NOTICE SUR LES TRAVAUX SCIENTIFIQUES

de

Gustave CHOQUET

Septembre 1974.

Table des Matières.

Curriculum vitae	page 1.
Présentation	3.
I - Préhistoires	5.
II - Génèse de quelques travaux	12.
a. Ma thèse	13.
b. Etude des capacités	19.
c. Convexes compacts, cônes faiblement complets et représentation intégrale.	28.
III - Potentiel	38.
IV - Analyse fonctionnelle linéaire	48.
V - Fonctions de variables réelles	56.
VI - Travaux variés	66.
VII - Analyse de quelques livres	68.
Point final	69.
Liste des Travaux	70.
Livres.	81.
Pedagogie et réflexions sur les Mathématiques	82.

Curriculum vitae de Gustave CHOQUET

1915 (1er Mars)	Né à Solesmes (Nord)
1934-38	Elève à l'Ecole Normale Supérieure
1937	Agrégé de Mathématiques
1938-39	Boursier Jane Eliza Proctor à Princeton (U.S.A)
1941-46	Boursier du C.N.R.S.
1946	Docteur ès Sciences Mathématiques (Paris)
1946-47	Professeur à l'Institut Français de Pologne
1947-49	Maitre de conférences à l'Université de Grenoble
depuis 1949	Maitre de conférences, puis professeur à l'Université de Paris (actuellement à Paris VI).
1960-69	Maitre de conférences, puis professeur à l'Ecole Polytechnique.

Invitations de longue durée à l'étranger

1953	Kansas University (Lawrence)
1955	The Institute for Advanced study, Princeton
1963	Cornell University
1964	University of Washington (Seattle) comme Walker Ames lecturer
1968	Princeton University
1969	Angleterre (Hardy lectureship)
1971	University of Maryland
1974	University of California (Berkeley)
1975	University of Western Australia et autres universités australiennes

Prix de l'Académie

1945	Prix Houllevigne
1951	Prix Dickson
1956	Prix Carrière
1968	Grand prix des sciences mathématiques

1966	Chevalier de la Légion d'honneur
1950-62	Président de la Commission Internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des Mathématiques.

PRESENTATION

Mon oeuvre mathématique s'est développée dans des directions variées : Topologie, mesure, étude différentielle des ensembles, théorie du potentiel, analyse fonctionnelle.

La plupart de mes travaux ont pourtant un caractère commun : Une vision directe et géométrique des problèmes, la recherche des raisons profondes des résultats obtenus, et une prédilection pour les problèmes-clefs dont la solution ouvre la porte d'un vaste domaine de l'Analyse.

Il ne s'agit pas là d'un goût obstiné de la difficulté en elle-même; je ne renie certes pas le qualificatif d'Analyste fin qu'on m'a parfois attribué; mais j'ai pris de plus en plus conscience que je ne recherchais les problèmes fins et difficiles que lorsque je les devinais susceptibles d'être une occasion de créer des outils nouveaux, simples et efficaces ; et dès leur création j'appliquais mon effort à leur développement.

En particulier mes recherches d'Analyse fonctionnelle ont été poursuivies avec ce souci constant de simplicité et d'efficacité; c'est sans doute cette préoccupation, jointe au fait que ces recherches avaient en général leur origine dans une théorie en contact avec de nombreuses branches de la physique, qui leur ont fait trouver tout naturellement leur emploi en physique théorique, en calcul des probabilités et en statistique.

Mon goût d'une compréhension intuitive globale des objets de mon étude, a beaucoup réagi sur mes conceptions pédagogiques. Je pense qu'à tous les niveaux un enseignement scientifique trop épuré ne mérite plus, en fait, le nom d'enseignement. Or à tous les niveaux notre enseignement met maintenant trop l'accent sur l'importance de la rigueur et de la limpidité du cours professoral. De loin plus important me semble être l'expérimentation du concret par l'élève lui-même.

Les mathématiques doivent rester, pendant toute la durée des premières classes des lycées, les servantes des sciences d'observation; et la géométrie doit apparaître comme une mathématisation progressive du monde réel, celà n'excluant pas, bien sûr, son algébrisation, progressive elle aussi.

Les "préhistoires" que j'ai placées avant l'analyse de mes travaux feront mieux comprendre, je l'espère, mon point de vue sur ces questions, vitales pour la recherche mathématique.

I - Préhistoires

Aussi loin que je remonte dans le passé, je me revois traduisant mes problèmes mathématiques en petits dessins géométriques: Mon maitre d'école primaire, M. Flamant, nous avait recommandé - ou imposé -, d'aborder ainsi tous les problèmes de vente, achat, partage; je n'eus aucun mal à lui obéir, et maintenant encore je donne des conseils semblables aux étudiants que je vois patauger devant un problème d'Analyse.

Au lycée mon professeur M. Mas, qui avait lui aussi une vision géométrique des choses, encouragea cette habitude, et je finis par traduire en schémas géométriques tous les problèmes qui m'étaient proposés; les trinômes dépendant d'un paramètre n'y échappaient pas.

L'algèbre eut un instant sa petite chance : Un camarade m'avait, en cachette, prêté un livre d'Analyse de l'Ecole Universelle où la dérivation était introduite, puis appliquée à l'étude des courbes planes. Ces dernières me tentaient beaucoup; les dessins définissaient fort bien leurs tangentes, points de rebroussement, courbure, et les formules données permettaient de les déterminer; mais l'habitude que j'avais déjà prise de commencer les livres par la fin et de les lire en zigzag m'avait fait rater la définition des symboles y' et y". J'entrepris donc de reconstituer, grâce aux exemples traités, le formalisme du calcul; c'est ainsi que très vite je pus me délecter à calculer formellement les dérivées des polynômes et fractions rationnelles. C'était un bon début dans l'algèbre; malheureusement, assez vite je compris ce qu'était une fonction continue; les charmes de l'Analyse étaient décidément trop grands; je basculai définitivement de son côté.

C'est la géométrie qui, au lycée, décida de ma vision future de l'Analyse; elle me donna un sens intuitif de l'axiomatisation, et une facilité à "voir dans l'espace". J'acquis seul, et très tôt, le sens de l'axiomatisation : Lorsque, dans un problème de géométrie, d'algèbre ou d'analyse, j'avais dégagé un schéma géométrique interprétant les données, je me livrais à un travail d'épuration; au lieu de surcharger la figure par des constructions auxiliaires avec l'espoir que l'une d'elles traduirait la relation cherchée, je cherchais plutôt à dégager les éléments qui, dans ce schéma, étaient vraiment essentiels pour atteindre le résultat demandé. Si le schéma initial était trop complexe, j'en étudiais séparément les composantes.

J'étais donc bien préparé à accueillir avec enthousiasme, quand je les découvris chez Descartes, ses "Règles pour la direction de l'esprit". Je m'aperçus en particulier que j'appliquais depuis longtemps deux des préceptes qu'il dégage dans le "Discours de la Méthode" :

"Diviser chacune des difficultés... en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre".

"Faire partout des dénombrements si entiers, et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre".

Dans les classes de Première et de Math. Elém., je devins un fanatique des problèmes de géométrie; j'étudiai des méthodes régulières pour les résoudre, seul ou avec l'aide de quelques livres maintenant bien oubliés :

"Examen des différentes méthodes employées pour résoudre des problèmes de géométrie", par G. Lamé, et un autre livre de titre analogue par G. Lemaire.

Je pris l'habitude de me poser et de résoudre mentalement, sans l'aide d'aucun papier, des problèmes assez complexes de géométrie et plus particulièrement de géométrie dans l'espace. Je suis persuadé que cette gymnastique mentale renforça beaucoup mon intuition géométrique et mon aptitude à dégager les structures essentielles dans des situations en apparence complexes.

Un fort courant pédagogique tend actuellement à remplacer dans les lycées la géométrie par un peu d'algèbre linéaire, sous le prétexte que celle-ci est une voie royale qui permet de retrouver sans effort l'essentiel des propriétés géométriques. C'est là un argument utilitaire; il néglige le rôle formateur des raisonnements géométriques et l'importance de l'intuition géométrique. Celle-ci ne peut se développer et se fortifier que par le contact avec des objets géométriques simples.

Accepter cette substitution de l'algèbre à la géométrie équivaudrait, pour un alpiniste, à considérer comme alpinisme la conquête de l'Everest en hélicoptère.

Mon goût pour la recherche des causalités, et pour les situations géométriques devait , au cours de ma carrière, me conduire progressivement vers ce qu'on appelle maintenant l'Analyse fonctionnelle. Cette locution n'a pas le même sens dans tous les pays, ni pour tous les mathématiciens d'un même pays; le sens qu'elle a pris pour moi a été fortement influencé par mon attirance pour les problèmes concrets difficiles, dont la solution semble devoir apporter des outils nouveaux ainsi qu'une lumière nouvelle dans un champ assez vaste de l'Analyse. J'en donnerai plus tard plusieurs exemples.

Mais ce n'est que progressivement que je pris conscience de ce goût pour l'Analyse fonctionnelle, et les premières années de mes recherches furent plutôt consacrées à une étude à la fois topologique, différentielle et métrique des sous-ensembles des espaces euclidiens.

Cette première orientation fut la résultante de l'étude de plusieurs ouvrages :

Après la classe de Math. Elém., un 1er prix au Concours Général m'avait laissé riche de la collection des Darboux, et des "Leçons sur la théorie des fonctions" de Borel. J'absorbai les Darboux par petites doses, et je me plongeai à corps perdu dans le livre de Borel, dans lequel je me sentis aussitôt comme chez moi. Un an plus tard, après la Taupe, sur le conseil de Chenevier, j'étudiai les deux livres d'Analyse de Tannery; j'y remarquai surtout l'intégrale de Riemann, le théorème de Jordan, et les fonctions à variation bornée.

A l'Ecole Normale, le cours de Valiron sur les fonctions analytiques me laissa des souvenirs fort utiles par la suite, mais les inégalités qu'il utilisait me semblaient fort épineuses et je n'eus pas le courage de les absorber. Le mode de pensée et d'exposition de Georges Darmois, fortement basé sur l'intuition géométrique, me séduisit, et les quelques travaux que je fis ensuite sur le calcul des variations ont eu très probablement leur germe dans ses leçons sur les courbes et surfaces.

Je trouvai fort élégantes les leçons de géométrie différentielle au sens de Sophus Lie que nous donnait René Garnier; ces leçons, celles de Darmois, et le livre d'Elie Cartan sur la géométrie riemannienne que j'étudiais alors, auraient pu éveiller pour de bon chez moi une vocation de géomètre différentiel; mais déjà j'avais découvert à la bibliothèque de l'Ecole le livre de Cantor sur le transfini, et les Leçons de Baire sur les fonctions discontinues. Ce fut une révélation; je devins amoureux de ces deux livres, et j'en fis quelques exposés oraux devant mes camarades de promotion.

Après l'agrégation, en 1937, Georges Darmois me conseilla d'étudier d'abord le gros livre d'Analyse d'Hobson, et les "Vorlesungen über reelle functionen" de Carathéodory, et d'aller voir ensuite Arnaud Denjoy.

L'étude de ces deux livres fut la grande joie de mes vacances; j'appris beaucoup dans Hobson, mais je me sentis plus à l'aise dans Carathéodory; j'y découvris sa belle théorie de la mesure, et surtout des notions de base de topologie générale. Très vite je commençai à me poser des questions qui, essentiellement, gravitaient autour de l'étude des ensembles fermés du plan et de l'espace; mon but lointain était de savoir comment étaient faits tous ces ensembles : But ambitieux, et bien mal défini, mais fort stimulant.

Ce genre d'ambition ne m'a d'ailleurs plus quitté; quand j'étudie une classe d'êtres, je cherche à les connaître tous, et rien ne me hérisse plus que les travaux sur des structures définies axiomatiquement dont l'auteur, bien loin de chercher à construire tous les objets de cette structure, ignore même si elle possède quelques objets non triviaux.

En octobre 1937, riche de quelques théorèmes, et d'un grand désir de travailler, je suivis le conseil de Georges Darmois, et je demandai à Arnaud Denjoy de me recevoir. Ce fut mon premier contact personnel avec celui dont la pensée devait imprégner l'ensemble de mes recherches mathématiques. A aucun instant je ne songeai à lui demander une direction de recherche, et il n'essaya jamais de m'en imposer une; mais j'étudiai ses travaux, écrits dans une langue admirable; il me parla de ses recherches en cours et s'intéressa aux miennes; et surtout mes contacts avec lui, assez rares d'abord, de plus en plus fréquents ensuite, me révélèrent un esprit d'une stature exceptionnelle et d'une grande droiture.

Mon intuition mathématique s'accordait à la sienne, aussi nous comprenions nous à mi-mot. Et puis, j'aimais comme lui les problèmes difficiles.

Lors de ma première visite, je lui parlai de mes premiers résultats; il m'apprit que quelques uns d'entre eux n'étaient pas nouveaux; mais sur ses conseils, je résumai le reste en trois Notes qu'Elie Cartan accepta de présenter à l'Académie; la première, présentée le 17 janvier 1938, avait pour titre "Etude des homéomorphies planes", la seconde s'appelait "Réseaux de routes".

L'année suivante, j'obtins la bourse Jane Eliza Proctor pour Princeton; le séjour prévu était de deux ans; la guerre le réduisit à un an.

J'y appris un peu de logique avec Alonzo Church; c'était l'époque où Gödel annonçait plusieurs de ses grands théorèmes, où l'on cherchait à définir ordinaux et nombres constructibles, et où la "machine de Turing" commençait à faire parler d'elle. Ainsi s'éveilla chez moi un intérêt durable pour la logique.

Par contre je ratai complétement mon initiation à la topologie algébrique: Lefschetz, remarquable mathématicien, n'était pas pour les débutants l'initiateur idéal, car par crainte de voler trop haut, il avait adopté un rythme fort lent qui l'empêchait d'en arriver aux théorèmes substantiels.

Mais je trouvai à Princeton, avec des camarades sympathiques, un cadre splendide pour mon travail personnel, et une excellente base de découverte de l'Amérique.

De 1941 à 1946, le C.N.R.S me permit de consacrer l'essentiel de mon temps à la recherche. La plus grande partie de mes résultats fut simplement publiée sous forme de Notes aux Comptes Rendus que, malheureusement, je ne pris jamais la peine de dévèlopper. Je parvins cependant dans cette période à publier 8 mémoires, dont ma thèse soutenue en mars 1946 sous la présidence du doyen Paul Montel.

Ces travaux avaient des directions fort variées : Topologie et métrique des ensembles euclidiens, théorie de la mesure, représentation conforme, théorie du potentiel, géométrie infinitésimale directe, calcul des variations, étude d'applications différentiables, équations différentielles, courbes convexes, théorie des graphes.

Leurs sources d'inspiration elles aussi étaient très variées; mais, en dehors de leur intérêt intrinsèque, ces travaux eurent surtout à mes yeux le mérite de développer mon intuition et de me faire connaître, de façon quasiment tangible, des êtres mathématiques fort variés.

A cette époque, j'avais choisi comme instrument de culture, la lecture de la collection des Fundamenta Mathematicae; cette revue polonaise prestigieuse m'avait séduit et j'avais réussi à m'en procurer tous les tomes parus avant la guerre.

La Pologne m'apparaissait donc comme un paradis mathématique; aussi lorsqu'en 1945 Georges Bouligand fit miroiter à mes yeux la possibilité d'un séjour d'un ou deux ans à l'Institut Français de Pologne à Cracovie, si j'étais docteur, j'eus tôt fait de compléter et de développer mes résultats sur les applications différentiables pour en constituer ma thèse. Jusqu'alors, les amicales remontrances d'Arnaud Denjoy et d'Henri Cartan, et les pressions du C.N.R.S n'avaient pas réussi à me faire franchir ce pas. Je pense que, semblable en celà à de nombreux jeunes chercheurs, je me faisais de la thèse une conception exagérément élevée et encyclopédique ; mon but lointain et ambitieux était une étude exhaustive des ensembles euclidiens; l'intervention de Georges Bouligand me sauva de cette chimère. Je découvris aussi à cette occasion, d'une part qu'un Mémoire, même étoffé, peut se rédiger assez vite une fois les résultats de base établis, d'autre part que la rédaction est un exercice extrêment sain et fructueux, et peut être une occasion de découverte.

La Pologne, malgré la disparition de mathématiciens de premier ordre, fut effectivement pour moi le paradis mathématique que j'avais imaginé: Contacts humains agréables, conception de la recherche voisine de la mienne, variété des champs d'étude. Je fis de longs séjours à Varsovie, Wrocław , terriblement meutris par la guerre, et bien sûr à Cracovie où je résidais.

A Wrocław , Steinhaus m'initia à la théorie des jeux, et j'eus le plaisir de pouvoir démontrer pendant ce séjour, en utilisant des fonctions analogues aux fonctions pluri-sous-harmoniques, que tout jeu de poursuite d'un type fort général est équitable.

La même année, j'eus le plaisir de présenter au Collège de France, dans le cadre du cours Peccot, une partie de ma thèse.

Je revins définitivement en France en fin 1947 pour occuper à Grenoble un poste de Maître de Conférences. J'avais, pendant mes années de C.N.R.S, appris un peu de théorie du potentiel au Séminaire d'Henri Cartan et lors d'une collaboration avec Jacques Deny, mais les trous de ma culture potentialiste étaient encore énormes et Brelot, avec une patience à toute épreuve, m'aida à boucher les plus gros.

Nous pûmes alors, Brelot et moi, commencer une fructueuse collaboration et je pus, un peu mieux armé, m'attaquer au problème, réputé difficile, de la capacitabilité des ensembles boréliens.

En 1949, je fus nommé à Paris. Mes recherches s'y partagèrent entre la théorie du Potentiel, l'Analyse fonctionnelle linéaire et les nombreux domaines qui se rattachent à ces deux disciplines; mais presque toutes eurent leur germe dans la théorie du Potentiel. Je suis si persuadé du pouvoir séminal de cette théorie que l'"équipe de recherche associée" que je dirige à Paris s'est développée autour de deux séminaires, l'un d'Analyse fonctionnelle, l'autre de Théorie du Potentiel. Cette théorie a par le passé fécondé, fait naître, ou renouvelé plusieurs autres théories importantes : Espaces de Hilbert et méthode de projection , théorie de la mesure, et plus récemment distributions, calcul des probabilités.

Moi-même je lui dois ma théorie des capacités et mon étude des représentations intégrales et des cônes faiblement complets.

II. Génèse de quelques travaux.

L'essentiel de mes travaux peut être rangé, en gros, sous les rubriques suivantes :

Théorie du potentiel, Analyse fonctionnelle linéaire, fonctions de variables réelles, cette dernière rubrique fort vague incluant à la fois :
topologie générale et théorie des ensembles, mesure, géométrie infinitésimale directe, fonctions différentiables et équations différentielles, calcul des variations et espaces de Finsler, aire des surfaces.

