Analyse Complexe et Géométrie

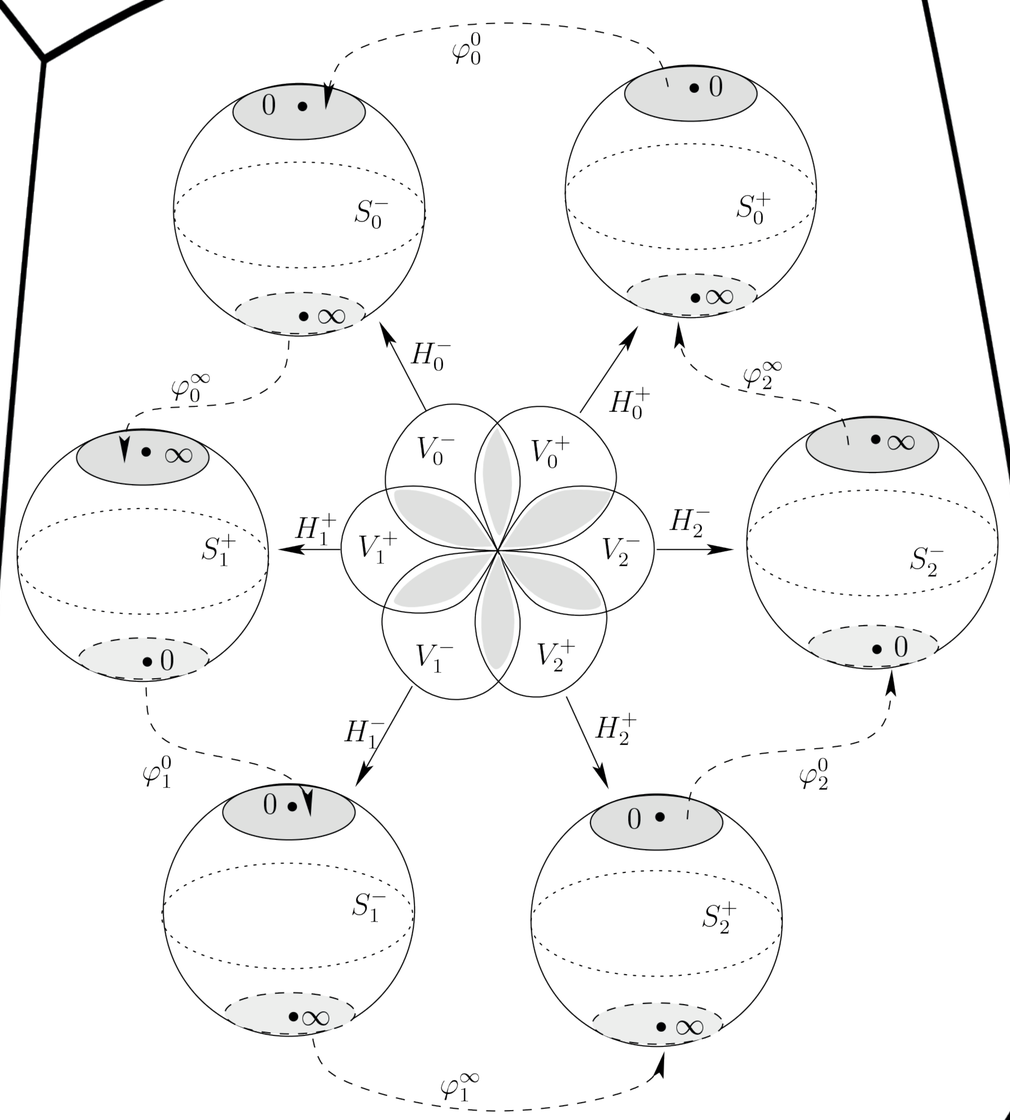
Depuis 80 ans, nos connaissances bâtissent de nouveaux mondes

Le Grand $\bar{\partial}$

L'opérateur différentiel $\bar{\partial}$ est emblématique de l'analyse complexe: son annulation exprime le caractère holomorphe. A partir des années 1950 il devient l'objet d'étude principal en interagissant avec la théorie des faisceaux (Dolbeault) et l'analyse fonctionnelle (Hörmander).

En 1952, Pierre Lelong créa, à l'Institut Henri Poincaré le séminaire d'Analyse qui joua un rôle déterminant et constitua le point de départ de l'Equipe d'Analyse Complexe, créée par le CNRS en 1974. Il fut fréquenté par Henri Cartan, Laurent Schwartz et régulièrement par Paul Malliavin, Michel Hervé, Pierre Dolbeault et Henri Skoda qui, à partir de 1976 en partagea la direction avec Pierre Lelong.
En 1977, Jean-Pierre Demailly y exposa ses premiers résultats, puis en 1991, Gennadi Henkin et Jean-Marie Trépreau s'associèrent à la direction du séminaire. A partir de 2006, avec l'arrivée d'Olivier Biquard, de Tien Cuong Dinh et de Xiaonan Ma, l'équipe s'est orientée davantage vers la géométrie différentielle, tout en conservant une importante composante d'analyse complexe. Depuis, elle s'est enrichie de nombreux nouveaux membres et nouvelles thématiques:

- Variétés Kähleriennes
- Feuilletages holomorphes
- Structures géométriques
- Flot de Ricci
- Relativité générale
- Théorie de Teichmüller
- Théorie des noeuds
- Dynamique topologique
- Théorie géométrique des groupes



Le chapelet de sphères donne la classification analytique des germes de difféomorphismes holomorphes tangents à l'identité à l'ordre p : dans le dessin p = 3.

