Un exemple de groupe quantique localement compact de type III

Pierre FIMA
Mémoire de DEA sous la direction de Leonid VAINERMAN
DEA de Mathématiques de Paris 7, année 2003-2004

Je tiens à remercier sinçèrement Stefaan VAES *et Leonid* VAINERMAN *pour leur aide, leurs explications, et leur patience.*

Table des matières

1 Introduction

La notion de groupe quantique localement compact, introduite par J. Kustermans et S. Vaes dans [17] (voir aussi [16] et [18]), est le résultat de nombreuses années de recherche et se base sur les travaux de G. Kac et L. Vainerman [15], M. Enock et J.-M. Schwartz [10], S. Baaj et G. Skandalis [2], S.L. Woronowicz [31] et A. Van Daele [28].

L'une des motivations dans le développement de la théorie des groupes quantiques localement compacts est la dualité des groupes. Si G est un groupe abélien localement compact alors l'ensemble des caractères continus de G peut être muni d'une structure de groupe localement compact appelé groupe dual de G et noté $\hat{G}$. Le théorème de Pontryagin dit que le bidual de G est canoniquement isomorphe au groupe original G. Cependant, la généralisation de ce type de résultat au cas non-abélien pose des problèmes. Il est alors intéressant de trouver une catégorie auto-duale contenant tous les groupes localement compacts. Kac, en 1961 [12, 13], définit une nouvelle structure (ring group) contenant en un certain sens les groupes localement compacts unimodulaires et leurs objets duaux. Il était possible avec cette structure d'obtenir une dualité généralisant la dualité de Pontryagin. C'est en 1973 que Kac et Vainerman [15] et indépendamment Enock et Schwartz [10] définissent une catégorie auto-duale contenant tous les groupes localement compacts. Ces objets sont aujourd'hui appelés algèbres de Kac. Puis, une seconde étape dans le développement de la théorie des groupes quantiques localement compacts est franchie après les travaux de Drinfel'd [9], Jimbo [11] et Woronowicz [30, 29]. On obtient de nouveaux exemples qui ne sont pas des algèbres de Kac. Finalement, un ensemble satisfaisant d'axiomes est donné par Kustermans et Vaes.

Une autre motivation importante est apparue dans l'étude des sous-facteurs. Si M est un facteur II_1 et G un groupe fini agissant extérieurement sur M alors l'algèbre des points fixes M^G est un sous-facteur de M. Le sous-facteur $M^G \subset M$ est irréductible, de profondeur 2. Il est alors naturel de se demander si tous les sous-facteurs irréductibles, de profondeur 2 sont de cette forme. Bien que ce ne soit pas le cas, le théorème d'Enock et Nest dit que tout sous-facteur irréductible, de profondeur 2, satisfaisant une bonne condition de régularité, est de la forme $M^{\mathcal{G}} \subset M$ où $M^{\mathcal{G}}$ est l'algèbre des points fixes pour l'action extérieure d'un groupe quantique localement compact $\mathcal{G}$ sur M.

Afin d'obtenir des groupes quantiques localement compacts les plus éloignés possible des groupes on cherche les exemples les moins commutatif et cocommutatif possibles, c'est à dire tels que l'algèbre de von Neumann sous-jacente soit un facteur et l'algèbre du dual soit également un facteur. On connait un tel exemple autodual qui est de type I_∞ (voir [27] section 5.3). Il existe également un exemple qui n'est pas cocommutatif et tel que l'algèbre soit un facteur de type II_1 ; c'est le groupe quantique libre $A_{u(n)}$ de Banica [5]. Cependant, le dual n'est évidemment pas un facteur car, $A_{u(n)}$ étant compact, son dual est une somme infinie d'algèbres de matrices. Il est clair qu'il n'existe pas de groupe quantique tel que l'algèbre soit un facteur de type I_n car, étant de dimension finie, l'algèbre de Hopf se décompose en une somme directe de matrice et comme la counité fournit une représentation dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ apparait toujours dans la décomposition. Pour le type III aucun exemple non-trivial (c'est à dire ni commutatif ni cocommutatif) n'a encore été traité. Le but de ce mémoire est de construire, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, un groupe quantique localement compact dont l'algèbre est un facteur de type III_λ et l'algèbre du dual est encore un facteur. Nous verrons également que le groupe quantique obtenu est semi-régulier mais n'est pas régulier. L'exemple présenté ici est dû à S. Vaes et est une modification de l'exemple 4.2 dans [4].

Nous utiliserons le biproduit croisé pour construire cet exemple. Cette construction provient des travaux de Kac [14]. Elle a ensuite été reprise et généralisée par Takeuchi [25], Majid [20, 21]. On la retrouve également dans Baaj et Skandalis [3], Vaes et Vainerman [27] et Baaj, Skandalis, Vaes [4] (la liste est non-exhaustive).