Le reste sera brièvement mentionné dans un paragraphe fourre-tout.

Mais je crois intéressant, pour moi-même et pour mes lecteurs, de dégager de cet ensemble quelques travaux et d'en retracer la génèse. Ceux que j'ai choisis ont l'intérêt d'avoir apporté des réponses à des problèmes réputés difficiles, et qui m'ont donc arrêté assez longtemps pour que je suive lucidement en moi le processus de la découverte; ils ont également l'intérêt d'avoir des réponses exprimables en termes simples, avec parfois aussi des démonstrations raisonnablement simples.

Les premiers, sur la structure différentiable des ensembles, font partie d'un domaine qui actuellement n'est plus à la mode parce que les êtres que l'on étudie de préférence aujourd'hui sont, ou bien très réguliers comme les variétés différentiables, ou bien très généraux comme les espaces compacts quelconques.

Les autres, sur les capacités et la représentation intégrale ont trouvé très vite de multiples applications dans les théories éloignées de la théorie qui les avait fait naître, et ont été inclus partiellement dans le traité de Bourbaki.

IIa. Ma thèse [32]

L'un des titres de gloire d'Arnaud Denjoy fut d'avoir trouvé (en 1915) un procédé de calcul, la totalisation, permettant de reconstituer une fonction numérique f dérivable sur un intervalle $[a,b]$ à partir de sa dérivée f' ; la difficulté provenait de ce que f' n'est pas nécessairement intégrable. Pour résoudre ce problème, Denjoy dut faire une synthèse des théorèmes topologiques de Baire, et de l'intégration au sens de Lebesgue. Il étendit plus tard ces méthodes aux fonctions f dont les quotients différentiels (nombres de Dini) en tout point sont finis; autrement dit dont le graphe a en tout point un faisceau dérivé (le contingent au sens de Bouligand) ne contenant pas de rayon "vertical". C'est à un problème de même type, dû à Lebesgue, que je m'attaquai d'abord:

En 1943, Georges Bouligand avait posé le problème de déterminer si, dans la classe des surfaces de R^3 qui sont C^1 (i.e. à plans tangents continus), les portions de sphère sont caractérisées par la propriété d'avoir en tout point un contingent sphérique réduit à une seule sphère. Je réussis, par une étude géométrique de la courbure, et grâce au fait que cette courbure est une fonction de 1ère classe de Baire, à donner une réponse positive au problème, tout en affaiblissant encore ses hypothèses [15].

Un an plus tard, alors que j'étudiais les "Leçons sur l'intégration" (1928) de Lebesgue, je vis qu'il attirait l'attention sur le problème non résolu suivant: Soient f, α deux fonctions numériques continues sur $[0,1]$ telles que pour tout x existe la limite (pour $h \to 0$) de $[f(x+h) - f(x)]/[\alpha(x+h) - \alpha(x)]$. Notons $\frac{df}{d\alpha}(x)$ cette limite. Le problème consiste à déterminer f connaissant α et $g = \frac{df}{d\alpha}$; c'est donc une extension assez large du problème résolu par Denjoy.

L'expérience que j'avais acquise avec le problème de Bouligand me fit aussitôt songer à utiliser le graphe du couple (α, f) c'est-à-dire finalement à utiliser l'application $x \to (\alpha(x), f(x))$ de $[0,1]$ dans le plan R^2 . Cette méthode me fournit facilement l'unicité de la réponse, c'est-à-dire le fait que si $\frac{df}{d\alpha} = 0$, f est une constante. Je découvris plus tard que Petrowski avait démontré cette unicité, mais par une méthode fort longue parce qu'il n'avait pas pensé à utiliser une interprétation géométrique.

Assez vite je pus résoudre entièrement le problème, dans un cadre d'ailleurs plus général, où $[0,1]$ était remplacé par un espace topologique localement compact et localement connexe quelconque; cette généralisation ne me coûtait pas plus de travail puisque finalement j'avais ramené le problème à l'étude d'une courbe plane.

L'année suivante je découvris dans l'ouvrage de Fréchet sur les "Espaces abstraits" un autre problème non résolu qui me parut relever des méthodes que j'avais utilisées pour le problème de Lebesgue. Il s'agissait de savoir quand un arc de courbe paramétré par $[0,1]$: $t \longrightarrow f(t)$ admet un paramétrage équivalent $t \longrightarrow f(\varphi(t))$ (φ est une homéomorphie de $[0,1]$) qui ait en tout point une dérivée non nulle.

Valiron, Ward, puis Christian Pauc avaient étudié ce problème, et Pauc avait montré qu'il était nécessaire pour celà que $f([0,1])$ ait partout localement une tangente, et que f n'ait en aucun point d'oscillations de trop grande amplitude relative (points "contrariants"); que la condition de Pauc soit suffisante était loin d'être évident. J'eus assez de mal à mettre au point les constructions explicites démontrant cette réciproque, mais mon expérience du problème de Lebesgue m'avait très vite convaincu de son exactitude. En même temps je démontrai deux généralisations du problème :

1) Je caractérisai les courbes paramétrées admettant une paramétrisation équivalente dérivable (à dérivée pouvant s'annuler) : celles qui admettent une paramétrisation à dérivées bornées sont les courbes rectifiables; les plus générales sont les courbes "partiellement" rectifiables, c'est-à-dire qui, en un certain sens, sont rectifiables autour d'une portion de tout fermé donné. Pour établir cette généralisation, j'eus besoin d'établir un lemme qui s'avéra fort commode dans de nombreuses constructions :

Pour tout G_δ de mesure nulle de $[0,1]$, il existe une fonction dérivable croissante à dérivée $g > 0$, semi-continue inférieurement, qui vaut $+\infty$ sur ce G_δ et est finie ailleurs.

2) J'établis un théorème qui était l'extension à toute dimension de ma réponse au problème de Fréchet. C'est un théorème de base de la théorie des variétés partout différentiables puisqu'il caractérise les applications continues f d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n+p}$ pour lesquelles il existe une homéomorphie α de Ω dans lui-même telle que $f \circ \alpha$ admette en tout point une différentielle non dégénérée (i.e. de rang n).

La condition est simple : C'est que f soit <u>régulière</u> en tout point de Ω . Voici le sens de ce mot : f est dite régulière en x s'il existe dans $\mathbb{R}^{n+p}$ une variété affine A(x) de dimension n contenant f(x) telle que, pour tout sous-ouvert ω de Ω contenant x, il existe un ouvert ω' de A(x) homéomorphe à ω tel que $\varepsilon = \Theta(\delta)$, où δ est le diamètre de ω , et ε l'écart de Fréchet entre ω' et $f(\omega)$.

C'est un théorème difficile parcequ'il établit un lien entre la catégorie des applications différentiables et la catégorie des applications seulement continues.

Sa démonstration utilise de nombreux lemmes topologiques sur les homéomorphies des ouverts de $\mathbb{R}^n$, en même temps que des résultats du type Baire-Denjoy ainsi que la construction de prolongements locaux d'applications différentiables définies sur un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Il n'apporte d'ailleurs pour l'instant aux mathématiques qu'une satisfaction esthétique, à la fois parceque les géomètres actuels se bornent à l'étude d'une différentiabilité plus régulière, au moins C^1 ; et aussi parceque même si l'on décide d'étudier les variétés seulement différentiables en tout point, on n'utilise en général que des changements de variable différentiables.

Tout en rédigeant ces résultats, je m'aperçus que j'étais maintenant bien armé pour résoudre un troisième problème que personne à ma connaissance n'avait explicitement formulé, mais que très probablement d'excellents mathématiciens avaient déjà considéré. Voilà de quoi il s'agit : La dérivée d'une fonction dérivable f définie sur [0,1] est évidemment une fonction de 1ère classe, c'est-à-dire la limite d'une suite de fonctions continues, par exemple les $n^{-1}[f(x+n^{1}) - f(x)]$; d'autre part f' possède la propriété de Darboux, c'est-à-dire que l'ensemble des valeurs prises par f' sur tout sous-intervalle est lui-même un intervalle. La réciproque est inexacte puisque par exemple pour toute homéomorphie α de $[0,1]$, $f' \circ \alpha$ a encore ces deux propriétés sans être pour celà une dérivée. Mais les $f' \circ \alpha$ ne sont-elles pas les fonctions les plus générales de 1ère classe ayant la propriété de Darboux ? Autrement dit, est-ce que le fait pour une fonction numérique g sur $[0,1]$ d'avoir ces deux propriétés n'entraîne pas que g soit équivalente à une fonction dérivée, c'est-à-dire de la forme $g = f' \circ \alpha$?

Je pus donner une réponse positive à ce problème, d'abord pour les fonctions g semi-continues, puis un peu plus tard dans le cas général. Ce résultat, formulable en termes simples, mais jusque là fort caché, impressionna beaucoup les spécialistes; je crois cependant que la solution du problème de Fréchet était beaucoup plus cachée.

Comme c'est le cas au cours de tout travail en profondeur, l'intuition que j'avais acquise au cours de ces trois études me fournit sans effort de nombreux résultats satellites tels que : Caractérisation de certains ensembles associés aux fonctions dérivées, étude des homéomorphies de $[0,1]$ transformant toute fonction dérivée en une fonction dérivée.

Ayant achevé la rédaction de cet ensemble de résultats, je fis un dernier effort, de réflexion philosophique cette fois, et je cherchai à mettre en évidence la raison du succès des méthodes que j'avais utilisées, le fil directeur qui, si je l'avais connu plus tôt, m'eût évité bien des redites. A ma grande surprise, cet effort fut couronné de succès, et aboutit à un théorème général, de formulation géométrique fort simple, qui résumait en quelques mots, à la fois mes propres procédés, les énoncés de Baire, et trois théorèmes profonds où Arnaud Denjoy, dans ses "Leçons sur le calcul des coefficients des séries trigonométriques" (vol II) rassemblait la partie topologique de ses méthodes. En termes vagues, ce théorème affirme que lorsqu'il y a convergence simple, il y a aussi convergence uniforme en de nombreux points - moyennant certaines hypothèses, bien sûr.

La simplicité de mon énoncé tenait à l'utilisation, sous une forme convenablement généralisée, de deux outils commodes dûs à Georges Bouligand : le contingent et le paratingent. Le contingent d'une partie X de R^n en un point x de X est l'ensemble des limites des demi-droites $\delta(x,y)$ d'origine x, avec $y \in X$, quand y tend vers x ; le paratingent de X en x est l'ensemble des limites de $\delta(y,z)$ quand y et z tendent vers x dans X. (On pressent déjà que le contingent traduit une convergence simple, et le paratingent une convergence uniforme.

J'avais besoin d'un cadre plus général :

Soient U un espace métrique ; E,P deux parties de U avec $P \subset E$; et δ une application de $(P \times E) \setminus d(P \times P)$ dans un espace métrique compact Δ telle que, pour tout $y \in E$, l'application $x \longrightarrow \delta(x,y)$ soit continue.

Pour tout $x \in P$, on pose $\mathcal{C}_E(x) = \bigcap_{\omega} \overline{\delta(x,\omega)}$, où ω décrit les voisinages de x dans E.

Et de même $\mathcal{P}_{E,P}(x) = \bigcap_{\omega} \overline{\delta(\omega \cap P, \omega)}$, où $\delta(x,X)$ et $\delta(X,Y)$ se définissent par l'extension de δ à l'ensemble des parties.

Les fermés $\mathcal{C}_E(x)$ et $\mathcal{P}_{E,P}(x)$ s'appellent respectivement le contingent de E en x, et le paratingent de E en x relatif à P, associés à la fonction δ.

De façon immédiate, $\mathcal{C}_E \subset \mathcal{P}_{E,P}$, et $\mathcal{P}_{E,P}$ possède la continuité supérieure d'inclusion. Le théorème en question s'énonce alors :

<u>Théorème</u> : Pour tout point x de P, sauf aux points x d'un F_σ maigre de P, $\mathcal{P}_{E,P}$ varie continuement et $\mathcal{C}_E(x) = \mathcal{P}_{E,P}(x)$.

En particulier, en tout point x non exceptionnel, l'application $\mathcal{C}_E$ est s.c.i; si donc $\mathcal{C}_E(x)$ est petit, par exemple de petit diamètre, $\mathcal{C}_E(y)$ est aussi petit pour y voisin de x.

Lorsque P est complet, l'ensemble de ces points x est, bien sûr, partout dense dans P.

Cet énoncé général peut s'étendre encore dans diverses directions; je l'ai fait par la suite [33] ; mais tel qu'il est il satisfait de nombreux besoins.

Un exemple suffira à l'illustrer : soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs dans $[-\infty,\infty]$; et pour tout $x \in [0,1]$, soit $C(x)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite des $f_n(x)$. Alors il existe des points (partout denses) $a \in [0,1]$ tels que, pour tout ouvert ω contenant $C(a)$ on ait $C(x) \subset \omega$ dès que x est assez voisin de a. Ceci inclut, bien sûr, l'énoncé classique de Baire sur les points de continuité des fonctions de 1ère classe.

Prolongement de ces travaux. Peu de temps après avoir résolu le problème de Lebesgue je découvris , au cours d'un travail en collaboration avec Pauc [26] un théorème fort inattendu, d'énoncé simple, ayant pour corollaires les théorèmes classiques sur la différentiabilité presque partout des fonctions lipschitziennes, et la plupart des beaux résultats de Frédéric Roger sur les propriétés tangentielles des ensembles euclidiens. (Le cas particulier le plus connu de ces résultats est le théorème classique de Denjoy affirmant que si f est une fonction numérique continue, le contingent $\mathscr{C}(x)$ de son graphe au point d'abscisse x est, pour presque tout x, un plan, un demi-plan ou une droite, les droites qui interviennent ayant des pentes finies).

Je fus fort tenté d'appeler cet énoncé le "théorème du voyageur spatial"; son sens intuitif est en effet le suivant : Pour un voyageur se déplaçant dans une fusée très rapide, le paysage stellaire apparait fibré parallèlement à la vitesse, et ceci indépendamment de la profondeur de son champ de vision.

Rappelons d'abord que, d'après Lebesgue, tout arc rectifiable de R^n a presque partout une tangente ; voici alors le théorème :

Théorème : Soit X une partie d'un espace euclidien, et k un arc rectifiable de cet espace. Alors en presque tout point x de k, cet arc admet une tangente, et le contingent $C(x)$ de X (éventuellement vide) admet cette tangente comme direction de translation.

Autrement dit, la partie fermée de l'espace constituée par la réunion des demi-droites de $C(x)$ est une réunion de demi-droites parallèles à la tangente à k au point x.

IIb. <u>Etude des capacités</u>.

Je voudrais retracer maintenant la génèse et l'évolution de recherches que je fis de 1950 à 1953 sur une classe de fonctions d'ensemble que j'appelai capacités parceque la capacité éléctrostatique (ou newtonienne) en est un exemple particulièrement important.

En 1950 existaient de nombreux travaux, voire même des livres entiers sur des fonctions d'ensemble plus générales que des mesures additives ; ils m'avaient toujours paru ennuyeux parceque leurs auteurs, faute d'une motivation et d'un fil directeur, généralisaient à vide pour ne retomber en général que sur des fonctions additives.

Or dans les mêmes années la théorie du potentiel, démontrant une fois de plus son pouvoir séminal, utilisait de plus en plus une fonction d'ensemble, la capacité newtonienne qui, loin de ressembler à une mesure, n'est en fait jamais additive ; elle a même une propriété exactement opposée (la dichotomie): tout ensemble borélien X admet une partition en deux boréliens de même capacité que X.

Définissons cette capacité dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, où le noyau newtonien est la fonction $1/r$ avec $r = \| x-y \|$ et où le potentiel d'une mesure positive est la fonction égale au point x à $\int \|x-y\|^{-1} \, d\mu(y)$.

Si K est un compact de $\mathbb{R}^3$, sa capacité f(K) est la borne supérieure des masses totales des mesures de Radon positives μ sur K dont le potentiel est partout majoré par 1.

Pour une partie X quelconque de $\mathbb{R}^3$, sa capacité intérieure $f_*(X)$ est la borne supérieure des capacités des compacts K contenus dans X; et sa capacité extérieure est la borne inférieure des capacités intérieures des ouverts contenant X.

Entre autres usages, cette capacité sert à définir une bonne notion de rareté : On dira que X est négligeable si sa capacité est nulle ; mais déjà se pose la question de choisir entre f_* et f^* ; dans le premier cas on montre plus facilement que X est négligeable; dans le second, on a un énoncé en apparence plus fort. Tout serait plus simple bien sûr si $f^*(X) = f_*(X)$, ce qu'on traduit en disant que X est f-capacitable, mais ceci a-t-il lieu ?

Comme les X utilisés sont en général boréliens, on se pose d'abord la question pour les boréliens : Voilà le problème dont Brelot et H. Cartan avaient souvent souligné l'importance. Lorsque je fus nommé à Grenoble, Brelot me confirma qu'il ne connaissait à ce problème aucune réponse, même partielle, et que sa solution serait bien commode.

Je trouvai cette situation vexante, et pensai que si l'on n'avait rien trouvé, c'est qu'on n'avait pas cherché dans la bonne direction.

J'ai dit déjà qu'à l'époque je ne connaissais pas grand chose en théorie du potentiel - je continue d'ailleurs à ne pas me considérer comme un spécialiste de cette théorie, et quand j'ai besoin d'un renseignement précis, c'est à Brelot ou à Deny que je le demande.

Ce fut cette ignorance qui me permit de résoudre le problème : Connaissant peu de propriétés de la capacité, ignorant si la structure euclidienne de $\mathbb{R}^3$ était utile ou non, je décidai de choisir au départ le cadre le plus général possible de façon à conserver à chaque instant la souplesse maximum, et de procéder ensuite à reculons, c'est-à-dire de chercher de quelles propriétés il serait commode de disposer pour batir une démonstration de capacitabilité; ensuite seulement je pourrais rechercher si la capacité newtonienne a ces propriétés.

Mon cadre était le suivant : E est un espace topologique séparé, et f une fonction croissante positive définie sur l'ensemble des compacts de E. On associe à f, appelée capacité, les capacités intérieure et extérieure f_* et f^* définies sur l'ensemble des parties de E par le procédé classique décrit ci-dessus, et on dit que X est f-capacitable si $f_*(X) = f^*(X)$.

On suppose seulement au départ que f est continue à droite, c'est-à-dire que tout compact est f-capacitable (la capacité newtonienne a cette propriété).

