Proximalité propre en courbure négative

Camille Horbez

CNRS - Université Paris-Saclay

Travail en commun avec
Jingyin Huang (Ohio State University)
Jean Lécureux (Université Paris-Saclay)

Contexte

Soit G un groupe infini dénombrable. Soit X un espace de probabilité standard (i.e. $([0,1], \mathrm{Leb})$ et/ou un nombre fini ou dénombrable d'atomes). Soit $G \curvearrowright X$ une action ergodique, essentiellement libre, préservant la mesure de probabilité (*action ergodique standard*).

Exemple 1 : Action de Bernoulli
$G \curvearrowright \{0,1\}^G$, action par décalage, préserve $\mu = \left(\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1\right)^{\otimes \mathbb{N}}$.

Exemple 2 : Action d'un groupe résiduellement fini sur sa complétion profinie

- Un groupe G est *résiduellement fini* s'il existe une suite $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots$ de sous-groupes d'indice fini tels que $\cap G_n = \{1\}$.
- Sa *complétion profinie* $(\widehat{G}, \mu)$ est la limite inverse des $(G/G_n, \mu_n)$, où μ_n est la mesure uniforme.

Le point de vue de la théorie mesurée des groupes

Question

Dans quelle mesure la structure orbitale de $G \curvearrowright X$ détermine-t-elle l'action (et en particulier le groupe G) ?

Deux actions $G \curvearrowright X$ et $H \curvearrowright Y$ sont *conjuguées* s'il existe un isomorphisme d'espaces mesurés $f : X \to Y$ et un isomorphisme $\theta : G \to H$ tel que pour tout $g \in G$ et presque tout $x \in X$, on ait $f(gx) = \theta(g)f(x)$.

Deux actions $G \curvearrowright X$ et $H \curvearrowright Y$ sont *orbitalement équivalentes* s'il existe un isomorphisme d'espaces mesurés $f : X \to Y$ tel que pour presque tout $x \in X$, on ait $f(G \cdot x) = H \cdot f(x)$.

Le point de vue de la théorie mesurée des groupes

Définition

L'action $G \curvearrowright X$ est OE-superrigide si toute action $H \curvearrowright Y$ qui lui est orbitalement équivalente, lui est en fait virtuellement conjuguée.

Deux actions $G \curvearrowright X$ and $H \curvearrowright Y$ sont *virtuellement conjuguées* s'il existe des sous-groupes d'indice fini $G^0 \subseteq G$ et $H^0 \subseteq H$, des sous-groupes distingués finis $F_G \trianglelefteq G^0$ et $F_H \trianglelefteq H^0$, et des actions $G^0 \curvearrowright X_0$ et $H^0 \curvearrowright Y_0$ telles que les actions $G^0/F_G \curvearrowright X_0/F_G$ et $H^0/F_H \curvearrowright X_0/F_H$ soient conjuguées, et les actions originelles de G et H sont induites de celles de G^0 and H^0.

Théorème (Ornstein–Weiss)

Deux actions ergodiques standard de groupes moyennables sont toujours orbitalement équivalentes.

Le point de vue des algèbres d'opérateurs

À toute action ergodique standard $G \curvearrowright X$, on associe une algèbre de von Neumann $L^\infty(X) \rtimes G$, obtenue par la construction de Murray–von Neumann.

- $G \to \mathcal{U}(L^2(X) \otimes \ell^2(G))$, $g \mapsto u_g = (\sigma_g, \lambda_g)$;
- $L^\infty(X) \to \mathcal{U}(L^2(X) \otimes \ell^2(G))$;
- $u_g F u_g^* = \sigma_g(F)$ pour tout $F \in L^\infty(X)$ et tout $g \in G$

$L^\infty(X) \rtimes G$ est la sous-algèbre de von Neumann engendrée par $\{Fu_g | F \in L^\infty(X), g \in G\}$.

La sous-algèbre $L^\infty(X)$ est une *sous-algèbre de Cartan*, i.e. maximale abélienne et son normalisateur engendre $L^\infty(X) \rtimes G$.

Théorème (Singer)

Deux actions ergodiques standard $G \curvearrowright X$ et $H \curvearrowright Y$ sont orbitalement équivalentes si et seulement s'il existe un isomorphisme $f : L^\infty(X) \rtimes G \to L^\infty(Y) \rtimes H$ tel que $f(L^\infty(X)) = L^\infty(Y)$.

Le point de vue des algèbres d'opérateurs

Définition

L'action $G \curvearrowright X$ est W^*-superrigide si pour toute action ergodique standard $H \curvearrowright Y$ d'un groupe dénombrable, si $L^\infty(X) \rtimes G \approx L^\infty(Y) \rtimes H$, alors les actions sont virtuellement conjuguées.

Popa–Vaes : Unicité de la sous-algèbre de Cartan pour les actions ergodiques standard de groupes hyperboliques.

Houdayer–Popa–Vaes, Chifan–Ioana–Kida : Exemples de groupes dont toutes les actions sont W^*-superrigides.