Dans la seconde partie nous rappelerons toutes les notions et résultats qui nous servirons pour la suite. En particulier nous donnerons les définitions des différentes constructions de groupes localement compacts qui interviennent dans ce mémoire. Nous rappelerons également la définition du corps $\mathbb{Q}_p$, des produits tensoriels infinis d'espaces de Hilbert et d'algèbres de von Neumann. Puis nous donnerons les resultats fondamentaux concernant la théorie des poids et la classification des facteurs. Enfin nous définirons les groupes quantiques localement compacts et la construction du biproduit croisé.

Dans la troisième partie nous présenterons en détail notre exemple de groupe quantique localement compact.

2 Préliminaires

2.1 Constructions de groupes localement compacts

2.1.1 Produit restreint

Soient $\{G_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ une famille de groupes localement compacts et $K_n \subset G_n$ un sous-groupe compact ouvert. Le produit restreint des G_n relativement aux K_n est :

$$\prod{}' (G_n, \mathbb{K}_n) = \bigcup_n G_1 \times \ldots \times G_n \times \left(\prod_{k \geq n+1} K_k \right).$$

C'est un sous-groupe localement compact et ouvert du produit des G_n. Si chaque G_n est à base dénombrable d'ouverts alors $\prod' (G_n, K_n)$ l'est aussi.

Soient $\{(X_n, \mu_n),\ n \in \mathbb{N}\}$ une famille d'espaces mesurés et $Y_n \subset X_n$ un sous-ensemble mesurable tel que $\mu_n(Y_n) = 1$. On définit l'espace mesuré :

$$Z_n = \left(\prod_{i=1}^{n} (X_n, \mu_n) \right) \times \left(\prod_{k \geq n+1} (Y_n, \mu_n) \right).$$

Le dernier produit a un sens car les (Y_n, μ_n) sont des espaces de probabilité. Soit alors :

$$X = \bigcup Z_n.$$

X est un espace mesuré sur lequel on définit une mesure μ par :

$$\mu(S) = \lim_n \mu_n(S \cap Z_n) \qquad S \subset X \ \text{ mesurable.}$$

On note $(X, \mu) = \prod' (X_n, Y_n, \mu_n)$. Si chaque X_n est standard, Y_n est compact et μ_n est régulière, le produit des mesures sur Z_n est au sens des mesures régulières et la mesure μ sur l'espace standard X est régulière.

Revenons aux groupes G_n. Soit μ_n la mesure de Haar à gauche (respectivement à droite) sur G_n normalisée à 1 sur K_n alors la mesure μ définie sur $\prod' (G_n, K_n)$ telle que :

$$(G, \mu) = \prod{}' (G_n, K_n, \mu_n)$$

est une mesure de Haar à gauche (respectivement à droite).

2.1.2 Produit semi-direct

Soient G et H deux groupes localement compacts. Soit α une action de G sur H i.e. α est un morphisme de groupes $G \to \mathrm{Aut}(H)$, $g \mapsto \alpha_g$, où $\mathrm{Aut}(H)$ désigne les automorphismes de H, tel que l'application $G \times H \to H$, $(g, s) \mapsto \alpha_g(s)$ soit continue. Le produit semi-direct $G_\alpha \ltimes H$ de G par H sous l'action α est comme espace topologique $G \times H$. La condition de continuité sur l'action α assure que la loi de groupe : $((g, s)(h, t) = (gh, s\alpha_g(t))$ fait de $G_\alpha \ltimes H$ un groupe topologique.

Donc $G_\alpha \ltimes H$ est un groupe localement compact et, si G et H sont à base dénombrable d'ouverts, $G_\alpha \ltimes H$ l'est aussi.

Considérons maintenant μ_G et μ_H deux mesures de Haar à droite sur G et H respectivement. Une application directe du théorème de Fubini prouve que la mesure produit $\mu = \mu_G \times \mu_H$ sur $G_\alpha \ltimes H$ est une mesure de Haar à droite.

2.2 Le corps des nombres p-adiques et ses mesures de Haar

Une bonne référence pour cette section est [22].

2.2.1 Corps valués

Valeurs absolue Soit $(K, |-|)$ un corps valué. On rappelle qu'une valeur absolue est dite ultramétrique si :

$$|x + y| \leq \max\{|x|,\, |y|\}.$$

Dans ce cas elle vérifie la propriété suivante. Si x et y ont des valeurs absolues distinctes, $|x - y| = \max\{|x|,\, |y|\}$. Autrement dit, tout triangle est isocèle. De plus, deux boules de même rayon sont soit disjointes soit égales. En effet, soient deux boules ouvertes B_1 et B_2 de rayon r et de centres respectifs a_1 et a_2. Si, par exemple, $x \in B_1$ et $a \in B_1 \cap B_2$, alors $|a_2 - x|p = |(a_2 - a) + (a - x)|_p \leq \max\{|(a_2 - a)|p,\, |(a - x)|_p\} < r$.

Losque $(K, |-|)$ est valué ultramétrique, la boule de centre 0 et de rayon 1 est un sous-anneau par la propriété d'ultramétricité.