Dans ce cadre général, il était exclu de chercher à démontrer la capacitabilité de tout borélien de E, aussi régulière que fut f, à cause de l'irrégularité possible de certains ouverts de E; je décidai donc de me borner aux ensembles K-boréliens, c'est-à-dire obtenus à partie des compacts par des opérations "positives", réunions et intersections dénombrables, le passage au complémentaire étant exclu. Les K-boréliens étaient donc, par ordre de complication croissante :

Les compacts, les K_σ, $K_{\sigma\delta}$, $K_{\sigma\delta\sigma}$, et ainsi de suite transfiniment.

Les compacts étant f-capacitables par hypothèse, l'examen des K_σ s'imposait en premier lieu. De façon plus générale, soit $A = \bigcup A_n$ la réunion d'une suite croissante de parties de E. On a évidemment $\lim f_*(A_n) \leqslant f_*(A)$; si donc on pouvait montrer que l'on a :

$$(1) \qquad f^*(A) = \lim f^*(A_n),$$

on aurait aussi, lorsque les A_n sont f-capacitables, $f_*(A) = f^*(A)$, autrement dit A serait capacitable; en particulier tout K_σ serait capacitable.

L'importance de la relation (1) était donc claire ; pour la démontrer il fallait essayer, pour tout $\varepsilon > 0$, de construire par réunion ω contenant A, tel que $f^*(\omega) \leqslant f^*(A) + \varepsilon$, à partir d'ouverts analogues $\omega_n \supset A_n$ vérifiant des inégalités du même type $f^*(\omega_n) \leqslant f^*(A_n) + \varepsilon_n$.

Or les hypothèses faites sur f étaient nettement insuffisantes pour celà; un exemple montrait que la sous-additivité : $f(K_1 \cup K_2) \leqslant f(K_1) + f(K_2)$, qui est classique pour la capacité newtonienne, ne suffisait pas non plus. Il aurait fallu que les inégalités $f^*(\omega_n) \leqslant f^*(A_n) + \varepsilon_n$ entraînent une inégalité du type

$$(2) \qquad f^*(\bigcup \omega_n) \leqslant f^*(\bigcup A_n) + \sum_n \varepsilon_n .$$

Je commençai par étudier une relation de ce type pour une suite de deux ensembles A_1 , A_2 ; des changements de notations la ramenèrent à la forme

$$(3) \qquad f(A \cup B) + f(A \cap B) \leqslant f(A) + f(B).$$

Les f vérifiant cette relation pour tous compacts A,B furent appelées "fortement sous-additives". Un calcul simple, assorti de raisonnements topologiques me montra que pour une telle f, la relation (2) était toujours vérifiée. La relation (1) cherchée en résultait aussitôt; en particulier, la réunion de toute suite croissante d'ensembles capacitables était capacitable, et en particulier tout K_σ .

Venaient ensuite les $K_{\sigma\delta}$; encouragé par ce premier résultat, je mis finalement sur pied la démonstration, qui utilise fortement le fait que peu d'opérations séparent un tel ensemble des compacts. Le cas des $K_{\sigma\delta\sigma}$ en résultait aussitôt comme pour les K_σ .

Pour les $K_{\sigma\delta\sigma\delta}$ je me trouvai devant un mur; je me dis que si l'inégalité (3) m'avait fait progresser de deux crans, une nouvelle inégalité me ferait progresser davantage.
Et d'abord, bien sûr, il fallait vérifier l'inégalité (3) pour la capacité newtonienne; Brelot m'assura qu'elle était inconnue; mais, en utilisant les propriétés du noyau newtonien appelées principe de domination et principe de positivité des masses, je pus l'établir.

C'était rassurant; restait à deviner à quoi pouvaient ressembler d'autres inégalités; finalement, après avoir noirci de nombreux feuillets, je fus amené à traduire la croissance de f et sa sous-additivité par deux inégalités équivalentes mais qui, elles, en suggèraient de nouvelles :
$f(X) - f(X \cup A_1) \leqslant 0$; $f(X) - [f(X \cup A_1) + f(X \cup A_2)] + f(X \cup A_1 \cup A_2) \leqslant 0.$

Si on posait $\nabla_1(X,A_1) = f(X) - f(X \cup A_1)$, et plus généralement $\nabla_{n+1}(X;A_1 ,\ldots, A_{n+1}) = \nabla_n(X;A_1 ,\ldots, A_n) - \nabla_n(X \cup A_{n+1} ; A_1 ,\ldots, A_n)$, les deux inégalités s'écrivaient $\nabla_1 \leqslant 0$ et $\nabla_2 \leqslant 0$; l'élégance de cette formulation faisait espérer que, pour la capacité newtonienne on avait $\nabla_n \leqslant 0$ pour tout n.

Ce fut facile à vérifier ; la capacité newtonienne était donc une fonction d'ensemble "alternée d'ordre infini", analogue aux fonctions d'une variable réelle qui sont complètement monotones, i.e. positives et C^{∞}, avec $f^{(n)}$ du signe de $(-1)^n$ pour tout n.

Ceci faisait penser au résultat de Bernstein, et me rappela un théorème de Fréchet sur la probabilité pour qu'un certain évènement se produise au moins une fois; je devais y revenir plus tard.

Pour l'instant, muni de l'inégalité $\nabla_3 \leqslant 0$ je revins à mes $K_{\sigma\delta\sigma\delta}$; ils résistèrent. Etais-je sur la bonne voie ?

Si, en utilisant successivement les inégalités $\nabla_n \leqslant 0$ j'arrivais à démontrer la capacitabilité des K_α d'indice fini, resteraient ensuite ceux d'indice infini, K_ω, $K_{\omega+1}$, etc...; y aurait-il donc des inégalités $\nabla_\alpha \leqslant 0$ d'indice infini; c'était bien douteux, et je m'en assurai par un travail assez ardu consistant à montrer, grâce à un théorème topologique classique de Brouwer, que le système des inégalités $\nabla_n \leqslant 0$ est complet : Toute autre inégalité est une conséquence de celles-là !

J'étais donc fixé sur ce point; une des voies possibles de recherche était une impasse ; aucun raisonnement par récurrence ne pouvait marcher ; il fallait aborder les K-boréliens autrement. C'est alors que mon subconscient, inquiet depuis quelque temps sans doute de mon erreur d'orientation, me rappela que les Polonais avaient depuis longtemps mis en évidence un procédé de construction des boréliens classiques sans récurrence : Comme images continues injectives de l'ensemble des irrationnels de $[0,1]$.

Celà ne me convenait pas parfaitement, car mes K-boréliens n'étaient pas classiques, et puis l'injectivité ne me semblait jouer ici aucun rôle. Je décidai donc qu'il fallait adapter les théorèmes polonais à mon cadre, mais abandonner l'injectivité, c'est-à-dire introduire une généralisation des ensembles analytiques de Lusin ; ce projet était d'autant plus raisonnable que les Polonais avaient démontré la mesurabilité (pour la mesure de Lebesgue) de ces analytiques.

Je fus donc amené à ouvrir une large parenthèse de caractère purement topologique : J'appelai K-analytique tout espace topologique séparé qui est image continue d'un $K_{\sigma\delta}$ d'un espace compact. Pourquoi $K_{\sigma\delta}$? Parce que ce sont les K-boréliens les plus simples après les K_{σ} qui, eux, ne conviennent pas.

Je vérifiai que tout K-borélien est de ce type, que les opérations classiques sont valables dans la nouvelle classe, que tout K-analytique métrisable est en fait analytique au sens de Lusin, et j'établis le lien précis entre les K-analytiques et les K-sousliniens, c'est-à-dire les ensembles qu'on peut obtenir à partir des compacts par l'opération A de Souslin.

Cette recherche topologique, finalement assez facile, fut cependant agréable à faire, et elle rendit un regain d'activité à ce type de recherches (travaux de Frolik par exemple).

Rassuré sur la validité et la flexibilité de mon matériel, à savoir les ensembles K-analytiques, je revins à la f-capacitabilité pour les f vérifiant l'égalité de base (1). Il s'agissait donc d'étudier la f-capacitabilité d'un ensemble $A \subset E$ (où E est supposé compact pour simplifier) qui est image, par une application continue φ, d'un ensemble B qui est un $K_{\sigma\delta}$ d'un espace compact F. Or B étant un $K_{\sigma\delta}$ relève du résultat partiel concernant la capacitabilité des $K_{\sigma\delta}$; il était donc indiqué de définir à partir de f, une capacité g sur F, et de déduire la f-capacitabilité de A de la g-capacitabilité de B.

Malheureusement φ n'est pas définie partout dans F ; on ne peut donc pas poser $g(K) = f(\varphi(K))$ comme celà serait naturel. Qu'à celà ne tienne; suivons l'exemple de Lebesgue et ramenons l'application φ à une projection en utilisant l'espace $F \times E$: Soit Γ le graphe de φ dans $F \times E$; c'est, lui aussi, un $K_{\sigma\delta}$; si ψ est la projection canonique de $F \times E$ sur E, on a $A = \psi(\Gamma)$ et ψ est maintenant continue et partout définie sur $F \times E$; on peut donc lui appliquer ~~maintenant~~ l'idée esquissée ci-dessus ; on vérifie sans peine que tout marche bien; le théorème est donc démontré.

Ces résultats furent inclus dans un gros Mémoire [49] que je rédigeai pendant le trimestre d'automne 1953 à l'Université du Kansas (Lawrence).

J'y étudiais aussi les capacités monotones, qui sont en quelque sorte les duales des capacités alternées; elles vérifient la relation $f(\bigcap A_n) = \lim f(A_n)$ pour toute suite décroissante d'ensembles.

J'y montrais, en utilisant un résultat de Goëdel, qu'il n'est pas possible d'établir la capacitabilité des complémentaires d'ensembles analytiques ; ce résultat attira l'attention de plusieurs logiciens; ceux-ci ont par exemple examiné les conséquences d'un axiome qui affirmerait la capacitabilité de tout ensemble projectif.

J'y étudiais une relation précise entre les semi-normes sur un espace vectoriel réticulé E et les fonctions positivement homogènes sur E_+ telles que

$$f(x \cup y) + f(x \cap y) \leqslant f(x) + f(y).$$

Dellacherie et Mokobodzki ont tiré de cette relation un énoncé intéressant sur les enveloppes supérieures de mesures de Radon.

Enfin les capacités alternées d'ordre infini me donnèrent l'occasion de m'habituer pour la première fois au théorème de Krein-Milman et à la notion de représentation intégrale. Voici de quoi il s'agissait :

Soit C le cône convexe de toutes les capacités alternées d'ordre infini sur un espace compact X ; ce cône a une base $B = \{f : f(X) = 1\}$. Il s'agit de savoir si on peut munir C d'une topologie canonique rendant B compact, de déterminer les points extrémaux de B, (x est extrémal s'il n'est pas milieu de deux autres points), puis de chercher si l'on peut représenter toute $f \in B$ comme un "mélange" de capacités extrémales.

Je finis par trouver la bonne topologie sur C, qui est très analogue à la topologie vague utilisée pour les mesures par Bourbaki; je montrai que les éléments extrémaux sont les f de la forme f_A, où A est un compact fixe de X, avec $f_A(X) = 1$ ou 0 suivant que K rencontre ou non A ; ces éléments jouent le rôle des fonctions (1-exp(tx)) dans la formule classique de Bernstein. L'ensemble de ces éléments extrémaux est compact, donc une simple application de Krein-Milman démontre l'existence du mélange cherché (son unicité fut démontrée plus tard par Revuz dans sa thèse). La simplicité des éléments extrémaux fournit alors aussitôt une interprétation probabiliste :

Pour toute capacité f $\in$ C, il existe une (unique) mesure de probabilité sur l'espace compact $\mathcal{K}(X)$ des sous-compacts de X telle que, pour tout K $\subset$ X, f(K) soit la probabilité pour qu'un compact variable de X rencontre K en un point au moins; le lien avec l'énoncé de Fréchet mentionné plus haut est évident. Mais plus précisément, ceci est bien proche d'une interprétation probabiliste en termes de mouvement brownien (ce qui a lieu pour la capacité newtonienne); je pouvais donc prévoir que toute théorie du potentiel relative à un "bon noyau" devait avoir une interprétation probabiliste. Cette prévision devait recevoir de G. Hunt en 1957 une confirmation éclatante. J'ai souvent regretté de ne pas avoir su en 1953 assez de probabilités pour approfondir moi-même le lien probabiliste que je venais de découvrir. A vrai dire, en 1953 j'étais plutôt préoccupé de généralités : à coté de la représentation intégrale dont je viens de parler, j'en donnai de nombreuses autres, ayant d'autres aspects intéressants, pour d'autres cônes de fonctions d'ensemble, par exemple celui des capacités arbitraires, ou des capacités monotones d'ordre infini; encore maintenant ces questions posent plusieurs problèmes intéressants.

L'avenir me donna l'occasion de compléter quelques aspects de la théorie :

Je donnai [76] (1959) une version abstraite du théorème de capacitabilité particulièrement souple puisque son cadre est purement ensembliste. L'ensemble des compacts y est remplacé par un ensemble $\mathcal{K}$ de parties d'un ensemble E, stable par réunion finie et par intersection dénombrable, et les K-analytiques sont remplacés par les ensembles $\mathcal{K}$-sousliniens, obtenus à partir des éléments de $\mathcal{K}$ par l'opération A de Souslin; ce théorème est une bonne généralisation de plusieurs théorèmes de l'intégration par rapport à une mesure abstraite σ-additive.

Dans un autre travail, je vérifiai que la propriété, pour la capacité newtonienne, d'être alternée d'ordre infini, s'étend aux capacités associées à tout "bon" noyau, c'est-à-dire aux noyaux vérifiant le principe de domination et le principe de positivité des masses.

Mais il est temps que je donne quelques exemples d'application du théorème de capacitabilité (topologique ou abstrait) hors de la théorie du potentiel :

Il est souvent utilisé en calcul des probabilités pour démontrer la mesurabilité de certains ensembles liés aux processus aléatoires; on l'utilise pour démontrer l'existence de relèvements de mesures, pour la comparaison des mesurabilités relatives à deux topologies, forte et faible, sur un e.v.t..

Avec P.A. Meyer je l'ai utilisé dans les convexes compacts pour montrer que toute mesure maximale est portée par tout K-analytique contenant tous les points extrémaux.

De façon analogue il a été utilisé pour montrer que tout compact de R^n de mesure p-dimensionnelle infinie($p < n$) contient un sous-compact de mesure finie non nulle.

Plus récemment, il a permis de donner une réponse positive au problème suivant de Klee : Si X est un convexe borélien de classe α dans R^n, est-il convexement de classe α ou $\alpha+2$ (i.e. en n'utilisant dans la récurrence transfinie que des convexes).

Voici deux ou trois ans, il a été utilisé brillamment par Claude Dellacherie qui, grâce à une formulation de la théorie en termes de "capacitances" (due a Maurice Sion en 1963), a retrouvé de façon extrêmement simple les profonds théorèmes polonais concernant les ensembles analytiques, en particulier les théorèmes de séparation, de même que divers théorèmes de relèvement.

En utilisant les "capacités fonctionnelles" que Mokobodzki avait introduites en vue d'applications à ses nouvelles axiomatiques de théorie du potentiel, et en utilisant de nouvelles notions annexes, telles que rabotages, ensembles minces associés à une capacité, il a constitué une élégante synthèse, aux applications nombreuses à la théorie générale des processus et à la théorie de la mesure.

Il est fort réconfortant, pour celui qui douterait de l'unité des mathématiques, qu'un théorème dont la motivation initiale était la résolution d'un problème spécialisé de théorie du potentiel, ait finalement des applications aussi variées.

Un dernier mot : Je me suis souvent étonné que parmi les nombreux spécialistes de la théorie de la mesure, en particulier ceux concernés par les problèmes de relèvement, aucun n'ait avant moi énoncé un théorème de capacitabilité; la raison en est probablement que la fréquentation exclusive des mesures les hypnonisaient à l'intérieur du cadre "additif". J'ai appris pourtant voici deux ou trois ans, au cours d'une conversation avec Roy.O. Davies que peu de temps après moi il avait, dans un cas particulier, en vue de l'étude des mesures p-dimensionnelles de Hausdorff, établi un théorème de ce type.

IIc. Convexes compacts, cônes faiblement complets et représentation intégrale.

Il va s'agir ici de travaux commencés en 1956, et qui se sont étalés sur plusieurs années, aux divers rebondissements; c'est presque toujours la théorie du potentiel qui les a motivés. On peut les diviser, logiquement et chronologiquement en deux blocs : Convexes compacts et représentation intégrale d'une part, cônes faiblement complets d'autre part. Le premier bloc a inspiré de nombreux travaux, en partie rassemblés ensuite dans plusieurs livres, par Phelps, Alfsen, ou moi-même [102,..] ; le second, plus récent, a surtout été prolongé jusqu'ici par mes propres élèves; je le crois également fort prometteur.

C'est pour la première fois, à la fin des années 40, qu'au cours d'une conversation avec Henri Cartan j'entendis parler d'éléments extrémaux, de Krein-Milman et de représentation intégrale; il faisait allusion à un mémoire de Godement sur les représentations de groupes, à la fin duquel celui-ci soulignait l'économie de papier qu'apporterait un théorème de représentation intégrale; son cadre était en apparence un peu restreint, mais l'essentiel du problème y était.

Bien que mon impression fut alors que j'étais bien armé pour attaquer ce problème, je n'avais encore aucune motivation pour le faire ; certes, à l'occasion d'un séjour chez O. et S. Nikodym, j'eus l'occasion de réfléchir aux conditions d'unicité, et je vis bien le lien avec les espaces vectoriels réticulés; toutefois la véritable motivation me fut donnée en 1953 à l'occasion des recherches sur les capacités alternées d'ordre infini dont j'ai déjà parlé.

Pour ces recherches ce fut le Bourbaki E.V.T. qui m'apprit ce qui m'était nécessaire (je crois intéressant de souligner à cette occasion que j'aime peu me documenter et lire sans motivation urgente, et le meilleur de ma culture s'est constitué à l'occasion de mes recherches; cette attitude, bien sûr, comporte à la fois des avantages et quelques risques !).

De 1953 à 1956 je pris de plus en plus conscience du problème, ne serait-ce que parce que je le proposai, d'ailleurs sans succès, à plusieurs jeunes chercheurs. Je le formulais sous la forme suivante :

Soit X un convexe compact d'un espace vectoriel localement convexe séparé (e.l.c.s.). Est-ce que tout point x de X est le barycentre d'au moins une mesure de Radon positive de masse 1 portée par l'ensemble $\mathcal{E}(X)$ des points extrémaux de X ? Dans quel cas y a-t-il pour tout x unicité de cette mesure?