Proximalité propre

Boutonnet, Ioana et Peterson ont introduit la notion de *proximalité propre* d'un groupe dénombrable.

Théorème (Boutonnet–Ioana–Peterson)

Soit G un groupe dénombrable **proprement proximal**. *Alors pour toute action ergodique standard $G \curvearrowright X$, la sous-algèbre $L^\infty(X)$ est l'unique sous-algèbre de Cartan* **faiblement compacte** *de $L^\infty(X) \rtimes G$.*

Une action de groupe $G \curvearrowright X$ est *compacte* si l'image de G dans $\mathrm{Aut}(X)$ est compacte. Les actions profinies sont compactes.

Proximalité propre

Définition

Une action ergodique standard **compacte** $G \curvearrowright X$ *est* W^*_c*-superrigide si pour toute action ergodique standard* **compacte** $H \curvearrowright Y$, *si* $L^\infty(X) \rtimes G \approx L^\infty(Y) \rtimes H$, *alors les actions sont virtuellement conjuguées.*

En résumé

Soit G un groupe dénombrable tel que :

1. toute action ergodique standard de G est OE-superrigide;
2. G est proprement proximal.

Alors toute action ergodique standard compacte de G est W_c^*-superrigide.

Bonus (Boutonnet–Ioana–Peterson)

Si de plus G est faiblement moyennable, alors toute action ergodique standard de G est W^*-superrigide.

Proximalité propre : définition et énoncés des résultats

Proximalité propre : définition

Définition (Boutonnet–Ioana–Peterson)

Un groupe dénombrable G est proprement proximal s'il existe des G-espaces compacts métrisables $K_1, \dots, K_\ell$, et pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, une mesure de probabilité diffuse η_i on K_i, de sorte que

1. *pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, il n'y a pas de mesure de probabilité G-invariante sur K_i,*
2. *pour tout ultrafiltre non principal ω sur G, il existe $i \in \{1, \dots, \ell\}$ tel que pour tout $h \in G$, on ait*

$$\lim_{g \to \omega} (g(h \cdot \eta_i) - g \cdot \eta_i) = 0$$

en topologie faible-$*$.

Un critère suffisant : Dynamique nord-sud prépondérante

Lemme

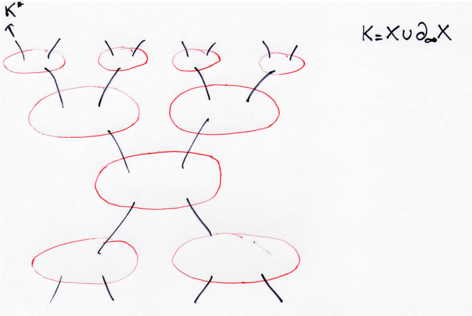
Soit G un groupe dénombrable. Soit K un espace compact métrisable muni d'une action de G par homéomorphismes qui ne préserve pas de mesure de probabilité. Soit $K^* \subseteq K$ un sous-ensemble borélien de K tel qu'il existe une mesure de probabilité diffuse λ sur K vérifiant $\lambda(K^*) = 1$. Supposons :

($*$) *Pour toute suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G, il existe une sous-suite $(g_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\xi^-, \xi^+ \in K$ tels que pour tout $\xi \in K^* \setminus \{\xi^-\}$, on ait $g_{\sigma(n)}\xi \to \xi^+$.*

Alors G est proprement proximal.

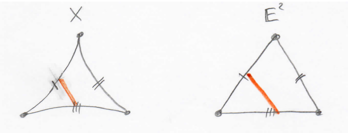
Un exemple emblématique

$G = \mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}$; $\partial_\infty X$: rayons géodésiques dans X modulo "être à distance de Hausdorff bornée"



Généralisation : les groupes $\mathrm{CAT}(0)$ de rang 1

Espace $\mathrm{CAT}(0)$: les triangles géodésiques sont *plus fins* que des triangles euclidiens.



Soit G un groupe agissant sur un espace $\mathrm{CAT}(0)$. Un élément $g \in G$ est *de rang* 1 s'il admet un axe de translation qui ne borde pas de demi-plan.

Théorème (Papasoglu–Swenson, H–Huang–Lécureux)

Soit G un groupe dénombrable qui agit proprement, non élémentairement, par isométries sur un espace $\mathrm{CAT}(0)$ propre X avec une isométrie de rang 1.
Alors G est proprement proximal.