On rappelle que deux valeurs absolue $|-|_1$ et $|-|_2$ sur un corps K induisent la même topologie si et seulement si il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $|-|_2 = |-|_1^\alpha$.

Module d'un corps localement compact Soit K un corps (commutatif) localement compact et μ une mesure de Haar additive sur K. Si $x \in K^*$, la mesure μ_x définie sur les boréliens par $\mu_x(A) = \mu(xA)$ est une mesure de Haar additive. Il existe donc un réel $m(x) > 0$ (indépendant du choix de μ) tel que $\mu_x = m(x)\mu$. L'associativité de la multiplication dans K implique que :

$$m(xy) = m(x)m(y) \qquad x,\, y \in K^*.$$

On obtient un morphisme de groupe $K^* \to \mathbb{R}_+^*$. On prolonge alors m à K en posant $m(0) = 0$. L'application m est appelée le *module* de K. Il est facile de vérifier que m est continue. Pour cela on choisit un voisinage compact V de 0 dans K et $a \in K$. Comme aV est compact et que μ est régulière, pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver un ouvert U tel que $aV \subset U$ et $\mu(U) \leq \mu(aV) + \epsilon$. Par continuité de la multiplication dans K, il existe un voisinage W de a tel que $WV \subset U$. Donc si $x \in W$ on a :

$$\mu(xV) \leq \mu(U) \leq \mu(aV) + \epsilon,$$
$$m(x) \leq m(a) + \tfrac{\epsilon}{\mu(V)}.$$

Comme $m(x) \leq 0$ et $m(0) = 0$, on a prouvé que m est continue en 0. On a également prouvé que m est semi-continue supérieurement en tout point $a \in K$ et si $a \neq 0$ en écrivant $m(a) = \frac{1}{m(a^{-1})}$ on prouve que m est semi-continue inférieurement en a. Donc m est continue. De plus, par définition de m, la mesure ν sur K^* définie par :

$$d\nu(x) = \frac{d\mu(x)}{m(x)}$$

est une mesure de Haar sur le groupe localement compact K^*.

Posons $B_r = \{x \in K,\ m(x) \leq r\}$ et $C = \max_{x \in B_1} m(1+x) \geq 1$. Il est alors évident que :

$$m(a+b) \leq C \max(m(a), m(b)) \tag{1}$$

car si $0 \neq m(a) \geq m(b)$, alors $x = \frac{b}{a} \in B_1$ et $m(1+\frac{b}{a}) \leq C$, $m(a+b) \leq Cm(a) = C\max(m(a), m(b))$. On dit que m est une valeur absolue généralisée sur K. Plus généralement, une valeur absolue généralisée sur un corps K est un morphisme de groupe f de K dans $\mathbb{R}_+^*$ avec $f(0) = 0$ et qui vérifie l'inégalité (1). De plus, le résultat suivant :

Lemme 2.1 *Soit K un corps et f une valeur absolue généralisée sur K telle que :*

$$f(x+y) \leq 2\max(f(x), f(y)) \qquad x,\ y \in K.$$

Alors f est une valeur absolue.

implique qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $m^\alpha(x) = (m(x))^\alpha$ soit une valeur absolue sur K (prendre α tel que $C^\alpha \leq 2$). En utilisant alors le fait que m est continue on montre que m induit la topologie de K. En particulier, tout corps localement compact est canoniquement valué. De plus, si $(K, |-|)$ est valué localement compact, on déduit du fait que les valeurs absolues m^α et $|-|$ induisent les mêmes topologies qu'il existe un réel $\beta > 0$ tel que :

$$m(x) = |x|^\beta, \qquad x \in K.$$

2.2.2 Le corps p-adique

On étend la valuation p-adique notée v_p, déjà définie sur $\mathbb{Z}$, à $\mathbb{Q}$ par : $v_p(\frac{n}{d}) = v_p(n) - v_p(d)$. On peut alors définir la valeur absolue p-adique sur $\mathbb{Q}$ en posant $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ avec les conventions $p^{-\infty} = 0$ et $v_p(0) = \infty$. Il est facile de vérifier que cette valeur absolue est ultramétrique. On définit $\mathbb{Q}_p$, le corps des nombres p-adiques, en complétant $\mathbb{Q}$ pour la valeur absolue $|-|_p$ i.e., $\mathbb{Q}_p = E/_I$ où E est l'anneau des suites de Cauchy pour $|-|_p$ et I est l'idéal maximal des suites de Cauchy qui tendent vers 0. On étend $|-|_p$ en une valeur absolue ultramétrique sur $\mathbb{Q}_p$ par :

$$|x|_p = \lim_{n \to \infty} |x_n|_p$$

où $x \in \mathbb{Q}_p$ et $(x_n)_n$ est un représentant de x. L'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques est la boule de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{Q}_p$.

La bonne façon de voir $\mathbb{Q}_p$ (c'est la première construction historique, donnée par Hensel) est décrite dans la proposition suivante.