Mon expérience des cônes de capacités m'avait déjà appris plusieurs faits intéressants : L'avantage de considérer les convexes comme des bases de cônes convexes; l'intérêt des points extrémaux en Analyse, dû au fait qu'ils représentent souvent des êtres assez simples; le fait que pour X métrisable $\mathcal{E}(X)$ est un G_δ mais non nécessairement fermé; et le fait que le couple existence-unicité impose aux cônes de base X d'être réticulés pour leur ordre propre.

Ce dernier résultat, bien facile, introduisait une classe importante de convexes compacts, les simplexes, caractérisés par le fait que les cônes qui les ont pour base sont réticulés; ils généralisent triangles et tétraèdres.

Les fils directeurs qui guidaient ma recherche étaient les suivants : D'une part les mesures de barycentre un point x, et portées par $\mathcal{E}(X)$ sont, du moins si X est métrisable, celles qu'on ne peut pas rendre plus diffuses; si une mesure a pour support un point extrémal ou un ensemble voisin d'un point extrémal il en est de même de toute autre mesure ayant même barycentre; une telle mesure possède donc une certaine stabilité.

Ces remarques, convenablement mises en forme, me suffirent sans trop d'effort à établir le critère d'unicité : Si X est un simplexe, tout point possède au plus une mesure représentative portée par $\mathcal{E}(X)$.

L'"existence" me réservait une bien plus grande résistance, d'autant plus que, ne connaissant pas encore la pathologie possible de $\mathcal{E}(X)$ lorsque X n'est pas métrisable, je n'osais pas me restreindre au cas métrisable. Mais une étude obstinée de cas particuliers de plus en plus complexes : $\mathcal{E}(X)$ fermé sauf autour d'un point, dénombrable, intersection d'un fermé et d'un ouvert, etc... me permettait de ne pas piétiner et de cerner de mieux en mieux les difficultés. Je fus amené à introduire un outil fort commode, les diffusions dilatantes ; ce sont des opérateurs linéaires agissant sur les mesures, et qui remplacent toute mesure en une mesure plus diffuse et de même barycentre; elles constituaient la mise en forme de mon premier fil directeur. Pour utiliser à fond le second, j'introduisis une relation (A/B) entre ensembles universellement mesurables :

A est <u>évitable</u> au moyen de B, ce qui se note (A/B) si pour toute mesure $\mu \neq 0$ sur A, il existe une mesure μ' de même barycentre que μ, telle que $\mu'(A) = 0$ et $\mu'(B) \neq 0$.

Après quelques mois de travail intense, je précisai ces notions en Juillet 56 au cours d'un séjour à Gérardmer consacré également à des recherches potentialistes avec Jacques Deny. Je pus alors achever la démonstration dans le cas métrisable; j'obtins aussi quelques résultats dans le cas non-métrisable, mais encore insuffisants.

En décembre , ces résultats furent exposés au Séminaire Bourbaki, accompagnés d'exemples et d'une application à un théorème ergodique nouveau : Toute mesure invariante (sur un espace compact) par une famille d'opérateurs continus est, d'une façon unique, un mélange de mesures ergodiques.

Pendant quelques années, H. Bauer fut le seul à apporter de nouvelles contributions; puis brusquement les choses se précipitèrent et l'on disposa de plusieurs démonstrations d'existence, nouvelles et intéressantes, basées sur des principes en apparence différents, dues à É. Bishop et K. de Leeuw, Hervé, Loomis, Bonsall. La démonstration de Bishop et K. de Leeuw (1959) était particulièrement séduisante; elle introduisait un pré-ordre sur les mesures positives sur X : $\mu \prec \nu$ si $\mu(\ell^2) \leqslant \nu(\ell^2)$ pour toute forme affine continue ℓ ; les auteurs montraient que toute μ maximale pour ce pré-ordre est, dans le cas métrisable, portée par $\mathcal{E}(X)$, ce qui résolvait le problème. Ils montraient aussi par des exemples que si X n'est pas métrisable, $\mathcal{E}(X)$ peut être très mauvais (il a cependant toujours une certaine régularité comme je le montrai plus tard en réponse à une question de Dixmier, puisque c'est toujours un espace de Baire d'un type régulier que j'ai appelé "fortement α-favorable").

En 1960 j'apportai à ce travail de Bishop-de Leeuw quelques améliorations [79], notamment en remplaçant les fonctions ℓ^2 par les fonctions continues convexes arbitraires. En même temps je montrai, plus explicitement qu'ils ne l'avaient fait, l'équivalence entre l'étude des convexes compacts et l'étude de ce qu'ils appelaient "frontière de Choquet" associée à un sous-espace de $\mathcal{C}(X)$; cette frontière est devenue, particulièrement entre les mains de Mokobodzki, un outil de premier ordre en théorie du potentiel.

Dans ce même travail, je posais plusieurs problèmes; certains n'ont pas encore de réponse. Celui concernant la caractérisation des mesures maximales fut résolu peu après par Mokobodzki: μ est maximale si elle est portée par tout ensemble "bordant", ceux-ci étant certains G_δ bien définis qui contiennent $\mathcal{E}(X)$. Deux autres devinrent assez vite populaires :

1) Supposons X métrisable; j'avais remarqué que pour chaque diffusion dilatante T on a $\mu \prec T(\mu)$ pour toute mesure μ ; je demandai si inversement $\mu \prec \mu'$ entraîne que μ' est de la forme $T(\mu)$. La réponse positive fut donnée élégamment par Mokobodzki mais non publiée; ce résultat fut ensuite retrouvé par Cartier-Fell-Meyer.

2) Si X est métrisable, $\mathcal{E}(X)$ est un G_δ ; inversement si A est un G_δ partout dense d'un espace compact métrisable K, existe-t-il un simplexe X et une homéomorphie φ de K dans X transformant A en $\mathcal{E}(X)$?

Je résolus (positivement) ce problème un peu plus tard, et j'y ajoutai un complément fort précis dans le cas où $K = [0,1]$; j'en parlai dans mes cours et conférences, dans mon "Cours d'Analyse" de Princeton, mais ma démonstration, fort lourde, ne me satisfaisait pas, et je ne la publiai pas. En 1966 je trouvai une démonstration simple dans le cas où $(K \setminus A) = \bigcup K_n$, où les compacts K_n sont disjoints et de diamètre tendant vers 0. En 1972, Effros-Phelps-Lazar relancèrent la question au congrès de Swansea; et c'est un jeune anglais, R. Haydon, qui vient enfin de mettre sur pied une démonstration élégante.

Dans un exposé de Séminaire de 1962 [88] consacré à la preuve de quelques critères d'unicité, je démontrai que les fonctions affines continues ℓ sur un X ne sont pas les seules vérifiant pour toute mesure de masse 1 la relation $\mu(\ell) = \ell(a)$, où a est le barycentre de μ ; les fonctions affines de première classe de Baire la vérifient aussi (plus tard Mokobodzki expliqua ceci par le fait qu'une telle ℓ est limite simple de fonctions affines continues); par contre ceci ne s'étend pas aux fonctions affines de 2ième classe. Ce résultat suscita plusieurs travaux cherchant à déterminer si toute ℓ affine de classe α sur X est toujours affinement (en un sens évident) de Baire, et même de classe α ou α +2; ce problème n'est pas encore pleinement résolu.

En 1962, je jugeai qu'il était temps de faire une synthèse de l'état de la question. Nous en fîmes, P.A.Meyer et moi-même un exposé fort dépouillé mais contenant l'essentiel [94] ; l'article contenait de nombreux critères d'unicité et de maximalité d'une mesure; nous y montrions aussi que tout ensemble K-analytique contenant $\mathcal{E}(X)$ porte toute mesure maximale; celle-ci est donc portée par $\mathcal{E}(X)$ lorsque cet ensemble est K-analytique (ce qui peut ne pas avoir lieu pour un X non métrisable). Dans ce dernier cas beaucoup reste à faire puisque par exemple, on ne sait pas si $\mathcal{E}(X)$ peut être K-analytique sans être automatiquement K-borélien de classe 3 ou 4.

Dans cette direction, j'ai démontré voici quelques années que si $\mathcal{E}(X)$ est métrisable, X est lui-même métrisable; malgré les apparences, ce théorème est loin d'être trivial; sa preuve résulte des quatre lemmes suivants : $\mathcal{E}(X)$ est un espace de Baire fortement α-favorable; tout espace métrisable de ce type est homémorphe à un espace métrique complet; on en déduit que $\mathcal{E}(X)$ est polonais; enfin si $\mathcal{E}(X)$ est polonais, X est métrisable.

Cônes convexes faiblement complets. Vers 1959 j'avais, par acquis de conscience, étendu mes théorèmes de représentation intégrale à certains convexes non compacts possédant les propriétés qu'il fallait pour que mes démonstrations soient encore valables. Mais n'ayant aucune motivation, je n'allai pas plus loin et ne publiai rien. La motivation me fut fournie à nouveau par la théorie du potentiel, au début 1960, quand avec Deny, nous étudiâmes les solutions mesures positives de l'inégalité $\mu * \alpha \leq \mu$, où α est une mesure positive donnée sur un groupe abélien G localement compact. Ce problème nous était posé de façon impérative pour la détermination de tous les noyaux-mesures de convolution admettant un balayage sur tout ouvert [81] et [129] . Le cône des solutions est un sous-cône fermé, donc complet, du cône des mesures positives sur G.

Il nous fut relativement facile de déterminer les éléments extrémaux; par contre un nouveau théorème de représentation intégrale nous était nécessaire; je me souvins de mes extensions non encore publiées; elles s'appliquaient lorsque G était à base dénombrable; nous pûmes donc conclure.

J'étais loin cependant d'être satisfait par mes démonstrations; d'autre part je me rendais compte que j'étais en face d'un cône convexe saillant faiblement complet (i.e. plongeable dans un e.l.c. faible et complet pour sa structure uniforme) et qu'il y avait beaucoup de tels cônes en mathématiques. Je publiai donc, peu de temps après [82] , une Note où j'annonçais quelques propriétés de la classe $\mathcal{S}$ de ces cônes : stabilité par limite projective, le fait que tout élément extrémal est extrémal fort (i.e. a une base de voisinages constituée de tranches ouvertes), et que $\mathcal{E}(X)$ est polonais et positivement total dans X quand celui-ci est lui-même polonais.

Pris par d'autres recherches, j'attendis plus d'un an pour publier [84] une Note sur mes théorèmes de représentation intégrale dans les cônes sans base compacte. Je n'étais pas très content du manque d'élégance de ses énoncés et ce n'est que tout récemment que je m'aperçus que son intérêt était encore actuel; en effet depuis plusieurs années, sous l'impulsion de Phelps et Lindenstrauss on a commencé sérieusement l'étude des convexes fermés bornés des espaces de Banach; on a obtenu des théorèmes de Krein-Milman, et voici quelques mois un jeune mathématicien, G.A.Edgar, a obtenu l'analogue de mon théorème de représentation intégrale pour les convexes fermés bornés séparables de tout espace de Banach ayant ce qu'on appelle la propriété de Radon-Nikodym; je me suis alors souvenu de mon ancienne Note, et j'ai constaté que ce théorème d'Edgar est un corollaire du théorème I de cette Note.

Mais revenons aux cônes $X \in \mathcal{S}$. Ma Note d'Octobre 61 ne satisfaisait pas non plus Deny qui prétendait n'aimer que les mesures de Radon à support compact. Pour lui faire plaisir, je me remis au travail; j'étais d'ailleurs moi-même préoccupé par un problème précis : Est-ce que tout cône $X \in \mathcal{S}$ a des génératrices extrémales ? C'est ce problème qui me conduisit à l'introduction d'un nouvel outil-clef :

Après divers échecs, je tentai de construire un cône X sans génératrice extrémale en le faisant apparaître comme limite projective d'une suite transfinie (X_α) de cônes polonais de $\mathcal{S}$ (donc munis d'éléments extrémaux), mais choisis de telle sorte que les génératrices extrémales possibles de la limite des X_α $(\alpha < \Omega)$ s'éliminent progressivement.

C'était fort ardu, assez obscur, et impubliable; et puis un matin, au départ d'une promenade en forêt à Barbizon, je réalisai brusquement que mon raisonnement serait fort simplifié si j'utilisais dans les X_α de petites écailles compactes, et plus précisèment des sous-convexes compacts de complémentaire convexe. Je compris aussitôt que je tenais là un outil important, et de fait je pus vérifier sans difficulté que ces écailles fournissaient la démonstration limpide demandée par Deny.

Plus précisément, appelons <u>chapeau</u> d'un convexe Y d'un e.v.t. tout sous-convexe compact de complémentaire convexe; on vérifie que tout chapeau de Y rencontre $\mathcal{E}(Y)$; et que tout point extrémal d'un chapeau d'un cône convexe Y est situé sur une génératrice extrémale de Y. On a donc ainsi un moyen de transférer aux cônes les propriétés des convexes compacts : Krein-Milman, représentation intégrale. Encore faut-il qu'il y ait assez de chapeaux ! Pour s'en assurer, appelons <u>bien-coiffé</u> tout cône qui est réunion de ses chapeaux; on vérifie que la famille de ces cônes est stable par diverses opérations : Produit dénombrable, sous-cône fermé, donc aussi limite projective dénombrable; en particulier elle contient bien les cônes polonais de $\mathcal{S}$ parce qu'ils sont plongeables dans $\mathbb{R}_+^N$.

Restait encore à étudier le problème d'unicité de représentation intégrale; or quel sens donner à ceci quand il s'agit d'un cône, muni évidemment de nombreuses bases dès qu'il en a une, et qui peut n'en avoir aucune. Dans ma Note d'Octobre 61, j'avais introduit deux notions de mesures sur un cône, indépendantes de l'existence d'une base; mais elles ne convenaient bien que sur les cônes polonais. Or un peu plus tôt, lors d'une collaboration avec P.A.Meyer, celui-ci avait proposé, pour étudier l'ordre $\mu \prec \nu$, d'utiliser au lieu de fonctions convexes continues quelconques, des enveloppes supérieures de fonctions affines continues. Dans le cadre des compacts ce n'était pas une idée heureuse, mais je la repris pour définir sous le nom de <u>mesure conique</u> la bonne notion de mesure sur les cônes de $\mathcal{S}$:

Dans un e.l.c.s. E quelconque, notons h(E) l'ensemble des différences de deux fonctions de la forme $\sup(\ell_1, \dots, \ell_n)$, où les ℓ_i sont des formes linéaires continues; c'est un espace vectoriel réticulé. Une mesure conique n'est autre qu'une forme linéaire positive sur h(E) (i.e. linéaire et positive sur $h^+(E)$); par exemple à toute mesure de Radon de support compact sur E correspond une mesure conique; mais cette correspondance n'est pas injective; par exemple δ_a et $2^{-1}\delta_{2a}$ sont deux localisations d'une même mesure conique; c'est là l'explication du succès de ces mesures. On sait définir ce qu'est une mesure μ portée par un cône X, et on vérifie que si X est faiblement complet, une telle μ a une résultante et que celle-ci est dans X.

Mesures coniques et chapeaux s'aident mutuellement : Si une mesure conique sur X a sa résultante dans un chapeau K de X, elle est représentable par une mesure de Radon sur K.

On définit sur les mesures coniques un ordre :

$\mu \prec \nu$ si $\mu(f) \leq \nu(f)$ pour tout f convexe de h(E); d'où une notion de mesure maximale; on dispose alors du théorème-clef suivant, où X est un cône de $\mathcal{S}$.

Tout $x \in X$ est résultante d'au moins une mesure conique maximale.

Dire que cette mesure est unique pour tout x équivaut à dire que X est réticulé.

Enfin si X est polonais, toute μ maximale est représentable par une mesure de Radon à support compact et portée par $\mathcal{E}(X)$ (la réciproque étant vraie).

Signalons par ailleurs que j'ai montré, (ce n'est pas immédiat), que tout cône métrisable $X \in \mathcal{S}$ est polonais.

Ce théorème-clef ne donnait pas de nouvelle réponse à mon problème initial: "Tout cône de $\mathcal{S}$ a-t-il des génératrices extrémales ?". Mais en juillet 62, je construisis explicitement [91] une classe fort intéressante de cônes (non métrisables) de $\mathcal{S}$ sans génératrices extrémales. Je m'aperçus même, quelques années plus tard, en utilisant le fait que toute forme positive sur un Banach ordonné est continue, que L^p_+ $(p > 1)$ est faiblement complet pour la topologie $\sigma(L^p, L^{p'})$; comme il n'a pas de génératrice extrémale il fournit à bon compte un autre exemple, d'ailleurs moins intéressant que le précédent.

<u>Les cônes de $\mathcal{S}$ dans l'Analyse</u>. L'universalité des cônes de $\mathcal{S}$ dans l'Analyse tient à ce que ses éléments sont finalement les cônes X ainsi définis : On prend un espace vectoriel V, une partie P de V qui engendre V, et X est la partie de V^* constituée par les formes positives sur P, munie de la topologie de la convergence simple.

Les exemples abondent, à coté de l'exemple initial lié à la relation $\mu \geqslant \mu * \alpha$, et du cône des mesures de Radon positives sur un espace localement compact.

Voici quelques exemples classiques où nous ne préciserons pas les topologies à prendre :

Fonctions complètement monotones sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}^n$ ordonné par $\mathbb{R}^n_+$.

Fonctions continues de type positif sur un groupe abélien loc. compact.

Transformées de Laplace de mesures positives sur un tel groupe.

Fonctions harmoniques positives (ou solution d'une équation de la chaleur) sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Capacités sur un espace localement compact.

Courbes ou surfaces généralisées de L.C.Young dans $\mathbb{R}^n$.

· Mesures coniques sur un espace vectoriel topologique.

On peut en fabriquer d'autres exemples intéressants grâce aux théorèmes suivants :

1) Soit K un chapeau d'un cône convexe X, universel en ce sens qu'il engendre X; alors X est faiblement complet pour la topologie faible engendrée par les formes affines sur X qui sont continues sur K.

2) Si B est un Banach ordonné, le cône positif de son dual est faiblement complet.

3) Le cône positif de ℓ^1 est muni d'une famille (de cardinal 2^c) de structures de cône faiblement complet, toutes distinctes mais compatibles avec la topologie du chapeau compact universel $K = \{(x_n) : \sum x_n \leqslant 1\}$; elles sont associées aux ultrafiltres sur $\mathbb{N}$.

Citons aussi un exemple assez étonnant parce qu'il est lié à un axiome fameux auquel s'intéressent les logiciens :

Dire que le cône $\mathbb{R}_+^{(I)}$ est complet pour la topologie de la dualité avec $\mathbb{R}^I$ équivaut à dire que I est modéré, (c'est-à-dire que son cardinal n'est pas 2-mesurable).

Nous allons montrer enfin par un exemple assez frappant comment les considérations de points extrémaux permettent de traiter un problème classique. On va retrouver le théorème de Bochner-Weil sur les fonctions de type positif f sur un groupe abélien localement compact en deux étapes([112] et [132]).