Résultats connus

Les groupes (dénombrables) suivants sont proprement proximaux :

- $SL(n, \mathbb{Z})$, $n \geq 2$ (Boutonnet–Ioana–Peterson)
- Groupes (relativement) hyperboliques (BIP)
- Groupes $\mathrm{CAT}(0)$ de rang 1 (HHL [Papasoglu–Swenson])
- Groupes ayant une action propre non élémentaire sur un complexe cubique $\mathrm{CAT}(0)$ de dimension finie (HHL [Caprace–Sageev])
- Groupes ayant une action propre, minimale, non élémentaire sur un immeuble affine épais localement fini (HHL)
- Groupes modulaires $\mathrm{Mod}(S_{g,n})$, avec $3g + n \geq 4$ (HHL) ; plus généralement, tout sous-groupe qui a une action non élémentaire sur le graphe des courbes

Stabilité par :

- Produit fini (Boutonnet–Ioana–Peterson)
- Commensurabilité (Boutonnet–Ioana–Peterson), équivalence mesurée, W^*-équivalence (Ishan–Peterson–Ruth)

Proximalité propre des groupes modulaires de surfaces ($3g + n \geq 4$)

Théorème (Kida)

Toute action ergodique standard de $\mathrm{Mod}(S_{g,n})$ *est OE-superrigide.*

Théorème (H–Huang–Lécureux)

Le groupe $\mathrm{Mod}(S_{g,n})$ *est proprement proximal.*

Théorème (Grossman)

Le groupe $\mathrm{Mod}(S_{g,n})$ *est résiduellement fini.*

Proximalité propre des groupes modulaires de surfaces

Soit $S = S_{g,n}$, $\mathrm{Mod}(S) = \mathrm{Homeo}^+(S)/\mathrm{Homeo}_0(S)$.

Le groupe $\mathrm{Mod}(S)$ agit par isométries sur le *graphe des courbes* $\mathcal{C}(S)$:

- Sommets : classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles sur S
- Arêtes : existence de représentants disjoints

Théorème (Masur–Minsky)

Le graphe $\mathcal{C}(S)$ est hyperbolique au sens de Gromov.

Klarreich : Le bord de Gromov $\partial_\infty \mathcal{C}(S)$ est décrit en termes de laminations minimales remplissantes sur S.

La compactification hiérarchique (Behrstock–Hagen–Sisto)

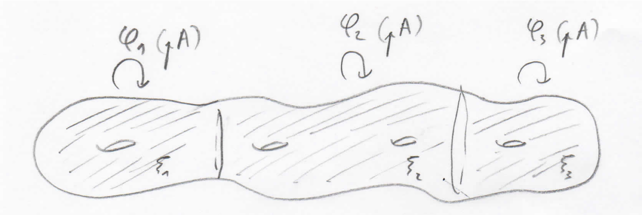
Idée : Behrstock, Hagen et Sisto construisent une compactification K de $\mathrm{Mod}(S)$ dans laquelle $K^* = \partial_\infty \mathcal{C}(S)$ se plonge, mais aussi $\partial_\infty \mathcal{C}(\Sigma)$ pour toute sous-surface essentielle $\Sigma \subseteq S$.

Un point de K est représenté par une somme formelle $\lambda_1\xi_1 + \cdots + \lambda_k\xi_k$, où $\xi_i \in \partial_\infty \mathcal{C}(\Sigma_i)$, où $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_k$ sont des sous-surfaces 2 à 2 disjointes de S, avec $\sum \lambda_i = 1$.

Le point délicat de la construction de Behrstock, Hagen et Sisto est de munir K d'une topologie compacte.

Nous vérifions le critère de dynamique nord-sud prépondérante dans cette compactification.

La compactification hiérarchique (Behrstock–Hagen–Sisto)



Pour tout $\xi \in \partial_\infty \mathcal{C}(S)$, on a $\Phi^n \cdot \xi \to \lambda_1 \xi_1 + \cdots + \lambda_k \xi_k$.

Les λ_i mesurent les vitesses respectives d'avancée dans les graphes des courbes $\mathcal{C}(\Sigma_i)$.

Un autre cadre où nous pouvons combiner OE-superrigidité et proximalité propre.

Groupes d'Artin–Tits

Soit $n \geq 4$, et soit Γ un n-cycle dont chaque arête $x_i - x_j$ est étiquetée par un entier $m_{ij} \geq 3$.

Soit G_Γ le groupe défini par la présentation suivante :

$$G_\Gamma = \langle x_1, \dots, x_n | \forall i, \underbrace{x_i x_j x_i \cdots}_{m_{ij}} = \underbrace{x_j x_i x_j \cdots}_{m_{ij}} \rangle.$$

Théorème (H–Huang)

Toute action ergodique standard de G_Γ est OE-superrigide.

Groupes d'Artin–Tits

Théorème

- *(Brady–McCammond) Le groupe G_Γ agit proprement sur un espace $\mathrm{CAT}(0)$ avec une isométrie de rang 1.*
- *Donc G_Γ est proprement proximal.*

Corollaire

Toute action ergodique standard compacte de G_Γ est W^*_c-superrigide.

Bonus

Supposons de plus que toutes les étiquettes $m_{ij} \geq 4$.

- *(Haettel) G_Γ agit proprement, non élémentairement, sur un complexe cubique $\mathrm{CAT}(0)$ propre de dimension finie.*
- *(Guentner–Higson) Donc G_Γ est faiblement moyennable.*
- *Toute action ergodique standard de G_Γ est W^*-superrigide.*

Merci pour votre attention !