Proposition 2.2 *Soit $x \in \mathbb{Q}_p$, il existe une unique suite $(a_n) \in [\![0,\ p-1]\!]^{\mathbb{Z}}$ et un entier n_0 tels que pour $n < n_0$, $a_n = 0$ et que $x = \sum\limits_{n \geq n_0} a_n p^n$. Cette série est appelée développement de Hensel de x.*

Démonstration. Commençons par l'unicité. Si $a = \sum\limits_{n \geq n_0} a_n p^n$ et $b = \sum\limits_{n \geq n_1} b_n p^n$ sont deux telles séries différentes, notons n_2 le plus petit relatif tel que $a_{n_2} \neq b_{n_2}$. Alors, $0 = |a-b|_p = |(a_{n_2} - b_{n_2})p^{n_2} + \sum\limits_{n \geq n_2+1} (a_n - b_n)p^n|_p = p^{-n_2}$, d'après le principe des triangles isocèles. En effet, $|(a_{n_2} - b_{n_2})p^{n_2}|_p = p^{-n_2}$ et $|\sum\limits_{n \geq n_2+1} (a_n - b_n)p^n|_p \leq p^{-(n_2+1)}$, car $|\cdot|_p$ est ultramétrique. C'est absurde.

On se ramène au cas où $|x|_p = 1$, en multipliant x par une puissance convenable de p ; en effet, l'ensemble des valeurs absolues p-adiques des rationnels est $\{p^n,\ n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$, qui est un fermé pour $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et est donc égal à l'ensemble des valeurs absolues de $\mathbb{Q}_p$. Ainsi, si $x \neq 0$, $|x|_p = p^m$, pour m bien choisi, et on multiplie x par p^m. On montre alors que l'on peut approcher x par une suite d'entiers positifs $(n_i)_{i\geq 1}$ tels que $|x - n_i|_p \leq p^{-i}$ et $n_i \leq p^i - 1$.

Démontrons d'abord le résultat pour $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Si l'on choisit a et b premiers entre eux, comme $|x|_p = 1$, $p \nmid b$ et donc p^i et b sont premiers entre eux, et on choisit une relation de Bezout $kp^i + lb = 1$ (on choisit l de telle sorte que al soit un entier positif). Dès lors, $|\frac{a}{b} - al|_p = |\frac{a}{b}(1 - lb)|_p = |kp^i|_p \leq p^{-i}$. On peut alors écrire la décomposition de al en base p : $al = \sum\limits_{j<i} c_j p^j + \sum\limits_{j\geq i} c_j p^j$. On a bien $d = \sum\limits_{j<i} c_j p^j \leq p^i - 1$ et $|x - d|_p = |x - al + (al - d)|_p \leq \max \left\{ |x - al|_p,\ |\sum\limits_{j\geq i} c_j p^j|_p \right\} = p^{-i}$.

Maintenant, si $x \in \mathbb{Q}_p$, on choisit $y \in \mathbb{Q}$ tel que $|x-y|_p \leq p^{-i}$ et $n_i \leq p^i - 1$ tel que $|y - n_i|_p \leq p^{-i}$. On obtient que $|x - n_i|_p = |(x - y) + (y - n_i)|_p \leq p^{-i}$.

Pour finir, il suffit de voir, si $x \in \mathbb{Q}_p$ et $(n_i)_{i\geq 1}$ la suite d'entiers associés, alors n_i et n_{i+1} ont leur i premiers termes de la décomposition en base p égaux. Cela est vrai car $|n_i - n_{i+1}|_p \leq p^{-i}$ et donc, dans la décomposition en base p, les termes en p^j, où $j < i$ se simplifient. Par conséquent, les n_i sont les sommes partielles d'une série de la forme $\sum a_n p^n$, avec $a_n \leq p - 1$, qui converge vers x. ■

On montre maintenant la proposition suivante :

Proposition 2.3 *$\mathbb{Z}_p$ est compact ouvert et $\mathbb{Q}_p$ et localement compact.*

Démonstration. Il est clair que $\mathbb{Z}_p$ est ouvert car si $x \in \mathbb{Z}_p$ alors la boule ouverte de centre x et de rayon 1 contient 0 donc est égale à la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 qui est incluse dans $\mathbb{Z}_p$. De plus, on prouve la compacité de $\mathbb{Z}_p$ séquentiellement en remarquant que

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n,\ (a_n) \in [\![0,\ p-1]\!]^{\mathbb{N}} \right\} \ :$$

se donner une suite (x_i) d'entiers p-adiques, c'est se donner une famille $(a_n(i)) \in [\![0,\ p-1]\!]^{\mathbb{N}}$, indexée par $i \in \mathbb{N}$. Le processus diagonal permet alors de trouver ϕ telle que pour tous $j \geq i$ et $n \leq i$, $a_n(\phi(i)) = a_n(\phi(j))$. La suite $(x_{\phi(i)})$ est convergente. Pour voir que $\mathbb{Q}_p$ est localement compact il suffit de remarquer que si $x \in \mathbb{Q}_p$ alors, $x + \mathbb{Z}_p = \{y \in \mathbb{Q}_p \ / \ |x - y|_p \leq 1\}$ est un voisinage compact de x. ■