1) On suppose d'abord G discret; alors le convexe des f telles que $f(0) = 1$ est compact; ses éléments extrémaux, les caractères, se déterminent en quelques lignes par un calcul élémentaire; leur ensemble est fermé, d'où formule de Bochner-Weil par Krein-Milman; l'unicité résulte de Stone-Weierstrass.

2) Reste à montrer que si f est continue sur G non discret, la mesure représentant f dans le cadre discret associé à G, est portée en fait par l'ensemble des caractères continus: C'est une conséquence du fait qu'un caractère discontinu oscille au voisinage de l'élément neutre, et que ces oscillations se conservent par intégration.

Mais éléments extrémaux, simplexes, chapeaux, mesures coniques, n'ont pas seulement l'intérêt de fournir des représentations intégrales en termes d'éléments simples. Il constituent un outil indispensable pour étudier la structure de plusieurs classes d'e.v.t.; par exemple ils ont fourni une étude commode des espaces de Kakutani et de leurs généralisations récentes. En particulier chapeaux et simplexes sont indispensables pour l'étude des duaux d'espaces de Banach réticulés. J'ai eu également moi-même l'occasion de le vérifier à nouveau tout récemment à l'occasion de l'étude de la frontière de Silov associée à un espace vectoriel de fonctions continues à valeurs complexes sur un espace compact.

III. Potentiel

Mes travaux en théorie du potentiel ont commencé en 1944 et comportent 25 publications originales, dont 3 en collaboration avec Brelot et 5 avec Deny (Notes préliminaires non comprises).

Je n'analyserai pas ici mon travail sur les capacités, déjà étudié ci-dessus en IIb.

Mon premier travail, en collaboration avec Deny [19] étudiait les propriétés de moyenne caractérisant, à la façon du théorème de Gauss, les fonctions harmoniques et polyharmoniques (i.e. vérifiant $\Delta^n f = 0$).

Il avait pour point de départ la curieuse observation que si une fonction est harmonique sur un carré, sa moyenne sur le pourtour est égale à sa moyenne sur les diagonales.

Disons alors qu'une fonction numérique continue f sur un ouvert D de $\mathbb{R}^n$ est associée à une mesure de Radon μ sur la boule unité B de $\mathbb{R}^n$ si, pour toute similitude φ du plan telle que $B \subset \varphi(D)$, on a $\mu(f \circ \varphi) = 0$.

Nous caractérisions d'abord les mesures μ telles que les f associées à μ soient exactement les fonctions harmoniques. Puis dans le cas n = 2 nous montrions que les f qui sont associées à au moins une $\mu \neq 0$ sont exactement les fonctions polyharmoniques. Ce résultat était visiblement lié à l'invariance à un facteur près de Δ^n par les similitudes.(Plus tard je pus, avec Brelot, lever la restriction n = 2 en utilisant les fonctions sphériques de Laplace, que nous ne savions pas alors utiliser).

Mais cette circonstance fut particulièrement heureuse car à tout hasard, nous parlâmes de cette difficulté à Laurent Schwartz qu'intéressaient les problèmes d'approximation de solutions d'équations aux dérivées partielles. Quelques jours plus tard, il prouvait l'extension demandée (publiée dans le même fascicule que notre mémoire) et ~~peu~~ de temps après posait les bases de sa théorie des distributions. Notre question avait donc joué le rôle des petits cristaux qui déclanchent brusquement, dans un liquide surfondu, une cristallisation massive.

Mon <u>second travail</u>, "Espaces et lignes de Green" [42] se fit à Grenoble avec Brelot; pour la première fois, nous montrions comment sortir, en théorie classique du potentiel, des ouverts de $\mathbb{R}^n$: Nous les remplacions, grâce à un système de cartes locales, par des variétés localement euclidiennes $\mathcal{E}$ (n > 2) ou localement conformément équivalentes à des rondelles planes; elles n'étaient pas nécessairement orientables, donc pour n = 2 généralisaient les surfaces de Riemann classiques.

Dans ce cadre général, nous retrouvions la plupart des propriétés classiques mais notre étude portait surtout sur le cas où il y a une fonction de Green. Nous pouvions étudier alors des problèmes de Dirichlet de divers types (par exemple ramifié) grâce à un théorème nouveau assez caché et inattendu, même dans le cadre des ouverts de $\mathbb{R}^n$:

Presque toutes les lignes de Green issues d'un point x de $\mathcal{E}$ sont régulières, c'est-à-dire que la fonction de Green $G(x,.)$ y a une borne inférieure nulle. En oûtre si $n \neq 2$ et que $\mathcal{E}$ est de volume fini, presque toutes sont de longueur finie; dans les autres cas on a des propriétés analogues en utilisant une fonction-poids.

Mon <u>second travail avec Brelot</u> [50] mettait sur pied le formalisme sur les polynômes harmoniques et polyharmoniques nécessaire pour traiter le cas $n > 2$ que nous n'avions pas considéré dans mon travail avec Deny. Il établissait aussi une propriété élémentaire nouvelle des polynômes harmoniques : Disons qu'un domaine borné D de $\mathbb{R}^n$ est <u>polynomial</u> si pour tout polynôme sur $\mathbb{R}^n$, existe un polynôme harmonique qui a même restriction que le premier à la frontière de D. Nous montrions que ces domaines sont exactement les domaines ellipsoïdaux. Cette propriété, basée sur une relation algébrique élémentaire fournit une solution immédiate au problème de Dirichlet pour ces domaines.

Désormais mes travaux sur le potentiel allaient se répartir en trois groupes : Des travaux fins sur le potentiel classique ou des noyaux très réguliers; des recherches axiomatiques pour la mise en place des fondements d'une théorie du potentiel avec noyaux-fonction généraux; enfin des recherches avec Deny dont le but était de comprendre ce qu'est véritablement une bonne théorie du potentiel et de la linéariser, c'est-à-dire de la libérer des techniques basées sur l'usage de l'énergie. Cette recherche nous conduisit ensuite à la recherche de tous les bons noyaux de convolution sur un groupe abélien localement compact; celle-ci nous demanda un travail considérable qui, longtemps, ne fut publié que sous forme de Notes; tout récemment nous en avons rédigé et publié une bonne partie.

J'analyserai maintenant l'essentiel de ces trois groupes de travaux .

a) <u>Travaux fins</u>.

[77] <u>Sur les points d'effilement d'un ensemble</u>.

Il s'agit d'un théorème de type classique, qui aurait pu être énoncé et démontré quinze ans auparavant (il est en fait valable pour tous les bons noyaux):

L'ensemble des points de l'espace où un ensemble X est effilé est contenu dans des ouverts dont l'intersection avec X (a une capacité qui) peut-être rendue arbitrairement petite.

Cet énoncé contient un énoncé classique de Brelot. J'en déduisais que tout ensemble, après soustraction d'un petit ensemble bien choisi, a même capacité extérieure que sa fermeture.

[78] <u>sur les</u> G_δ <u>de capacité nulle</u>.

Il s'agit d'un résultat sans application pratique, mais auquel plus personne ne croyait avant que je ne le démontre; sa démonstration est difficile; c'est sans doute celui de mes travaux dont la mise au point m'a demandé le plus de mal : L'ensemble des infinis du potentiel d'une mesure positive est un G_δ de capacité nulle; Deny avait démontré la réciproque; mon article démontre qu'on peut imposer à la mesure d'être portée par ce G_δ (et même par une partie dénombrable partout dense donnée de ce G_δ).

[99] Getoor avait démontré par des méthodes probabilistes que pour le noyau newtonien, et pour toute mesure $\mu \geqslant 0$ ne chargeant aucun ensemble polaire, il existe un plus petit fermé fin (i.e. fermé pour la topologie fine de Cartan) qui porte μ . J'en donne une démonstration directe, non probabiliste.

[107] Un énoncé classique de Keldych affirme que pour un domaine borné D de $\mathbb{R}^n$, il existe une suite (x_n) de points-frontière irréguliers, assez représentatifs pour que tout prolongement harmonique à D d'une donnée continue sur D^* soit partout continu dès qu'il est continu en tout x_n.

Sa démonstration est fort compliquée; plus tard Brelot en a donné une démonstration basée sur l'axiome du choix.

J'en donne trois démonstrations constructives simples basées sur des principes différents, et s'appliquant à des situations plus générales.

b) <u>Recherches axiomatiques</u>. Avant mes recherches avec Deny, mes efforts ont porté sur la recherche du type de régularité que doit avoir un noyau positif s.c.i. $G(x,y)$ pour que la théorie du potentiel associée soit satisfaisante.

Ces recherches ont été précieuses en un temps où l'on n'avait pas encore bien dégagé la causalité des théorèmes concernant les noyaux newtoniens.

[63] Sur les fondements de la théorie fine du potentiel. J'y établis des liens entre capacité, régularité d'un noyau, propriété du maximum k-dilaté. J'étudie les mesures singulières et j'établis un théorème de convergence du type de celui de Cartan lorsque G et son adjoint sont réguliers. Mais surtout j'établis que tout potentiel relatif à un noyau G régulier et fini continu pour $x \neq y$ est quasi-continu, c'est-à-dire que sa restriction à un fermé dont le complémentaire a une petite $\check{G}$-capacité, est finie et continue.

Enfin j'établis des liens qualitatifs entre la G-capacité et la $\check{G}$-capacité.

[66] Le théorème de convergence (avec Brelot).

Moyennant des hypothèses assez faibles sur le noyau, nous établissions simplement le théorème fondamental de convergence des potentiels au moyen du lemme suivant que je venais d'établir :

Pour toute famille (f_i) $(i \in I)$ de fonctions s.c.i. sur un espace topologique à base dénombrable, il existe I_o dénombrable $\subset I$ tel que les fonctions $\inf(f_i)(i \in I)$ et $\inf(f_i)(i \in I_o)$ aient même régularisée s.c.i.

[70] L'intégrale d'energie.

Le théorème de base est le suivant, où G désigne un noyau positif symétrique s.c.i. sur E localement compact :

Si G vérifie le principe de domination, G est de type positif; si G vérifie le principe du maximum k-dilaté, les potentiels vérifient l'inégalité de Schwarz au facteur k^2 près.

[72] Théorèmes de convergence.

La première partie est une étude synthétique des théorèmes de convergence sous des conditions peu restrictives pour les noyaux.

La seconde partie contient en particulier l'énoncé suivant, important pour la théorie de la capacitabilité :

Si G et $\check{G}$ sont réguliers et vérifient le principe de l'équilibre, les capacités associées à G et $\check{G}$ sont égales, et cette capacité f a la propriété fondamentale $f^*(\cup X_n) = \lim f^*(X_n)$. Certains de ces résultats ont été retrouvés indépendamment par Kishi.

[73] Etude des encombrements.

C'est une introduction et une étude systématique d'une notion que Deny, puis Aronszajn-Smith avaient utilisée implicitement dans des cas particuliers: Pour un noyau G, sur E, on appelle encombrement d'une partie X de E, la quantité:

$f(X) = \inf \|\mu\|$ pour les $\mu \geqslant 0$ sur E telles que $G\mu \geqslant 1$, $\check{G}$-quasi-partout sur X. Cette fonction a sur la G-capacité l'avantage que sous des conditions très faibles sur G, elle a de nombreuses propriétés; en particulier f vérifie la propriété de croissance fondamentale qui entraîne la f-capacitabilité des K-analytiques.

Quelques années après cet article, Fuglede a étonné le monde potentialiste en démontrant, par une application judicieuse du théorème du minimax le résultat suivant :

Moyennant des conditions assez faibles sur G, la G-capacité et le G-encombrement sont égaux.

c) Travaux avec Deny.

[56] Modèles finis.

Dans notre recherche de ce qu'est finalement une théorie du potentiel, nous avons décidé de commencer par un cas où aucune difficulté d'Analyse ne viendrait obscurcir les faits fondamentaux, et pourtant assez général pour qu'on puisse considérer qu'il constitue une approximation du cas général.

Aussi avons nous entrepris l'étude des noyaux positifs (i.e. des matrices carrées positives) sur un ensemble fini. C'est une brève étude du cas $n = 3$ où la géométrie du triangle (!) rendait de grands services, qui nous encouragea dans cette voie, et nous fut un guide constant.

Nous fûmes récompensés au delà de tous nos espoirs, non seulement en découvrant des liens inattendus entre des principes bien connus : Domination, balayage, équilibre, maximum, énergie, enveloppe inférieure, mais en mettant en évidence des principes nouveaux : principes inverses des anciens, ou principes affaiblis.

Ce travail a été pour nous et pour d'autres une source d'inspiration. Plusieurs mathématiciens japonais ont étendu certains de nos résultats à des noyaux s.c.i. généraux; mais il reste beaucoup à faire. En particulier les principes inverses n'ont été encore que trés peu étudiés pour des noyaux généraux. Voici quelques uns de nos énoncés les plus typiques :

1) Tout noyau non dégénéré G satisfaisant au principe de l'enveloppe inférieure est équivalent par permutation à un noyau G' unique satisfaisant au principe du balayage (donc aussi de domination parce que G est non dégénéré).

2) Si un noyau non dégénéré et ne s'annulant jamais satisfait au principe du balayage faible, il satisfait, soit au principe du balayage ordinaire, soit au principe du balayage inverse.

Enfin, pour la première fois, nous mettions en évidence le rôle de la dualité en théorie du potentiel : Les propriétés de G et $\check{G}$ sont duales. Par exemple [balayage - domination] est un couple dual; le principe de positivité des masses (i.e. $G\mu \geqslant 0$ entraîne $\mu(1) \geqslant 0$) est dual du principe "1 est le potentiel d'une mesure positive".

[61] <u>Aspects linéaires de la théorie du potentiel. Théorème de dualité</u>.

La théorie du potentiel commençait alors à nous apparaître comme l'étude d'un opérateur linéaire positif associé à un espace localement compact, et transformant mesures en mesures (noyau mesure ou noyau diffusion) ou mesures en fonctions (noyau-fonction) ou, en passant au transposé, transformant fonctions en mesures, ou fonctions en fonctions.

Dans cette Note, on considère seulement les noyaux diffusion T transformant $\mathcal{M}_K^+$ en $\mathcal{M}^+$ et dont le transposé est une application linéaire quelconque de $\mathcal{C}_K^+$ dans $\mathcal{C}^+$. On démontre entièrement dans la Note que pour que T (supposé strictement croissant) satisfasse au principe du balayage, il faut et il suffit que T^* satisfasse au principe de domination.

En particulier, sur un groupe abélien localement compact, toute mesure $\alpha \geqslant 0$ définit à la fois un noyau diffusion et un transposé d'un tel noyau. Le théorème précédent montre donc que pour un tel noyau, les deux principes précédents sont équivalents.

[129] Noyaux de convolution et balayage sur tout ouvert.

Ce mémoire développe nos recherches de plusieurs années et apporte la solution du difficile problème suivant : Déterminer sur un groupe abélien localement compact G tous les noyaux de convolution $N \geqslant 0$ admettant un balayage sur tout ouvert (on désigne leur classe par $\mathcal{B}_o$). Les difficultés ne proviennent pas de G ; elles seraient presque les mêmes dans R^3 ; elles sont de divers types et chaque étape demande un effort notable; le théorème de représentation intégrale dans les cônes faiblement complets joue un rôle crucial dans l'une des étapes pour la résolution de l'inégalité $\mu \geqslant \mu * \alpha$; un cas particulier de notre résultat la concernant s'est montré utile en calcul des probabilités et en théorie ergodique; son extension aux groupes non abéliens semble devoir y devenir un outil important (Guivarch, Azencott, Avez). Nous ne pouvons qu'énoncer ici les résultats essentiels. Pour celà, donnons quelques définitions :

Une pseudo-période de N est un $x \in G$ tel que $N * \varepsilon_x$ soit proportionnel à N.

Et N est appelé noyau parfait si $N \neq 0$, s'il existe une famille (σ_i) de mesures positives telles que les mesures $N - N * \sigma_i$ soient positives et à supports compacts arbitrairement voisins de l'origine, et si $\lim_n N * \sigma_i^n = 0$ pour tout i (Exemple : Le noyau newtonien).

Enfin N est <u>élémentaire</u> s'il peut s'écrire $N = k\,(\sum\sigma^n)$; tout noyau élémentaire est parfait.

Voici maintenant les théorèmes :

1) ($N \in \mathfrak{B}_o$ et n'a aucune pseudo-période) $\Longleftrightarrow$ (N est un noyau généralisé de Hunt) $\Longleftrightarrow$ (N est un noyau parfait).

2) Plus généralement $N \in \mathfrak{B}_o$ si et seulement si $N = fK$ où f est une exponentielle continue et K une mesure dont le quotient K/P par le groupe P des périodes de K est, ou bien un noyau élémentaire si P n'est pas compact, ou plus généralement un noyau parfait si P est compact.

Parmi les outils utilisés dans cette étude, je citerai l'inégalité suivante, valable pour tout $N \in \mathfrak{B}$ (i.e. vérifiant le principe du balayage sur tout ouvert borné) :

$$\forall\; X,Y \subset G, \text{ on a } N_*(X)\, N_*(Y) \leqslant N_*(X-X)\, N_*(X+Y),$$

où N_* désigne la N-mesure intérieure; c'est une inégalité très puissante

[136] <u>Noyaux de convolution sous-exponentiels et sur-exponentiels.</u>

Dans ce petit mémoire en cours de rédaction, je démontre plusieurs résultats sur les noyaux de convolution, qui simplifient notablement l'étude de ces noyaux, et met en évidence la classe inattendue des bons noyaux <u>sur-exponentiels</u>; certains de ceux-ci, grâce à une remarque de F. Hirsch concernant le calcul symbolique permettent de fabriquer concrètement à partir d'un noyau de Hunt arbitraire tout un cône d'autres noyaux de Hunt.

Disons qu'un noyau $N \geqslant 0$ sur G est sur-exponentiel s'il existe K compact tel que l'on n'ait $\lim \theta^n N(K_n) = 0$ pour aucun $\theta > 0$ (où $K_{n+1} = K_n + K$); on définit de façon analogue les N sous-exponentiels et les N exponentiels. On montre entre autres les énoncés suivants :

1) Pour tout $N \in \mathfrak{B}$, (N borné) $\Longleftrightarrow$ (N sous-exponentiel)

2) Tout N exponentiel $\in \mathfrak{B}$ s'écrit $N = fN'$, où f est une exponentielle et N' borné $\in \mathfrak{B}$

3) Tout N sur-exponentiel $\in \mathfrak{B}$ est porté par un demi-espace fermé (au sens classique lorsque $G = \mathbb{R}^n$).