Figure 8 p.53 dans Pseudo-groupe d'une singularité de feuilletage holomorphe en dimension deux par Franck Loray.

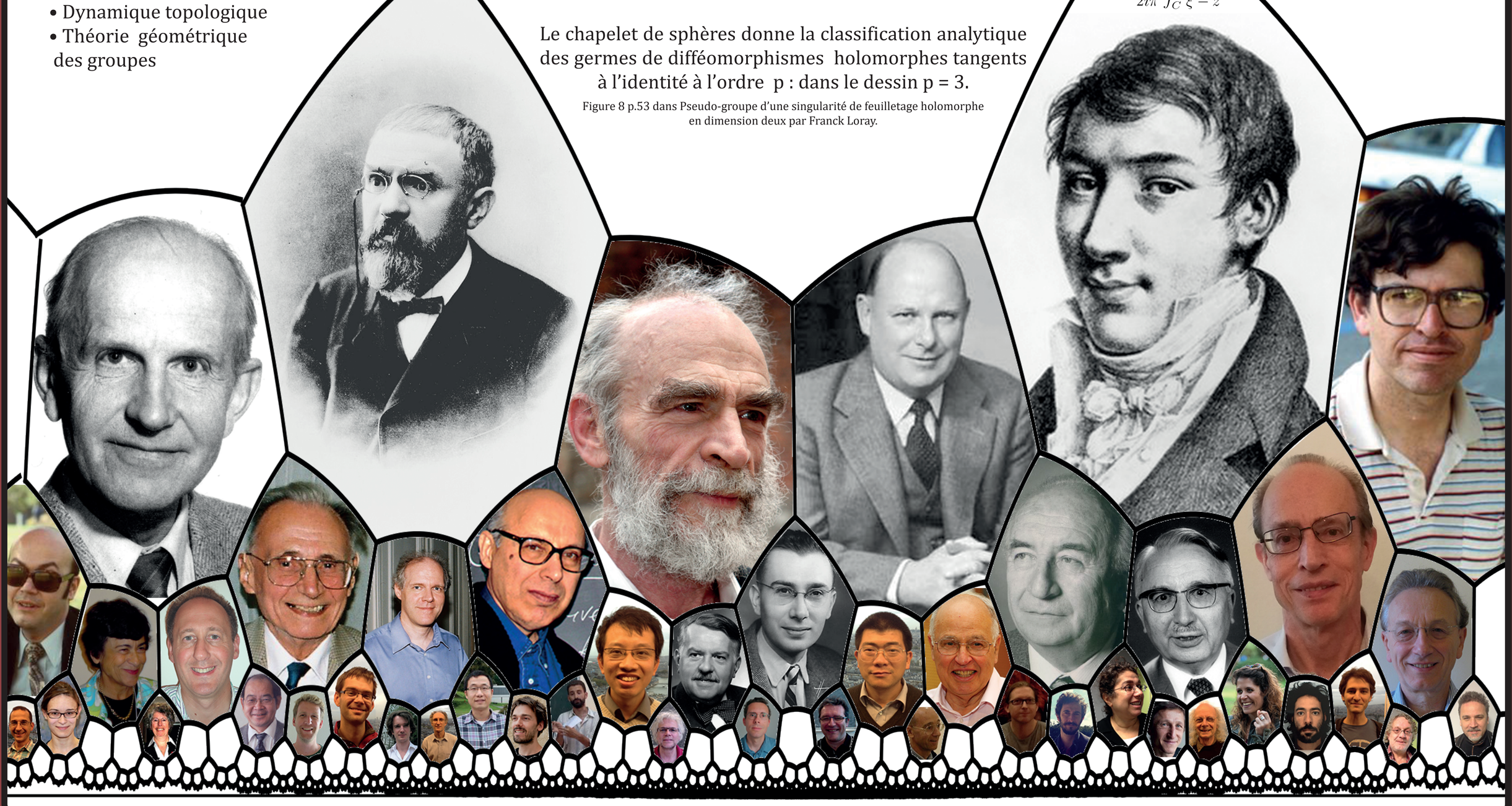
Quelles sphères S^n ont une structure complexe?

Une sphère de dimension n est l'ensemble des points à distance 1 de l'origine dans un espace à n+1 dimensions. La munir d'une structure complexe revient à la recouvrir par des domaines paramétrés par k variables complexes de sorte que ces paramétrages soient compatibles entre eux, c'est-à-dire holomorphes. On a en particulier n=2k.

La sphère S^2 représentée six fois dans la figure de gauche peut se paramétrer avec un nombre complexe, sauf pour un point dit à l'infini que l'on peut ramener à l'origine par une inversion. Elle a donc une structure complexe.

Si S^{2k} est muni d'une structure complexe, son fibré tangent holomorphe τ vérifie que $ck(\tau)= \chi(S^{2k})=2$ est divisible par (k-1)! Il ne reste comme possibilité que k=1,2,3. Il n'est pas facile de montrer que S^4 n'a pas de structure complexe, quant à S^6, le débat est encore ouvert!

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi.$$



25/09/2019