Soit ν^+ la mesure de Haar additive sur $\mathbb{Q}_p$ normalisée à 1 sur $\mathbb{Z}_p$. En utilisant le développement de Hensel on voit que :

$$\mathbb{Z}_p = \bigsqcup_{a=0}^{p-1} a + p\mathbb{Z}_p$$

ce qui implique $\nu^+(p\mathbb{Z}_p) = p^{-1}$. Considérons maintenant m le module de $\mathbb{Q}_p$. Par la section précédente, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$m(x) = |x|_p^{\alpha} \qquad x \in \mathbb{Q}_p$$

mais comme $m(p) = p^{-1}$ l'égalité précédente implique que $\alpha = 1$. Donc le module de $\mathbb{Q}_p$ est la valeur absolue p-adique et , comme

$$\nu^+(\mathbb{Z}_p^*) = \nu^+ \left(\bigsqcup_{a=1}^{p-1} a + p\mathbb{Z}_p \right) = p^{-1}(p-1),$$

on déduit que l'unique mesure de Haar sur $\mathbb{Q}_p^*$ normalisée à 1 sur $\mathbb{Z}_p^*$ est :

$$d\nu^\times(x) = (1 - p^{-1})^{-1}|x|_p^{-1} d\nu^+(x).$$

2.3 Produit tensoriel infini

2.3.1 Produit tensoriel infini d'espaces de Hilbert

Soient H_n une suite d'espaces de Hilbert et $\xi_n \in H_n$, $\|\xi_n\| = 1$. On note $\overline{H_n} = H_1 \otimes \ldots \otimes H_n$ où le produit tensoriel est celui d'espaces de Hilbert. On définit les isométries suivantes :

$$\pi_n : \overline{H_n} \longrightarrow \overline{H_{n+1}}, \;\; \pi_n(\eta_1 \otimes \ldots \otimes \eta_n) = \eta_1 \otimes \ldots \otimes \eta_n \otimes \xi_{n+1} \qquad \text{et,}$$

$$\pi_{k,n} = \pi_{n-1}\pi_{n-2}\ldots\pi_{k+1}\pi_k : \overline{H_k} \longrightarrow \overline{H_n} \qquad \text{pour } k < n.$$

Comme pour $k \leq l \leq m$ on a $\pi_{l,m}\pi_{k,l} = \pi_{k,m}$ et on obtient un système inductif d'espace de Hilbert. Le produit tensoriel infini des H_n relativement aux ξ_n est la limite inductive dans la catégorie des espaces de Hilbert i.e., si on pose $K = \bigsqcup \overline{H_n}/_\sim$ où, si $x_n \in \overline{H_n}$, on pose :

$$x_n \sim x_m \Leftrightarrow \exists l,\, l \geq n,\, l \geq m, \;\; \pi_{n,l}(x_n) = \pi_{l,m}(x_m).$$

alors K est un espace vectoriel pour les lois $[\lambda x_n + x_m] = [\lambda \pi_{n,l}(x_n) + \pi_{l,m}(x_m)]$ où $l \geq n$, $l \geq m$ et $[x]$ est la classe de x. De plus, $< [x_n], [x_m] > = < \pi_{n,l}(x_n), \pi_{l,m}(x_m) >_{\overline{H_l}}$ (où $l \geq n$, $l \geq m$) est une forme sesquilinéaire non dégénérée positive sur K. Le produit tensoriel infini des H_n relativement aux ξ_n, noté $\bigotimes(H_n, \xi_n)$ est la complétion de K pour $< -, - >$. On note $\pi_{n,\infty}$ l'isométrie canonique de $\overline{H_n}$ dans $\bigotimes(H_n, \xi_n)$ et $\eta_1 \otimes \ldots \eta_n \otimes \xi_{n+1} \otimes \xi_{n+2} \otimes \ldots$ l'élément $\pi_{n,\infty}(\eta_1 \otimes \ldots \otimes \eta_n)$. Pour terminer, on remarque que si $U_n \in \mathcal{B}(H_n)$, $U_n(\xi_n) = \xi_n$, on peut définir un opérateur sur $\bigotimes(H_n, \xi_n)$, de domaine dense par :

$$U(\eta_1 \otimes \eta_n \otimes \overline{\xi_n}) = U_1\eta_1 \otimes U_n\eta_n \otimes \overline{\xi_n},$$

où $\overline{\xi_n} = \bigotimes_{k \geq n} \xi_k$, qui est borné si le produit $\prod \|U_n\|$ est convergent. On le note $\bigotimes U_n$.