4) Pour toute fonction $f > 0$ et log-convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, le noyau N sur $\mathbb{R}$ qui vaut 0 sur $\mathbb{R}_-$, et f sur $\mathbb{R}_+^*$ est dans $\mathfrak{B}_o$ et c'est un noyau de Hunt.

C'est ce dernier résultat qui fournit de vastes cônes de noyaux parfaits. Par exemple dans $\mathbb{R}^3$ tout noyau $\varphi(r)/r$ où φ est complétement monotone, est parfait.

Un autre mémoire en préparation se propose de déterminer toute la classe $\mathfrak{B}$.

IV. Analyse fonctionnelle linéaire.

J'ai souligné déjà que l'esprit de l'Analyse fonctionnelle avait, dès leur début, imprégné mes travaux mathématiques. Ce ne fut toutefois qu'à l'occasion de mes travaux sur les capacités que la nécessité de comprendre ce qu'est une représentation intégrale me fit, pour la première fois, utiliser les espaces vectoriels topologiques. Dès lors mon intérêt pour leur étude, et plus particulièrement l'étude des ensembles convexes, ne se démentit plus.

J'ai parlé déjà de mes travaux sur les convexes compacts, simplexes, représentation intégrale, cônes convexes faiblement complets et mesures coniques; je n'y reviendrai pas.

Mais avant même d'entreprendre ces recherches, l'Analyse fonctionnelle linéaire m'avait [redacted] sollicité deux fois :

[51] Sur le théorème des points-selle et la théorie des jeux.

J'y donnais une nouvelle démonstration du théorème de base de la théorie des jeux; je réussis plus tard dans [105] à donner une démonstration plus élémentaire encore et plus courte, dans le cas de dimension finie.

[55] Ensembles semi-réticulés et ensembles réticulés de fonctions continues (en collaboration avec J. Deny). Dans cet article, motivé par nos recherches de théorie du potentiel, nous établissions plusieurs théorèmes du type Stone-Kakutani concernant des espaces, non pas réticulés, mais semi-réticulés; en particulier nous mettions en évidence pour ces espaces des inégalités analogues à celles de Harnack relatives aux fonctions harmoniques positives. De façon curieuse ce travail, peut-être à cause de la généralité des outils qu'il construisait, attira beaucoup plus l'attention que les travaux de théorie du potentiel, nettement plus profonds, qui l'avaient motivé.

Pour en arriver plus rapidement à quelques travaux plus significatifs, je me contenterai d'une brève mention de plusieurs autres qui, bien que parfois techniquement difficiles, n'ont pas eu jusqu'ici de prolongement ou d'applications :

[92] Sur la meilleure approximation dans les espaces normés

[97] Exposed points of convex sets (avec H. Corson et V. Klee).

Nous y déterminions de façon très précise la classe de Baire de l'ensemble des points exposés des convexes compacts, et nous répondions à des questions antérieures de Klee et Phelps en construisant un convexe compact sans point algébriquement exposé.

[123] Opérations sur les e.v.t. métrisables.

[126] Sur la séparation des cônes faiblement complets

J'y démontre par plusieurs exemples qu'on ne peut pas raisonnablement espérer trouver un théorème de séparation de deux tels cônes si l'un au moins des deux n'est pas localement compact.

[130] Le dual de l'espace B_p de Besicovitch-Marcinkiewicz

L'espace B_p est encore assez mystérieux; mon travail en utilise une décomposition en somme directe de type hilbertien, d'où un théorème de structure du dual, dont un corollaire est que B_p n'est pas réflexif. Je construis un vaste sous-espace du dual (probablement identique au dual).

[133] Frontière-module et représentation intégrale.

Le lien entre la frontière de Silov et la frontière fine (dite de Choquet) associée à un sous-espace $H \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{K})$, où X est un compact, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est fort simple lorsque H est une algèbre. C'est moins simple dans le cas général, même s'il s'agit de fonctions réelles; ce travail, qui complète des travaux d'Hustad, Hersberg, Phelps et Fuhr, éclaircit entièrement cette relation et donne le critère d'existence de la frontière de Silov.

Les démonstrations sont rendus simples et intuitives par l'utilisation du cadre géométrique suivant : B est un convexe compact équilibré d'un e.l.c.s.V; le compact X est un fermé de B qui engendre B, et H est la restriction à X de l'ensemble des formes linéaires dont la restriction à B est continue.

Je donne également le critère d'unicité de représentation des points de la "sphère" de B par des mesures maximales sur B:

C'est que chaque face de B soit un simplexe géométrique.

J'en arrive maintenant à des travaux qui ont eu des prolongements plus importants.

[88] Le problème des moments.

C'est un exposé de Séminaire, de motivation purement pédagogique. Je voulais montrer à de jeunes chercheurs qu'un livre ou un mémoire déjà ancien peut être une occasion de dégager quelques outils jusque là non explicités. J'avais choisi le livre de Shohat et Tamarkin intitulé "The problem of moments". Mon choix était heureux, puisque je réussis à dégager de la démonstration d'existence deux outils intéressants :

Un théorème de prolongement des formes linéaires positives, et une notion nouvelle, celle d'espace adapté de fonctions continues (la question d'unicité m'amena à poser plusieurs problèmes, qui furent résolus ensuite dans mon Séminaire). Je m'aperçus plus tard que le premier (dont Bourbaki déduit actuellement le théorème de Hahn-Banach) était un corollaire d'un énoncé de Namioka; le second devint vite, entre les mains de Mokobodzki et de Sibony un outil simplificateur dans l'étude de leurs axiomatiques de la théorie du potentiel.

Voici de quoi il s'agit : Soit X un espace localement compact, et soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$; nous dirons que X est adapté (sous-entendu "à $\mathcal{K}(X,\mathbb{R})$") si

1) Il n'existe aucun point de X en lequel toutes les f de V s'annulent.

2) Le cône $V^+ = V \cap \mathcal{C}^+(X,\mathbb{R})$ engendre V

3) Toute $f \in V^+$ est <u>dépassée</u> par une autre $g \in V^+$ en ce sens que $f = o(g)$, c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in \mathcal{K}^+(X,\mathbb{R})$ telle que $f \leqslant \varepsilon g + \varphi$.

Par exemple $\mathcal{C}_o(X)$ est toujours adapté ; et $\mathcal{C}(X)$ l'est quand X est dénombrable à l'infini.

Voici alors le théorème-clef :

Toute forme linéaire positive sur V (ordonné par V^+) est représentable par au moins une mesure de Radon positive sur X.

Plus tard je m'aperçus que le concept d'adaptation peut être utile dans des cadres plus généraux; par exemple tout espace $\mathcal{L}^p$ est adapté au sous-espace $\mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^\infty$.

[113] <u>Mesures coniques, affines et cylindriques</u>.

J'ai dit précédemment que c'est en vue des théorèmes de représentation intégrale dans les cônes convexes que j'avais introduit les mesures coniques, qui sont les formes positives sur l'espace h(E) des fonctions continues linéaires par morceaux sur un e.v.t.E. La terminologie adoptée évoque les mesures cylindriques (promesures dans la terminologie de Bourbaki); elle est justifiée par le fait que ces dernières ne sont autres que certaines des formes positives sur l'espace b(E) des fonctions continues bornées et affines par morceaux sur E (mesures affines); de façon précise, ce sont les mesures affines dont l'image sur R par toute $\ell \in E'$ sont des mesures de Radon, i.e. ne chargent pas les points $\pm\infty$; ou encore celles dont l'extension au complété faible de E sont des intégrales de Daniell.

Mais il y a mieux : Les traces des mesures coniques sur les hyperplans affines ne sont autres que les mesures cylindriques ayant des moments du premier ordre.

Ce mémoire étudie d'abord la structure des mesures coniques et affines de façon à en faire un outil commode pour les utilisateurs : Par exemple si E faible est métrisable complet, toute mesure conique est localisable sur un compact; il en résulte que sur tout E faible complet, toute mesure conique est une intégrale de Daniell.

Je détermine sur un espace de Hilbert les mesures coniques et les mesures affines de masse 1 invariantes par rotation; ces dernières constituent un simplexe dont l'ensemble des points extrémaux est homéomorphe à $[0,1]$, ses éléments μ_t pour $t \in]0,1[$ étant les mesures de Wiener-Gauss, et $\mu_0 = \delta_0$, μ_∞ étant représentable comme mesure des angles solides dans E.

Enfin j'établis un lien assez surprenant entre mesures coniques, semi-normes de type négatif, et zonoformes (une généralisation des zonoèdres de Coxeter). Par exemple (à rapprocher des résultats de Krivine), soit f une semi-norme sur un espace vectoriel E; alors f est de type négatif si et seulement s'il existe une mesure conique symétrique μ (forcément unique) sur E^* muni de la topologie $\sigma(E^*,E)$ telle que $f = \phi_\mu$, où $\phi_\mu(\ell) = \mu(\ell^+)$ pour toute $\ell \in E'$.

D'autre part, posons K_μ = ensemble des résultantes des $\nu \leq \mu$; alors K_μ est le polaire de $\{\ell \in E' : \phi_\mu(\ell) \leq 1\}$.

Ces deux énoncés caractérisent les convexes compacts de centre O qui sont des zonoformes (i.e. de la forme K_μ).

Un dernier mot : J'ai parlé plus haut des utilisateurs des mesures coniques; je tiens à mentionner parmi eux Lucien Le Cam qui, dans sa récente axiomatisation de la théorie statistique de la décision, fait des mesures coniques de résultante 1 sur $\mathbb{R}_+^I$ l'outil caractéristique des "expériences".

[120-121] <u>Determination and study of positive forms on spaces of functions</u>.

Depuis longtemps j'ai été attiré par l'étude des mesures positives et des formes linéaires positives. Déjà dans [49] je donnais en (26,6) ce qui fut sans doute la première définition des mesures de Radon sur un espace topologique séparé quelconque, et je donnais quelques indications sur la façon de les étudier; dans [124-125] j'ai développé ces indications et obtenu une présentation de ces mesures qui me parait plus directe que les présentations basées sur les limites projectives de mesures à support compact.

Dès 1964, je cherchai une représentation concrète des formes linéaires positives sur des espaces arbitraires de fonctions; je compris qu'il fallait utiliser une compactification au moyen d'ultrafiltres, mais ce n'est qu'en 1970 que je pensai à combiner ultrafiltres et quotients de fonctions, ce qui me conduisit à créer la notion de sous-mesure, essentielle pour la représentation que je cherchais.

Pratiquement tous les chercheurs qui ont étudié les formes positives sur des espaces V de fonctions numériques (sur un ensemble E) ont été hypnotisés par celles qui sont représentables par une mesure sur l'ensemble de départ ou sur un ensemble associé (voir le problème des moments ou les diverses théories abstraites de la mesure). Mais deux examples simples montrent que ceci n'est pas toujours possible :

1) V_1 est l'algèbre des polynômes réels $p(x)$ sur $\mathbb{R}^+$ s'annulant en 0; la forme linéaire positive cherchée est $p \longrightarrow p'(0)$.

2) V_2 est l'espace vectoriel des polynômes du second degré $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ sur $\mathbb{R}$; la forme linéaire cherchée est $p \longrightarrow a_2$.

Dans ces deux cas, en utilisant des limites des quotients $p(x)/x$ et $p(x)/x^2$, on retrouve la possibilité de représentations en termes de mesures de Radon. C'est cette idée que j'ai systématisée dans le cas le plus général.

Disons d'abord qu'un compact E est <u>sous-stonien</u> si pour tous K_σ ouverts disjoints ω_1 , ω_2 de E, les fermetures de ces ouverts sont disjointes. On montre que ces compacts ont l'excellente propriété caractéristique suivante : Le sous-ensemble $\mathcal{D}(E)$ de $\mathcal{C}(E,\overline{\mathbb{R}})$ constitué par les f finies sur un ouvert dense de E, est une algèbre avec "sous-quotients". Voilà alors les étapes :

1) Par une technique du type-Stone, on montre que tout espace vectoriel de fonctions numériques sur un ensemble E (définies modulo certains ensembles négligeables) est canoniquement isomorphe à un sous-espace de $\mathcal{D}(E)$, où E est un compact sous-stonien associé à X.

2) Soit E un compact sous-stonien, et V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(E)$ tel que $V = V_+ - V_+$. Une forme positive T sur V est appelée une <u>sous-mesure</u> s'il existe une $f \in \mathcal{D}^+(E)$ et une $\mu \in \mathcal{M}^+(E)$ portée par le support de f telle que $T(g) = \mu(g/f)$ pour tout $g \in V^+$.

Ces sous-mesures constituent l'outil essentiel de la représentation cherchée, et le développement de la théorie montre que c'est un outil simple et bien adapté à son rôle; voici quelques énoncés types où, pour simplifier, on a supposé V héréditaire (on montre que ce n'est d'ailleurs pas une véritable restriction).

- Tout $T \in V_+^*$ est une somme de sous-mesures deux à deux étrangères.

- On peut définir l'absolue continuité d'une T' par rapport à une T. On a alors un théorème de Radon-Nikodym lorsque V contient une partie dénombrable cofinale (sinon c'est faux en général).

- Tout élément extrémal de V_+^* est une sous-valuation; la réciproque peut être fausse, mais quand V est une algèbre, les valuations sur V sont identiques aux formes multiplicatives, et chacune d'elles est extrémale.

- Toute $T \in V_+^*$ possède une décomposition unique en trois éléments T_0, T_∞, T_m, où T_0 a son support dans l'ensemble Z des zéros communs aux f de V (elle mesure les valeurs infiniment petites) où $T_\infty(f) = 0$ pour toute f bornée (elle mesure les valeurs infiniment grandes), et où T_m est une mesure de Radon sur un ouvert de E. Evidemment T_0 et T_∞ ne sont jamais des intégrales de Daniell.

Cette décomposition montre clairement pourquoi on ne peut pas se borner à l'étude des mesures, abstraites ou non.

L'introduction des quotients pour représenter des formes linéaires ne semble pas devoir se limiter au cas des formes positives. Les distributions au sens de Schwartz peuvent, elles aussi, se représenter au moyen de quotients, et il semble probable qu'il en est de même d'êtres mathématiques plus généraux qui seraient aux distributions ce que les formes linéaires positives sont aux mesures positives.

[131] Solution d'un problème sur les itérés d'un opérateur positif sur $\mathcal{C}(K)$ et propriétés ergodiques associées (avec C. Foïas).

C'est la solution d'un problème que j'avais posé en 1955 et que j'avais résolu alors dans un cas particulier; en 1972 Foïas lui apporta une solution en utilisant un théorème ergodique classique; et finalement, en utilisant une technique de Mokobodzki, je mis sur pied une démonstration extrêmement courte, d'autant plus inattendue que le théorème avait jusque là semblé à plusieurs chercheurs fort caché, et peut-être même inexact. Voici le théorème :

Soient K un espace compact, et T un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{C}(K)$. Alors, si pour tout $x \in K$ il existe un entier n tel que $T^n1(x) < 1$, la suite des T^n1 converge uniformément vers 0.

On a un énoncé analogue en remplaçant le signe $<$ par $>$, et 0 par $+\infty$.

Parmi les conséquences de cet énoncé, citons celle-ci :

Soit $\varphi \in \mathcal{C}(K,K)$ et $\beta \in \mathcal{C}(K)$, et posons $s_n = (\beta + \beta\circ\varphi + \ldots + \beta\circ\varphi^{n-1})/n$.

Alors si la suite des s_n converge simplement vers une fonction continue, la convergence est uniforme.

V. Fonctions de variables réelles.

Ce titre un peu vieillot et peu précis recouvre des directions variées qu'on va examiner successivement, dans l'ordre d'abstraction décroissante.

Théorie des ensembles.

[106] Cardinaux 2-mesurables et cônes faiblement complets.

Cet article, déjà mentionné, établit un lien inattendu entre la grandeur du cardinal d'un ensemble I et le fait que $R_+^{(I)}$ soit ou non complet pour la topologie de la dualité avec R^I. C'est un cas particulier d'un théorème, topologique cette fois, concernant le cône des formes positives sur $\mathcal{C}(E)$ pour un E complètement régulier.

[110 et 111] Constructions d'ultrafiltres sur N et Deux classes remarquables d'ultrafiltres sur N.

Après l'introduction par Henri Cartan en 1937 des notions de filtre et d'ultrafiltre, ce fut surtout Bourbaki qui en fit d'abord un usage systématique; mais pour ce dernier les ultrafiltres étaient construits par l'axiome du choix et sans individualité. Il fallut attendre les logiciens pour voir évoluer ce point de vue : En particulier ils étudièrent les relations entre l'existence d'ultrafiltres et d'autres axiomes tels que l'axiome du choix.

Plus récemment, en 1968, un problème d'Analyse me conduisit à la construction, avec l'hypothèse du continu, de plusieurs classes d'ultrafiltres sur N, aux propriétés fort intéressantes pour l'Analyse.

Peu après Mokobodzki dégagea à son tour la notion de filtre rapide, qui a des liens étroits avec la convergence des séries à termes positifs.

Ces deux mémoires furent à l'origine de plusieurs thèses, à l'étranger et en France; et la classification des ultrafiltres est devenue la source de problèmes stimulants liés au groupe $\{0,1\}^{N}$ et à la structure fine de βN.

Entre autres choses, j'y étudiais les ultrafiltres δ-stables, les ultrafiltres rares, et les ultrafiltres absolus. Ces derniers ne sont autres que les éléments minimaux dans l'ensemble des ultrafiltres non triviaux, ce qui explique leur rôle en logique, dans la recherche des modèles minimaux construits par ultrapuissances.

Mesure

[8 et 9] Préliminaires à une nouvelle définition de la mesure et Choix d'une mesure cartésienne.

J'y propose un raffinement notable de la notion de mesure par l'introduction d'un ordre entre ensembles, basé sur des partitions dénombrables en sous-ensembles équivalents (en divers sens).
Par exemple, pour deux boréliens $A, B \subset R^{n}$, on dira qu'ils ont même masse s'ils admettent des partitions en parties boréliennes A_n, B_n telles que A_n et B_n soient congruentes ou isométriques en un sens plus général.

A cette notion de masse correspondent des notions de variation totale et d'intégrale.

[13 et 24] Sur des ensembles cartésiens paradoxaux et Ensembles singuliers.

Le premier article constitue une réponse à un problème de J. Dieudonné : Existe-t-il un ensemble plan dont le complémentaire soit de mesure nulle sur toute droite $y = k$, et tel que pour tout ensemble L mesurable (pour la mesure linéaire de Caratheodory) et de mesure linéaire nulle sur tout droite $y = k$, $E \cap L$ est une mesure linéaire nulle. La réponse est positive quand on impose aux L d'être boréliens, analytiques ou projectifs, ou de mesure linéaire finie. Autrement dit, dans ce cadre il ne reste rien de l'énoncé de Fubini.

