \mathbf{N}$, on étend l'application $\mathrm{T}_{K,n}$ par linéarité en une application de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)^{\mathscr{H}_K} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{H}_K} \otimes \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ dans $K_n((t)) \otimes \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. Un élément x de $K_n((t)) \otimes \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{k\in\mathbf{Z}} \partial_k(x)t^k$ avec $\partial_k(x) \in K_n \otimes \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. Tout cela nous permet de définir pour chaque $k \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$, un morphisme $\mathrm{CW}_{k,n}$ de $H^1_{\mathrm{Iw},e}(K,V)$ dans $K_n \otimes D_{\mathrm{dR}}(V)$ en posant

$$\mathrm{CW}_{k,n}(\mu) = \partial_k(\mathrm{T}_{K,n}(\mathrm{Log}_V(\mu))).$$

Ces morphismes sont des généralisations des morphismes de Coates-Wiles et le théorème suivant montre qu'ils sont liés aux exponentielles de Bloch-Kato.

Théorème 13. *Si $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw},e}(K,V)$, si $n \in \mathbf{N}$ et si $k \in \mathbf{Z}$, alors*

$$\mathrm{CW}_{k,n}(\mu) = -\exp^*_{V^*(1+k)}\Big(\int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-k}\mu\Big).$$

Si on suppose K non ramifié sur $\mathbf{Q}_p$ et V cristalline, on peut retraduire ce théorème en termes de distributions et on obtient la proposition suivante qui est une des formes équivalentes de la loi de réciprocité conjecturée par Perrin-Riou[32].

Proposition 14. *Sous les hypothèses du théorème 12, si $k \gg 0$, alors*

$$\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}\Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*} \frac{(tx)^k}{(k-1)!}\lambda_V(\mu)\Big) = -\exp^*_{V^*(1+k)}\Big(\int_{\Gamma_K} \chi(x)^{-k}\mu\Big)$$

XIV (φ,Γ)-modules et cohomologie galoisienne

Le corps $\mathbf{B}$ est une extension de degré p de $\varphi(\mathbf{B})$, (totalement ramifiée car l'extension résiduelle est radicielle). Ceci nous permet de définir une application $\psi : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ par la formule $\psi(x) = \varphi^{-1}(\mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\varphi(\mathbf{B})}(x))$. Ceci fait de ψ un inverse à gauche de φ qui commute à l'action de $\mathscr{G}_K$.

Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et Δ_K le sous-groupe de torsion de Γ_K de telle sorte que $\Gamma'_K = \Gamma_K/\Delta_K$ est isomorphe à $\mathbf{Z}_p$. Soit γ un générateur de Γ'_K. Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$, soit $D'(V) = D(V)^{\Delta_K}$. Considérons le complexe

$$0 \longrightarrow D'(V) \longrightarrow D'(V) \oplus D'(V) \longrightarrow D'(V) \longrightarrow 0,$$

où les applications de $D'(V)$ dans $D'(V) \oplus D'(V)$ et de $D'(V) \oplus D'(V)$ dans $D'(V)$ sont respectivement définies par $x \to ((\psi-1)x, (\gamma-1)x)$ et $(a,b) \to (\gamma-1)a - (\psi-1)b$.

[32] Cette loi est une généralisation de celle de Bloch-Kato pour $\mathbf{Q}_p(r)$; une démonstration complètement différente a été obtenue par Kato, Kurihara et Tsuji.

On a le résultat suivant[33]

THÉORÈME 15. *Si $i \in \mathbf{N}$, le i-ème groupe de cohomologie du complexe ci-dessus s'identifie fonctoriellement au groupe de cohomologie galoisienne $H^i(K,V)$.*

XV (φ,Γ)-MODULES ET THÉORIE D'IWASAWA

Les résultats mentionnés ci-dessus mènent naturellement[34] à une description des groupes $H^i_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ en termes de $D(V)$.

THÉORÈME 16. *Soit V une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$.*

i) $H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ s'identifie fonctoriellement à $D(V)^{\psi=1}$ via une application Exp^*.

ii) $H^2_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ s'identifie fonctoriellement à $\frac{D(V)}{\psi-1}$.

Remarquons que l'on n'a fait aucune hypothèse restrictive sur V ou sur K pour définir Exp^*. Dans le cas où K est non ramifié sur $\mathbf{Q}_p$ et $V=\mathbf{Q}_p(1)$, un petit calcul montre que $\mathrm{Exp}^*(\delta(u))$ est la transformée de Fourier de la mesure $x\lambda_u$, ce qui permet de voir l'application Exp^* comme une vaste généralisation de l'isomorphisme de Coleman.

On peut utiliser le fait que toute représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$ est surconvergente pour relier[35], dans le cas des représentations de de Rham, les applications Exp^* et Log et retrouver les homomorphismes de Coates-Wiles généralisés via la théorie des (φ,Γ)-modules. De manière précise, on a la loi de réciprocité explicite suivante que l'on pourra comparer avec le théorème 13.

THÉORÈME 17. *Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et V une représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$, il existe $n(V) \in \mathbf{N}$ tel que si $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)$, alors $\mathrm{Exp}^*(\mu) \in D^{\dagger,n(V)}(V)$ et si $n \geq n(V)$, on a l'égalité suivante dans $K_n((t)) \otimes \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$*

$$p^{-n}\varphi^{-n}\Big(\mathrm{Exp}^*(\mu)\Big) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \exp^*_{V^*(1+k)}\Big(\int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-k}\mu\Big).$$

D.M.I., École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France
Institut de Mathématiques, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France

[33]L.Herr, *Cohomologie Galoisienne des corps p-adiques*, thèse de l'université d'Orsay, 1995. Le point de départ de la démonstration est la suite exacte $0 \to \mathbf{Q}_p \to \mathbf{B} \xrightarrow{1-\varphi} \mathbf{B} \to 0$. La thèse de Herr contient en outre une démonstration du théorème de dualité locale via la théorie des (φ,Γ)-modules dont l'ingrédient principal est une description de l'isomorphisme canonique $H^2(K,\mathbf{Q}_p(1)) \cong \mathbf{Q}_p$ grâce à une application résidu.

[34]Il s'agit d'un résultat non publié de J.-M. Fontaine ; on en trouvera une démonstration dans F. Cherbonnier et P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, Journal de l'A.M.S.

[35]Cette comparaison est d'ailleurs le point de départ de la démonstration du théorème 9. D. Benois a entrepris le chemin inverse et obtenu (On Iwasawa theory of crystalline representations, preprint 1998) une démonstration de la loi de réciprocité explicite de Perrin-Riou via la théorie des (φ,Γ)-modules dans le cas des représentations cristallines de hauteur finie.