2.3.2 Produit tensoriel infini de C^*-algèbres unifères

Soit A_n une suite de C^*-algèbres unifères on pose :

$$\overline{A_n} = A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$$

où $\otimes$ est le produit tensoriel minimal de C^*-algèbres. On définit :

$$\pi_n : \overline{A_n} \to \overline{A_{n+1}} \quad \pi_n(x) = x \otimes 1 \quad \text{et,}$$

$$\pi_{k,n} = \pi_{n-1}\pi_{n-2}\ldots\pi_{k+1}\pi_k : \overline{A_k} \longrightarrow \overline{A_n} \qquad \text{pour } k < n.$$

On obtient un système inductif (propre) de C^*-algèbres. Le produit tensoriel infini des A_n est la limite inductive des A_n dans la catégorie des C^*-algèbres, i.e. soit $x_i \in A_i$ on muni $\bigsqcup_n A_n$ de la relation d'équivalence :

$$x_n \sim x_m \Leftrightarrow \exists\, l \in \mathbb{N}, \; l \geq n,\, l \geq m, \; \pi_{n,l}(x_n) = \pi_{m,l}(x_m).$$

On note $X = \bigsqcup_n A_n/_\sim$ et $[x]$ la classe de x. On introduit une structure d'algèbre involutive sur X, soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in A_n$ et $b \in A_m$, on choisit $l \geq n,\ m$ et on pose :

$$\begin{cases} \lambda[a] = [\lambda a], \\ [a] + [b] = [\pi_{n,l}(a) + \pi_{m,l}(b)], \\ [a][b] = [\pi_{n,l}(a)\pi_{m,l}(b)], \\ [a]^* = [a^*]. \end{cases}$$

Comme chaque π_n est un *-morphisme unital injectif la norme d'une classe d'équivalence est bien définie. On en déduit donc une C^*-norme sur X. Le produit tensoriel infini des A_n noté $\bigotimes A_n$ est la complétion de X pour cette C^*-norme. Soit $\pi_{n,\infty}$ l'injection canonique de A_n dans $\bigotimes A_k$, on note $x \otimes 1 \otimes 1 \otimes \ldots = \pi_{n,\infty}(x)$.

2.3.3 Produit tensoriel infini d'algèbres de von Neumann

Si $M_n \subseteq \mathcal{B}(H_n)$ est une algèbre de von Neumann on note $\bigotimes (M_n, H_n, \xi_n)$ l'algèbre de von Neumann agissant dans $\bigotimes (H_n, \xi_n)$ engendrée par les opérateurs de la forme $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \otimes 1 \otimes 1 \otimes \ldots$ où $x_i \in M_i$ et $n \in \mathbb{N}$.

Soit (M_n) une suite d'algèbres de von Neumann et pour tout n, ω_n un état normal sur M_n. On définit l'état produit $\omega = \bigotimes \omega_n$ sur le produit tensoriel infini des C^*-algèbres M_n par :

$$\omega(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \otimes 1 \otimes 1 \otimes \ldots) = \omega_1(x_1)\omega_2(x_2) \otimes \ldots \otimes \omega_n(x_n).$$

Puis on construit la représentation G.N.S. de ω, $(H_\omega, \pi_\omega, \xi_\omega)$ et on définit le produit tensoriel infini des M_n relativement aux ω_n par :

$$M = \bigotimes (M_n, \omega_n) = \left(\pi_\omega\left(\bigotimes M_n\right)\right)'' \quad \text{dans } H_\omega.$$

On a alors :

$$\pi_\omega(M) = \bigotimes (\pi_n(M_n), H_n, \xi_n)$$

où (H_n, π_n, ξ_n) est la construction G.N.S. de ω_n. Démontrons maintenant le résultat suivant :

Théorème 2.4 *Soit $M_n \subset \mathcal{B}(H_n)$ une suite d'algèbres de von Neumann alors :*

$$\bigotimes (M_n, H_n, \xi_n)' = \bigotimes \left(M_n', H_n, \xi_n\right).$$

Démonstration. On commence par démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.5 *Soit $H = \bigotimes (H_n, \xi_n)$. On définit une application $\epsilon_n\ :\ \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(\overline{H_n})$ par la formule :*

$$< \epsilon_n \eta, \zeta > = < x\left(\eta \otimes \overline{\xi_n}\right), \zeta \otimes \overline{\xi_n} >, \quad \eta,\ \zeta \in \overline{H_n}.$$

Identifions $\epsilon_n(x)$ avec $\epsilon_n(x) \otimes 1 \in \mathcal{B}(\overline{H_n}) \otimes 1 \subset \mathcal{B}(H)$. Alors ϵ_n est une espérance conditionnelle de $\mathcal{B}(H)$ sur $\mathcal{B}(\overline{H_n}) \otimes 1$ telle que pour tout $\omega \in \mathcal{B}(H)_*$:

$$\lim_{n\to\infty} \|\omega \circ \epsilon_n - \omega\| = 0.$$

Démonstration.