Le second article est une contribution à la théorie de la mesure de Caratheodory-Hahn; je montre, à nouveau avec l'hypothèse du continu, l'existence d'ensembles mesurables pour la mesure linéaire de Carathéodory de mesure infinie, dont tout sous-ensemble analytique est dénombrable, et dont tout sous-ensemble est mesurable et de mesure 0 ou ∞ . Cet exemple permet de préciser la portée de certains énoncés de Carathéodory.

[115] Un ensemble paradoxal en théorie de la mesure.

On y construit, avec l'hypothèse du continu, une application de $[0,1]$ dans lui-même, dont le graphe est négligeable pour toute mesure de Radon sur $\mathbb{R}^2$ ne chargeant aucun point. Cet ensemble, construit pour répondre à une question de L. Schwartz, possède des propriétés précieuses pour la théorie de la mesure et des capacités.

[116] Sur les ensembles uniformément négligeables.

C'est un exposé de Séminaire sur le difficile problème de la caractérisation des espaces de Prohorov : E complètement régulier étant dit de Prohorov si pour toute partie vaguement compacte M de $\mathcal{M}^+(E)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset E$ tel que $\mu(E) - \mu(K) \leq \varepsilon$ pour toute $\mu \in M$.

Cet article construisait plusieurs contre-exemples, donnait des réponses partielles et posait des problèmes. Il stimula plusieurs chercheurs, Roy O. Davies et D. Preiss; le premier donna un exemple de borélien de $[0,1]$ qui n'est pas de Prohorov; et enfin le second montra que parmi les métriques séparables qui sont des complémentaires analytiques, les seuls espaces de Prohorov sont les polonais.

Topologie générale.

[35] Convergences.

Cet article comprend trois parties assez distinctes. La troisième étend le théorème contingent-paratingent de ma thèse. La première est une étude détaillée des relations binaires, en particulier semi-continues, entre deux espaces topologiques. Elle comporte aussi une étude des opérations lim.sup. et lim.inf. d'une famille de parties d'un espace topologique suivant un filtre; son principal intérêt vient de ce que pour éclairer cette étude j'étais conduit à introduire une notion duale de celle de filtre, la notion de grille :

La grille $\mathcal{G}$ associée à un filtre $\mathcal{F}$ sur E est l'ensemble des parties de E qui ne sont pas des complémentaires d'éléments de $\mathcal{F}$; dire que $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ équivaut à dire que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre et les axiomes des grilles sont plus simples que ceux des filtres.

Mais c'est la seconde partie, intitulé "Pseudo-topologies, pré-topologies, et topologies" qui devait éveiller le plus d'échos. J'y introduisais deux types de structures plus faibles que les topologies : Par exemple unepseudo-topologie sur E est la donnée, pour tout $x \in E$, d'un ensemble d'ultrafiltres contenant au moins l'ultrafiltre des sur-ensembles de $\{x\}$; on dit que ces ultrafiltres pseudo-convergent vers x.

Malgré la pauvreté en axiomes, la théorie a un déroulement intéressant. Voici un exemple de théorème :

Soient E un espace topologique séparé, et $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble de ses parties fermées muni de la pseudo-topologie associée aux notions de lim.sup. et lim.inf. Dire que la topologie associée à cette pseudo-topologie est séparée, équivaut à dire que E est localement compact.

[41] <u>Difficultés d'une théorie de la catégorie</u>

Pour un spécialiste, cette Note se suffit à elle-même; on y montre par quelques théorèmes et construction d'exemples, que diverses voies dans lesquelles on pouvait espérer prolonger la théorie classique de la catégorie de Baire (telle qu'elle est présentée dans Bourbaki, par exemple) mènent à des impasses.

Il est vrai que, depuis cette Note, de nombreux travaux ont présenté de tels prolongements ; ils ont parfois une certaine beauté interne, mais n'ont pas eu jusqu'ici de véritables applications à l'Analyse.

Mon exemple le plus frappant était peut-être celui-ci : Pour tout espace métrisable E et toute partie A de E contenant les points isolés de E, il existe une application f de E dans l'espace des fermés d'un compact K, qui est s.c.s., et admet A pour ensemble de points de continuité.

[68] Une classe régulière d'espaces de Baire

Cette Note est née de l'analyse de la démonstration prouvant que $\mathbb{R}^I$ est de Baire quel que soit I, et du désir de sortir de la classe des espaces métriques complets ou localement compacts; j'y réussis en introduisant, pour tout espace topologique E, la notion de tamis sur E : C'est une relation d'ordre entre ouverts non vides, plus forte que l'inclusion, et vérifiant quelques propriétés simples. Un espace E est alors dit tamisable s'il existe sur lui au moins un tamis.

La classe des espaces tamisables est stable par de nombreuses opérations, en particulier les produits quelconques (ce qui est faux des espaces de Baire généraux); or, fait important, ce sont des espaces de Baire.

Un renforcement des axiomes conduit aux espaces fortement tamisables pour lesquels on a le théorème suivant, nullement trivial;

Pour un espace métrisable, être fortement tamisable équivaut à être homéomorphe à un espace métrique complet.

L'intérêt de ce théorème est renforcé par le fait que l'ensemble des points extrémaux de tout convexe compact est fortement tamisable.

[101] G_δ absolus; applications ouvertes ou fermées; et jeux topologiques.

Cet article, écrit en 1966, ne fut pas publié. Après quelques théorèmes standards sur les G_δ absolus, il étudiait les applications fermées ou ouvertes:

1) Dans la classe des espaces topologiques dont tout point a une base dénombrable de voisinages, le fait d'être un G_δ absolu métrisable est stable par surjection continue fermée

2) Dans la classe des espaces paracompacts, même conclusion pour les surjections continues ouvertes.

Ce second résultat est fort caché; j'appris plus tard que, pour la classe des espaces métrisables, il avait été démontré par Hausdorff.

Enfin cet article introduisait un jeu topologique (repris plus tard dans [102]); il s'agit, pour deux joueurs α,β de choisir alternativement un ouvert non vide d'un espace topologique donné E, de telle sorte que la suite des ω_n choisis soit décroissante; en oûtre c'est β qui commence la partie ; on convient que α gagne si l'intersection des ω_n n'est pas vide. E est alors dit α -favorable s'il existe pour α une tactique gagnante.

Cette notion est à rapprocher de celle d'espace tamisable, mais elle est plus imagée et aussi plus souple car on peut supposer plus ou moins complète l'information des joueurs.

[49 et 75] Mes travaux, déjà signalés, sur K-boréliens et K-analytiques.

Topologie des fermés de $\mathbb{R}^n$

[1,3,4] Ces trois Notes concernant l'étude des continus (i.e. compacts connexes) plans. La première énonce sous quelle condition une homéomorphie entre deux continus plans divisant $\mathbb{R}^2$ en deux ouverts peut être prolongée à l'ouvert borné; ce résultat attira l'attention de P. Alexandrow qui avait cherché un tel énoncé. Les deux dernières étudient les continus plans rigides (i.e. dont toute injection continue dans $\mathbb{R}^2$ est la restriction d'une homéomorphie de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même), et en déterminent certaines classes. Par contraste les fermés rigides de $\mathbb{R}^3$ sont uniquement les fermés dénombrables.

[5] Points invariants et structure des continus.

Deux résultats notables :

1) Si f est une homéomorphie du disque fermé unité D de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même, l'ensemble I de ses points fixes est a) Si f est d'indice +1 un fermé non vide quelconque, b) Si f est d'indice -1 un fermé arbitraire F de D situé sur un arc simple de D rencontrant D^* en deux points distincts appartenant à F.

2) Une classification des continus plans sans points intérieurs; en particulier introduction des continus appelés plus tard snake-like, et dont toute automorphie a au moins un point fixe.

[21] <u>Prolongement d'homéomorphies. Ensembles topologiquement nommables.</u> Caractérisation topologique des ensembles fermés totalement discontinus.

La partie la plus intèressante me semble être la définition des parties d'un espace topologique qui sont nommables par une famille donnée d'opérations topologiques; la structure algébrique qui s'en dégage s'apparente à une partie de celle étudiée à la même époque par Krasner sous le nom de théorie de Galois généralisée.

Ces considérations conduisent à l'étude des composantes homogènes d'un espace topologique, et à la détermination d'un système complet d'invariants topologiques pour les sous-compactsde $[0,1]$.

<u>On plane continum no two whise non degenerate subcontinua are homeomorphic</u> (avec R.A. Anderson). On y construit un continu ayant ces propriétés et quelques autres.

<u>Géométrie infinitésimale directe et espaces métriques</u>

[13] <u>L'isométrie des ensembles dans ses rapports avec la théorie du contact et la théorie de la mesure</u>.

Ce travail est né du désir de généraliser la notion de roulement sans glissement à des courbes et surfaces dépourvues de régularité. Cette généralisation, basée sur la notion d'isométrie locale de deux fermés de $\mathbb{R}^n$, est en fait une occasion d'une étude critique de notions classiques. On y étudie par exemple la relation entre la notion de point caractéristique et d'enveloppe d'une famille de droites. On est amené ainsi à reformuler des notions classiques dans un cadre plus général, par exemple pour étudier le "lieu" des centres de courbure d'une courbe convexe de classe C^2, et définir une longueur "algébrique" d'un tel lieu. On est amené aussi à construire des exemples paradoxaux : Par exemple l'un des premiers exemples connus d'un arc simple plan sur lequel existe une fonction numérique non constante à différentielle partout nulle.

L'article se termine par l'étude de l'invariance des mesures de Hausdorff dans une isométrie locale.

14 Etude des espaces métriques par les propriétés de leurs sous-ensembles finis. C'est un gros article (81 pages), riche en résultats cachés; je ne peux en extraire ici que quelques énoncés simples et assez frappants :

1) Si un espace métrique compact n'est pas homéomorphe à un fermé de $[0,1]$, il contient, pour tout $\theta \leqslant \frac{\pi}{3}$, une infinité de triplets isocèles d'angle au sommet θ. (C'est un corollaire d'un lemme topologique assez curieux, qui a bien d'autres applications).

2) Soit E un espace métrique; si tous les sous-ensembles de $(n+2)$ points de E sont plongeables dans l'espace euclidien R^n, ou bien il en est de même de E, ou bien E a exactement $(n+3)$ points, et ceux-ci ont une configuration très spéciale.

3) Disons maintenant qu'un espace métrique est semi-plat si ses petits triplets ont au moins un petit angle (toute géodésigne d'une surface de classe C^1 a cette propriété); on montre alors que pour tout $r > 0$, tout espace métrique séparable semi-plat a une mesure nulle d'ordre $(1+r)$; pour les arcs simples, cet énoncé peut encore être amélioré; enfin sur un arc simple semi-plat il y a une infinité non dénombrable de points où l'arc a une tangente.

Equations différentielles.

[31] Caractérisation topologique des équations différentielles ordinaires $y' = f(x,y)$ admettant un groupe transitif de transformations.

On montre qu'il n'y a que 4 types topologiques de telles équations :
Le premier est celui de l'équation $y' = 0$; les 3 autres sont localement équivalents; pour l'un d'eux, par exemple, une homéomorphie du plan transforme ses

courbes intégrales en l'ensemble des graphes de fonctions croissantes de pentes $\leqslant 1$.

Calcul des variations. Espaces de Finsler.

[17] Etude différentielle des minimisantes dans les problèmes réguliers du calcul des variations.

On y étudie la régularité des minimisantes en fonction de la régularité du ds donné. On montre en particulier que tout arc simple normal (i.e. dont les petits arcs sont équivalents à leur corde) est une géodésique d'un ds strictement convexe; et on donne des conditions suffisantes sur les ds pour que les géodésiques soient de classe C^1.

[18] Problèmes liés à des métriques variationnelles (avec G. Bouligand).

Dans cette note, je proposais une notion simple de volume élémentaire sur une variété munie d'un ds de Finsler; ma définition fut plus tard reprise et développée par Buseman.

[20] Etude métrique des espaces de Finsler. Nouvelles méthodes pour les théorèmes d'existence en calcul des variations.

Le but est ici d'étendre des résultats classiques à des ds de Finsler plus généraux. Je propose par exemple une méthode généralisant celle de Darboux-Kneser. Et j'étudie l'existence de géodésiques sans utiliser la semi-continuité, en me basant sur un théorème d'existence des solutions d'une équation différentielle généralisée.

Aire des surfaces (résultats diffusés, mais non publiés).

Vers 1945, j'ai démontré avec Aronszajn le lemme suivant :

Soit S une rondelle de surface, d'aire de Lebesgue A; partageons sa frontière en 4 arcs consécutifs α, β, γ, δ, et désignons par p,q, les distances géodésiques de α, γ et β, δ respectivement. Alors $pq \leqslant A$.

J'en ai déduit un théorème de structure des surfaces d'aire de Lebesgue finie : Soit S_o l'ensemble des points de S situés sur un arc rectifiable, et soit S_{∞} son complémentaire. Alors la distance géodésique de deux points de S_o est finie ; sa mesure de Hausdorff d'ordre 2 est égale à A, tandis que la mesure de Lebesgue de S_{∞} est nulle. Enfin S_o a des propriétés de différentiabilité qui étendent celles établiespar Goffman pour les graphes.

VI. Travaux variés.

[2] Etude de certains réseaux de routes.

Cette Note, écrite à une époque où l'étude des graphes n'était encore le fait que de quelques amateurs, resta inaperçue près de 20 ans; depuis, son résultat principal a été étendu dans le cadre des "matroïdes".

Elle fournissait un algorithme simple pour déterminer le réseau connexe de longueur minimum contenant les points d'un espace fini muni d'une métrique symétrique.

[27] Cet article répond à une question de G. Kreweras. Il montre que tout graphe isomorphe à son complémentaire a un cardinal infini ou de la forme $4n$ ou $(4n+1)$, et détermine tous ces graphes sur un ensemble ayant un tel cardinal.

[10, 11, 12] Ces trois Notes constituent une étude très détaillée de la topologie des domaines plans, et plus particulièrement des domaines simplement connexes, en vue de la représentation conforme.

On y classifie les points accessibles de la frontière grâce à la "sinuosité" de leurs arcs d'accès, et on montre par exemple que cette sinuosité est bornée lorsque la frontière est localement connexe. On introduit la notion d'homéomorphie régulière, qui généralise la représentation conforme; et la notion de bout premier est clarifiée par l'introduction d'un couple de deux compactifications du domaine.

Enfin on caractérise topologiquement plusieurs ensembles du cercle unité associés aux bouts premiers et à leurs ensembles de points principaux.

[25] On montre que si F est une courbe fermée simple plane, et φ une homéomorphie de F sur une courbe convexe G, l'extension harmonique de φ est aussi une homéomorphie des domaines bornés définis par F et G.

[28] Variétés et corps convexes. Cette courte mise au point se contente d'énoncer quelques uns des résultats de mes recherches sur les courbes, qui se sont étendues sur plusieurs années, mais n'ont jamais été publiées en détail : Ellipsales, solution du problème biscotte-tasse de thé, étude des courbes convexes dont les arcs ayant une longueur λ_o ont des cordes constantes, courbes convexes algébriques dans lesquelles on peut déplacer de façon continue un polygône inscrit régulier donné.

Elle énonce aussi une propriété extrémale intéressante des courbes convexes : Si C_1, C_2 sont deux courbes rectifiables fermées, disons que $C_1 \leqslant C_2$ s'il existe un homéomorphie dilatante de C_1 sur C_2 conservant la longueur des arcs.

Pour cet ordre, toute courbe C est alors majorée par une courbe convexe, et celles-ci (définies à une congruence pres) sont maximales.

En relation avec cet ordre, indiquons encore le résultat curieux suivant du type "problème de Cauchy" : Par toute courbe rectifiable C fermée de R^3 on peut faire passer une rondelle de surface qui est l'image par une isométrie (au sens de Lebesgue) d'une rondelle convexe plane; si la courbe C est convexe, cette rondelle est unique (et évidente).

[34] Théorie des jeux de poursuite

J'ai dit un mot déjà de ce travail non publié, dont j'ai annoncé les résultats dans quelques conférences sur la théorie des jeux.

[80] Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire.

Le titre est assez explicite; il ne s'agit pas là d'un travail pédagogique, mais entièrement mathématique; il a été développé plus tard dans un livre à l'usage des professeurs, que j'analyserai ci-dessous.

VII. Analyse de quelques livres.

[102, 103, 104] Lectures on Analysis. C'est la rédaction enrichie, en 3 volumes, d'un cours fait à Princeton en 1968. J'ai cherché à y réunir les outils qui m'ont paru les plus utiles en théorie du potentiel, en probabilités et analyse harmonique. Il contient, à coté de résultats de base classiques, des contributions personnelles, dont certaines n'avaient pas encore été développées ailleurs.

Cet ouvrage a eu un grand succès, particulièrement auprès de certains théoriciens de la physique.

[124, 125] Positive linear forms in Analysis, en 2 volumes.

Ce cours contient de nombreux résultats originaux, des compléments à [120, 121] , et un exposé nouveau de la théorie des mesures de Radon dans les espaces séparés. J'y utilise plusieurs nouveaux outils commodes tels que conoïdes et mesures de Radon positives à valeurs finies ou infinies.

[100] Outils topologiques et métriques de l'Analyse mathématique

C'est un cours sur quelques outils fins de l'Analyse : Ordinaux, espaces de Baire; ensembles boréliens et analytiques; classification des fonctions. Propriétés fines des primitives et des fonctions à variation bornée. Etude des fonctions multivoques, et des propriétés différentielles des ensembles.

L'enseignement de la géométrie. Ce livre à l'usage des professeurs, a pour origine mon travail [80]. Il développe une axiomatique de la géométrie élémentaire basée sur un petit nombre d'axiomes forts, utilisant des notions intuitives qui font partie de l'expérience concrète de chacun, telles que : Droites, parallèlisme, perpendicularité, distance.

Il parvient, en moins de 140 pages, à retrouver l'essentiel de la géométrie plane, tout en éclaircissant des notions épineuses telles que orientation et angles.

Il a été publié en 8 langues et a inspiré plusieurs livres d'enseignement.

Point final

Voici achevée cette Notice sur mes recherches mathématiques, commencées il y a un peu moins de 40 ans; j'ai pris à sa rédaction un plaisir grandissant, non pas tellement par un sentiment d'auto-satisfaction, que parce que le rappel de la génèse de mes résultats ranimait en moi ces heures d'effort, de création, de déboires ou de succès, qui constituent pour un mathématicien le meilleur de sa vie intellectuelle.

C'est aussi pour mon propre plaisir que j'ai entouré mon bilan mathématique d'une atmosphère anecdotique. Que mes lecteurs me pardonnent cette faiblesse !

Liste des TRAVAUX MATHEMATIQUES *

de

M. Gustave C H O Q U E T

ooo

1938

1 - Etude des homéomorphies planes; Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 17 Janvier 1938.

2 - Etude de certains réseaux de routes; C.R. 31 Janvier 1938.

3 - Prolongement d'homéomorphies; C.R. 28 Février 1938.

1939

4 - Homéomorphies; C.R. 22 Janvier 1940 (Séance du 3 avril 1939)

1941

5 - Points invariants et structure des continus; C.R. 10 Mars 1941.

1942

6*- Isométrie des ensembles et cinématique; C.R. 4 Mai 1942.

7*- Isométrie et roulement sans glissement; C.R. 18 Mai 1942.

8 - Préliminaires à une nouvelle définition de la mesure; C.R. 15 Juillet 1942.

9 - Choix d'une mesure cartésienne Δ . Applications; C.R. 27/7/42.

* Cette liste contient aussi les livres du niveau Recherche; et les 26 Notes aux C.R. qui ont été développées dans un Mémoire sont marquées d'un astérisque.

1943

10 - Structure des domaines plans et accessibilité; C.R. 1/3/43.

11 - Topologie de la représentation conforme; C.R. 8/3/43.

12 - Représentation conforme et Topologie; C.R. 22/3/43/

13 - L'isométrie des ensembles dans ses rapports avec la théorie du contact et la théorie de la mesure; Mathematica, Vol. 20 - 1944, pp. 29-64.

14 - Etude des espaces métriques par les propriétés de leurs sous-ensembles finis; Bulletin Soc. Math. de France 1943, 8 pages.

15 - Caractérisation de la sphère en géométrie infinitésimale directe; Revue Scientifique 1943, pp. 447-452.

1944

16*- Primitive d'une fonction par rapport à une fonction à variation non bornée; C.R. 20 Mars 1944.

17 - Etude différentielle des minimisantes dans les problèmes réguliers du calcul des Variations; C.R. 27 Mars 1944.

18 - Problèmes liés à des métriques variationnelles (en collaboration avec G. BOULIGAND); C.R. 1er Mai 1944.

19 - Sur quelques propriétés de moyenne caractéristiques des fonctions harmoniques et polyharmoniques (en collaboration avec J. DENY) Bulletin Soc. Math. de France 1944 (23 pages).

20 - Etude métrique des espaces de Finsler. Nouvelles méthodes pour les théorèmes d'existence en Calcul des variations; C.R. 13 Novembre 1944.

21 - Prolongement d'homéomorphies. Ensembles topologiquement sommables. Caractérisation topologique individuelle des ensembles fermés totalement discontinus; C.R. 27/11/1944.

1945

22*- Résolution du problème de Fréchet sur la paramétrisation d'arcs doués de tangentes. Généralisation aux variétés à plusieurs dimensions. Paramétrages intrinsèques; C.R. 23/7/1945.

23 - Sur des ensembles cartésiens paradoxaux et la théorie de la mesure; Bulletin Soc. Math. de France 1945, 11 pages.

24 - Ensembles singuliers et structure des ensembles mesurables pour les mesures de Hausdorff; Bulletin Soc. Math. de France 1945, 14 pages.

25 - Sur un type de transformation analytique généralisant la représentation conforme et définie au moyen de fonctions harmoniques; Bulletin des Sc. Mathématiques 1945, 10 pages.

26 - Etude des propriétés tangentielles des ensembles euclidiens à partir de la notion d'invariance par translation (en collaboration avec C. PAUC); Bulletin des sciences mathématiques 1945, 10 pages.

27 - Application à la théorie des réseaux d'un théorème sur la structure des permutations d'un ensemble : J. de Math. et appl. 1945 pp. 161-172.

28 - Variétés et corps convexes; Congrès de l'Association pour l'avancement des Sciences, de 1945, dans l'Intermédiaire des Recherches Mathématiques 1947; pp. 91-93.

29 - Epistémologie du transfini; dans Thésée, Centre Universitaire de documentation, 1945.

30 - Dans "Intermédiaire des recherches mathématiques", nombreuses questions et réponses.

1946

31 - Caractérisation topologique des équations différentielles $y' = f(x,y)$ admettant un groupe transitif de transformations; C.R. 25 Mars 1946.

32*- Application des propriétés descriptives de la fonction "contingent" à la théorie des fonctions de variable réelle et à la théorie différentielle des variétés cartésiennes (thèse soutenue le 16 Mars 1946). Annales de l'Ecole Normale Supérieure 1948, 112 pages.

33 - Sur les notions de filtre et de grille; C.R. 20/1/47. Séance du 23 Décembre 1946.

1947

34 - Théorie des jeux de poursuite (non publié dans un périodique).

1948

35 - Convergences; Annales de l'Université de Grenoble 1948, pp 57-112.

36 - Sur un théorème récent de M. DENJOY; C.R. 24 Mai 1948.

37 - Applications des propriétés descriptives de la fonction "contingent"; Archiv der Mathematik, 1948, pp 464-467.

1949

38* - Lignes de Green et mesure harmonique (en collaboration avec M. BRELOT); C.R. 16 Mai 1949.

1950

39* - Capacitabilité des $K_{\sigma\delta}$; communication à l'International Congress of Mathematicians, Harvard, U.S.A.

40 - Sur les surfaces à courbure négative; dans "Etudes pratiques d'accès à la recherche" publiées par le Centre de Documentation Universitaire, Paris.

1951

41 - Difficultés d'une théorie de la catégorie dans les espaces topologiques quelconques; C.R. 18 Juin 1951.

42 - Espaces et lignes de Green (en collaboration avec M. BRELOT) Annales de l'Institut Fourier 1951, T.3, pp 199-263.

43* - Ensembles boréliens et analytiques dans les espaces topologiques; C.R. 11 Juin 1951.

44* - Les capacités, fonctions alternées d'ensemble; C.R. 22 Octobre 1951.

1952

45* - Capacités. Premières définitions; C.R. 2 Janvier 1952.

46*- Extension et restriction d'une capacité - C.R. 21 Janvier 1952.

47*- Propriétés fonctionnelles des capacités alternées ou monotones C.R. 28 Janvier 1952.

48*- Capacitibilité; Théorèmes fondamentaux; C.R. 18 Février 1952.

1953-1954

49 - Theory of capacities; Annales de l'Institut Fourier 1953-54 T.5, pp. 131-295.

50 - Polynômes harmoniques et polyharmoniques (en collaboration avec M. BRELOT) colloque de Bruxelles sur les équations aux dérivées partielles, du 24 Mai 1954.

1955

51 - Sur le théorème des points-selle et la théorie des jeux; Bulletin des Sciences mathématiques 1955, T. 79, 6 pages.

52 - A plane continuum no two of whose nondegenerate subcontinua are homeomorphic : an application of inverse limits (en collaboration avec R.D. ANDERSON); Proc. Amer. Math. Soc. 1959, pp 347-353.

53 - Fonctions analytiques et surfaces de Riemann; Enseignement Mathématique; t. II, fasc 1-3, 1956, 11p.

1956

54*- Aspects linéaires de la théorie du potentiel. I- Etude des modèles finis (avec J. DENY); C.R. 9 Janvier 1956

55 - Ensembles semi-réticulés et ensembles réticulés de fonctions continues (avec J. DENY); J. de Math. pures et appl. 1956, pp. 179-189.

56 - Modèles finis en théorie du potentiel (avec J. DENY); Journal d'Analyse Mathématique 1956-1957, pp. 77-135.

57*- Unicité des représentations intégrales au moyen de points extrémaux dans les cônes convexes réticulés; C.R. 6 Août 1956.

58*- Existence des représentations intégrales au moyen de points extrémaux dans les cônes convexes; C.R. 20 Août 1956.

59 - Existence des représentations intégrales dans les cônes convexes; C.R. 27 Août 1956.

60 - Les noyaux réguliers en théorie du potentiel; C.R. 15 Août 1956.

61 - Aspects linéaires de la théorie du potentiel. II-Etude des théorèmes de dualité (avec J. DENY); C.R. 3/9/56.

62 - Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes; Séminaire Bourbaki, décembre 1956, 15 pages.

1957

63 - Sur les fondements de la théorie fine du potentiel; Séminaire de théorie du potentiel, Février 1957.

64* - Sur les fondements de la théorie fine du potentiel; C.R. 18 Mars 1957.

65 - Potentiels sur un ensemble de capacité nulle; C.R. 25 Mars 1957.

66 - Le théorème de convergence en théorie du potentiel (avec M. BRELOT); J. Madras Uni., B, 27, n°1, Centenary Number 1957, pp. 277-286.

67 - Les travaux de Nash et Kuiper sur le plongement isométrique des C^1 variétés riemanniennes dans l'espace euclidien; Séminaire Bourbaki de Mai 1957, 147, 11 pages.

1958

68 - Une classe régulière d'espaces de Baire; C.R. 13/1/58.

69 - Capacitabilité en potentiel logarithmique; Académie Royale de Belgique, Avril 1958; pp. 321-326.

70 - L'intégrale d'énergie en théorie du potentiel; Séminaire de Théorie du potentiel 1958-59, 11 pages.

71 - Diamètre transfini et comparaison de diverses capacités; Séminaire de théorie du potentiel 1958-59, 7 pages.

1959

72 - Théorèmes de convergence; Séminaire de théorie du potentiel 1958-1959, 9 pages.

73 - Etude des encombrements et capacités associés à un noyau; Séminaire de théorie du potentiel 1958-1959, 10 pages.

74 - Sur une large classe de noyaux de convolution satisfaisant au principe du maximum; Séminaire de théorie du potentiel 1958-1959, 9 pages.

75 - Ensembles K-analytiques et K-sousliniens. Cas général et cas métrique, Annales de l'Institut Fourier 1959, T.9, pp 75-81.

76 - Forme abstraite du théorème de capacibilité; Annales de l'Institut Fourier 1959, T.9, pp. 83-89.

77 - Sur les points d'effilement d'un ensemble. Application à l'étude de la capacité; Annales de l'Institut Fourier 1959, T.9, pp 91-101.

78 - Sur les G_δ de capacité nulle; Annales de l'Institut Fourier 1959 T.9, pp. 103-109.

1960

79 - Le théorème de représentation intégrale dans les ensembles convexes compacts; Annales de l'Institut Fourier 1960, T.10, pp 333-344.

80 - Recherche d'un axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire, Séminaire d'Aarhus 1960 et Bulletin A.P.M. 1961.

81 - Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$ (avec J. DENY) C.R. 1/2/1960.

82* - Limites projectives d'ensembles convexes et éléments extrémaux; C.R. 4 Avril 1960.

83* - Aspects linéaires de la théorie du potentiel III. Noyaux de composition satisfaisant au principe du balayage sur tout ouvert (avec J. DENY); C.R. 27 Juin 1960.

1961

84 - Représentations intégrales dans les cônes convexes sans base compacte; C.R. 30 Octobre 1960.

1962

85* et 86* Ensembles et cônes convexes faiblement complets I et II - C.R. 12 et 19 Mars 1962.

87 - Le problème des moments; Séminaire d'Initiation à l'Analyse 1962, n°4, 10 pages.

88 - Remarques à propos de la démonstration d'unicité de P.A. MEYER Séminaire de théorie du potentiel 1962, n°8, 13 pages.

89 - Mesures coniques maximales sur les cônes convexes faiblement complets; Séminaire de théorie du potentiel 1962, n°12, 15 p.

90 - Axiomatique des mesures maximales. Application aux cônes faiblement complets; C.R. 2 Juillet 1962.

91 - Etude des mesures coniques. Cônes convexes saillants faiblement complets sans génératrices extrémales; C.R. 16 Juillet 1962.

92 - Frontière associée à un espace vectoriel de fonctions continues à valeurs vectorielles; C.R. 30 Juillet 1962.

93 - Frontière fine réduite. Esquisse du cas localement compact. C.R. 6/8/1962.

94 - Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts (avec P.A. Meyer); Annales de l'Institut Fourier 1963, 17 pages.

95 - Les cônes convexes faiblement complets dans l'Analyse; Congrès International des Mathématiciens, Stockholm 1962, environ 20 p.

1963

96 - Sur la meilleure approximation dans les espaces vectoriels normés, Revue de Maths Pures et appl. Acad. Rép. Popul. Roumanie VIII, 1963, 541-542.

1964

97 - Exposed points of convex sets, avec H. Corson et V. Klee, Pacif. J. of Math. 17, 1966, p.33-43.

98 - Etude des espaces uniformes à partir de la notion d'écart. Ens. Math. 11, 1965, p. 170-174.

1965

99 - Démonstration non probabiliste d'un théorème de Getoor, Ann. Inst. Fourier, 15, 1965, 409-413.

1966

100 - Outils topologiques et métriques de l'Analyse mathématique, Cours rédigé par Claude Meyer, 219 pages, au C.D.U.

101 - G_δ absolus; applications ouvertes et fermées; et jeux topologiques (manuscrit diffusé, mais non publié).

1967

102-103-104- Lectures en Analysis, Cours de Princeton, 3 volumes, chez Benjamin.

105 - Une démonstration élémentaire du théorème du minimax. Ens. Math, T.13, 1967, p. 153-155.

106 - Cardinaux 2-mesurables et cônes faiblement complets Ann. Inst. Fourier, 17, 1967, 383-393.

107 - Sur un théorème de Keldych concernant le problème de Dirichlet, Ann. Inst. Fourier 18, 1968, p. 309-315.

1968

108*- Mesures coniques, affines et cylindriques; structures et opérations. C.R. Mars 68, p. 567.

109*- Mesures coniques et affines invariantes par isométries. Zonoformes, zonoèdres et fonctions de type négatif, C.R. Mars 1968, p. 619.

110 - Construction d'ultrafiltres sur $\mathbb{N}$, Bull. Sci. Math. 92, 1968, p. 41-48.

111 - Deux classes remarquables d'ultrafiltres sur $\mathbb{N}$, Bull. Sci. Math.92, 1968, p.143-153.

112 - Deux exemples classiques de représentation intégrale. Ens. Math. 15, 1969, p.63-75.

113 - Mesures coniques, affines et cylindriques. Inst. alta. Mathematica, Roma 1968, p.145-182.

114 - Géométrie des simplexes, cours rédigé par Goullet de Rugy, 83 pages, au C.D.U.

1969

115 - Un ensemble paradoxal en théorie de la mesure.
Bull. Sci. Math, 94, 1970, p. 247-250.

116 - Sur les ensembles uniformément négligeables.
Séminaire Initiation à l'Analyse 1969-70, n°6, 15 p.

117 - Le caractère faiblement complet des cônes à chapeau universel
Bull. Sci. Math 94, 1970, p.281-288.

1970

118* et 119* Formes linéaires positives sur les espaces de fonctions
I. Espaces sous-stoniens et pseudo-mesures
II. Pseudo-mesures.
C.R. t.271, 1970, p.164 et p. 828.

1971

120-121 Détermination and study of positive forms on spaces of functions I,II
Journal of approx. Theory, 7, 1973, p. 325-333. et 10; 1974,
p. 358-378.

122 - Une propriété des germes suivant un ultrafiltre
Séminaire d'Init. Anal. 1970, C1, 4 pages.

123 - Opérations sur les e.v.t. métrisables, Séminaire Init. Anal. 1970,
C2, 5 pages.

124-125 - Positive linear forms in Analysis (cours à l'Univ. de Maryland)
(à paraître en 2 volumes aux Lecture Notes, Springer).

126 - Sur la séparation des cônes faiblement complets, Séminaire Init. Anal. 1974

127 - Comparaison des effilements dans l'espace et dans un demi-espace
Annales Inst. Fourier 1975.

1972

128 - Résultats récents sur les formes positives sur les espaces de fonctions,
Séminaire Init. Anal. Mars 1972.

1973

129 - Noyaux de convolution et balayage sur tout ouvert, (avec J. Deny) dans "Théorie du potentiel et Analyse harmonique", Springer, Lecture Notes 404, 1974.

130 - Le dual de l'espace B_p de Besicovitch, Sem. Init. Anal. 1974.

131 - Solution d'un problème sur les itérés d'un opérateur positif sur $\mathscr{C}(K)$ et propriétés ergodiques associées (avec C.Foïas), Ann, Inst. Fourier 1975.

1974

132 - Nouvelle démonstration du théorème de Bochner-Weil, Bull. Sci. Math. 1975.

133 - Frontière module et représentation intégrale, Ann. Inst. Fourier 1975.

134 - Problèmes de recherche (recueil) Sem. Init. Anal. 1974.

135 - Sur un théorème du type Banach-Steinhaus pour les convexes topologiques, Sém. Init. Anal. 1974.

136 - Noyaux de convolution sous-exponentiels et sur-exponentiels, (en cours de rédaction).

Séminaires publiés.

Séminaire de Théorie du potentiel (avec Brelot-Deny), depuis 1956.

Séminaire d'Initiation à l'Analyse, depuis 1960.

Livres niveau recherche.

Cours de Topologie et théorie des fonctions, 1961 au C.D.U.

Problèmes de théorie des fonctions et topologie, 1965, au C.D.U.

Outils topologiques et métriques de l'Analyse Mathématique (cours rédigé par Claude Mayer), 1966, au C.D.U.

Géométrie des simplexes (cours rédigé par Goullet de Rugy), 1968, au C.D.U.

Lectures on Analysis (cours de Princeton en 3 volumes), 1968, chez Benjamin.

Déterminacion de formas lineales positivos,... 1973, Université de Barcelone.

Positive linear forms in Analysis (cours de l'Université de Maryland en 1971, en 2 volumes) à paraître aux Lecture Notes, Springer.

Livres d'enseignement.

Cours d'Analyse (niveau maîtrise) en 5 fascicules, 1955, au C.D.U.

Cours de Topologie, 1964, chez Masson.

L'enseignement de la géométrie, 1964, chez Hermann

Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, 1960.

Pédagogie et réflexions sur les mathématiques.

Nombreux petits articles, dont on n'indique ici que les plus significatifs.

- Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire, ch. 5, p. 75-129. dans "L'enseignement des mathématiques", 1955, Delachaux-Niestlé.

- "Les Mathématiques modernes et l'enseignement", dans l'Enseignement des Sciences, 1959, p.26-31.

- Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire, Bulletin de l'Association des professeurs de Mathématiques, 1961.

- L'Analyse et Bourbaki, dans l'Enseignement Mathématique, 1962, p. 109-135.

- Formation des chercheurs de Mathématiques (conférence de l'Union Balkanique des Mathématiciens 1972), publiée dans Chantiers de pédagogie de l'A.P.M. 1973, p.72-83.

- Participation à de nombreuses conférences internationales sur l'enseignement des mathématiques aux niveaux secondaire et universitaire (O.C.D.E., Bombay, Aarhus, Royaumont, Bogota, Lausanne, Dubrovnik, Belgrade, Luxembourg, Crête).