Pour tout $\eta,\, \zeta \in H$, et $\epsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\eta_n,\, \zeta_n \in \overline{H}_n$ tels que :

$$\|\eta - \eta_n \otimes \overline{\xi}_n\| < \epsilon, \quad \|\zeta - \zeta_n \otimes \overline{\xi}_n\| < \epsilon.$$

En posant $\overline{\eta}_n = \eta_n \otimes \overline{\xi}_n$ et $\overline{\zeta}_n = \zeta_n \otimes \overline{\xi}_n$ on obtient :

$$\omega_{\overline{\eta}_n, \overline{\zeta}_n} = \omega_{\overline{\eta}_n, \overline{\zeta}_n} \circ \epsilon_n.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\|\omega_{\eta,\zeta} \circ \epsilon_n - \omega_{\eta,\zeta}\| &\leq 2\|\omega_{\eta,\zeta} - \omega_{\overline{\eta}_n, \overline{\zeta}_n}\| \\
&\leq 2 \left(\|\eta - \overline{\eta}_n\| \|\zeta\| + \|\overline{\eta}_n\| \|\zeta - \overline{\zeta}_n\|\right) \\
&\leq 2 \left(\epsilon \|\zeta\| + \epsilon \left(\|\eta\| + \epsilon\right)\right).
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{n\to 0} \|\omega_{\eta,\zeta} - \omega_{\eta,\zeta} \circ \epsilon_n\| = 0$. On déduit alors le lemme du fait que les combinaisons linéaires des $\omega_{\eta,\zeta}$ sont dense dans $\mathcal{B}(H)_*$ et $\|\epsilon_n\| = 1$. ■

Démontrons maintenant le théorème. Posons $\overline{M}_n = M_1 \otimes \ldots \otimes M_n$, où $\otimes$ est le produit tensoriel spatial d'algèbres de von Neumann. On a :

$$M = \bigotimes (M_n, H_n, \xi_n) = \overline{M}_n \otimes \left(\bigotimes_{k \geq n+1} (M_n, H_n, \xi_n) \right),$$

ce qui implique (c.f. [24]) :

$$M^{'} = \bigotimes (M_n, H_n, \xi_n)^{'} = \overline{M}_n^{'} \otimes \left(\bigotimes_{k \geq n+1} (M_n, H_n, \xi_n) \right)^{'}.$$

Par le lemme précédent, chaque $x \in \mathcal{B}(H)$ est la limite ultrafaible de $(\epsilon_n(x))$. Donc il suffit de montrer que $\epsilon_n(M^{'}) \subset \overline{M}_n^{'} \otimes 1$. Pour tout $a \in \overline{M}_n$ et $x \in M^{'}$ on a :

$$a\epsilon_n(x) = \epsilon_n(ax) = \epsilon_n(xa) = \epsilon_n(x)a,$$

donc $\epsilon_n(x) \in \overline{M}_n^{'} \otimes 1$. ■

On a alors le corollaire suivant :

Corollaire 2.6 *Si chaque M_n est un facteur alors $\bigotimes (M_n, H_n, \xi_n)$ est un facteur.*

Démonstration.

Par le théorème précédent on a :

$$\begin{aligned}
\left(M \cup M^{'}\right)^{''} &= \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \left((\overline{M}_n \otimes 1) \cup (\overline{M}_n^{'} \otimes 1) \right)^{''} \right)^{''} = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathcal{B}(\overline{H}_n) \otimes 1) \right)^{''} \\
&= \bigotimes (\mathcal{B}(H_n), H_n, \xi_n).
\end{aligned}$$

Donc, en utilisant encore le théorème,

$$M \cap M^{'} = \left(\bigotimes (\mathcal{B}(H_n), H_n, \xi_n) \right)^{'} = \bigotimes (\mathbb{C}_{H_n}, H_n, \xi_n) = \mathbb{C}_H.$$

■

2.4 Facteurs d'Araki-Woods

La référence pour cette section est [1]. Les facteurs étudiés par Araki et Woods dans [1] sont des facteurs de la forme $M = \bigotimes (M_n, \omega_n)$ où M_n est un facteur de type $\mathrm{I}_{\mathrm{n}_\nu}$ avec $n_\nu \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et ω_n est un état normal de la forme $tr(\rho_n.)$ avec ρ_n un opérateur positif à trace et tr la trace M_n. Soient $\{\lambda_{n_i},\ i = 1, \ldots, n_\nu\}$ les valeurs propres de ρ_n, on a le résultat suivant :

Lemme 2.7

1. *M est de type* I *si et seulement si :*

$$\sum_n |1 - \lambda_{n_1}| < +\infty.$$

2. *M est de type* II_1 *si et seulement si $n_\nu < \infty$ pour tout n et :*

$$\sum_{n,i} \left| (n_\nu)^{-\frac{1}{2}} - (\lambda_{n_i})^{\frac{1}{2}} \right|^2 < +\infty.$$

3. *S'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout n $\lambda_{n_1} \geq \delta$ alors M est de type* III *si et seulement si :*

$$\sum_{n,i} \inf \left\{ \left| \frac{\lambda_{n_1}}{\lambda_{n_i}} - 1 \right|^2, C \right\} = \infty$$

pour une constante $C > 0$.

Araki et Woods définissent également un invariant algébrique pour ce type de facteurs. Ils le notent $r_\infty(M)$ et le définissent de la façon suivante. Soit μ_n la mesure définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mu_n(i) = \begin{cases} \lambda_{n_i} & \text{si } 1 \leq i \leq n_\nu, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $I \subset \mathbb{N}$, I de cardinal fini, on note X_k l'espace discret $\mathbb{N}$ muni de la mesure μ_k et $X(I) = \prod_{k \in I} X_k$ muni de la mesure produit $\mu_I = \prod_{k \in I} \mu_k$. $r_\infty(M)$ est alors défini comme l'ensemble des $\lambda \in [0, \infty]$ tels qu'il existe une suite (I_α) de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ deux à deux disjoints et deux suites (K_α^1), (K_α^2) de sous-ensembles de $X(I_\alpha)$ munies de bijections $\Phi_\alpha : K_\alpha^1 \longrightarrow K_\alpha^2$ telles que :

$$\sum_\alpha \mu_{I_\alpha}(K_\alpha^1) = \infty \text{ et } \lim_{\alpha \to \infty} \max_{x \in K_\alpha^1} \left| \lambda - \frac{\mu_{I_\alpha}(\Phi_\alpha(x))}{\mu_{I_\alpha}(x)} \right| = 0.$$

2.5 Théorie des poids

Une bonne référence pour cette section est [23]. Si M est une algèbre de von Neumann on note M^+ l'ensemble de ses éléments positifs. Un poids sur M est l'analogue non-commutatif d'une mesure positive non nécessairement finie :

Définition 2.8 *Un poids sur une algèbre de von Neumann M est une application :*

$$\Psi : M^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

telle que $\Psi(x + y) = \Psi(x) + \Psi(y)$ et $\Psi(\lambda x) = \lambda \Psi(x)$ pour $x, y \in M^+$, $\lambda \geq 0$ et avec la convention $0.(+\infty) = 0$.

Si Ψ est un poids sur M on définit :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\Psi &= \{x \in M^+,\ \Psi(x) < +\infty\}\\ \mathcal{N}_\Psi &= \{x \in M,\ \Psi(x^*x) < +\infty\}\\ \mathcal{M}_\Psi &= \mathcal{N}_\Psi^*\mathcal{N}_\Psi.\end{aligned}$$

Il n'est pas très difficile de montrer que $\mathcal{N}_\Psi$ est un idéal à gauche et que $\mathcal{M}_\Psi$ est une sous-algèbre involutive de M vérifiant :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\Psi \cap M^+ &= \mathcal{D}_\Psi\\ \mathcal{M}_\Psi &= \text{Vect} < \mathcal{D}_\Psi >\end{aligned}$$

où Vect $< - >$ désigne l'espace vectoriel engendré. La dernière égalité permet de prolonger uniquement Ψ, par linéarité, sur $\mathcal{M}_\Psi$. On note encore Ψ ce prolongement. Le poids Ψ est dit *semi-fini* si $\mathcal{M}_\Psi$ est faiblement dense dans M, *fidèle* si $\Psi(x)$ est non nul pour tout élément positif x non nul, et *normal* si $\Psi(\sup x_i) = \sup \Psi(x_i)$ pour toute suite généralisée croissante bornée (x_i) dans M^+. On peut montrer que sur toute algèbre de von Neumann il existe des poids normaux, fidèles et semi-finis.

Dans la suite on suppose que Ψ est fidèle, normal et semi-fini (en abrégé f.n.s.). On peut construire une représentation de M de la façon suivante. On considère la forme sésquilinéaire non-dégénérée positive sur $\mathcal{N}_\Psi$ définie par $< x, y >= \Psi(y^*x)$, $x,\ y \in \mathcal{N}_\Psi$. On en déduit un espace de Hilbert H_Ψ et une application linéaire η_Ψ de $\mathcal{N}_\Psi$ dans H_Ψ d'image dense. Par l'inégalité $(ax)^*ax \leq \|a\|^2x^*x$ on voit que pour tout $x \in M$ on a un opérateur $\pi_\Psi(x) \in \mathcal{B}(H_\Psi)$ déterminé par $\pi_\Psi(x)\eta_\Psi(y) = \eta_\Psi(xy)$ pour $y \in \mathcal{N}_\Psi$. Le fait que l'application π_Ψ donne une *-représentation normale, fidèle et non dégeneré de M est une vérification immédiate. Cette représentation est appelée la représentation G.N.S. de Ψ.

On considère maintenant l'opérateur antilinéaire S_0 sur H_Ψ défini par :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(S_0) &= \eta_\Psi(\mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_\Psi^*)\\ S_0\eta_\Psi(x) &= \eta_\Psi(x^*)\end{aligned}$$

où $\mathcal{D}(S_0)$ désigne le domaine de S_0. On montre que c'est un opérateur fermable et on note S sa fermeture. Soit $S = J_\Psi\Delta_\Psi^{\frac{1}{2}}$ la décomposition polaire de S alors $\Delta_\Psi = S^*S$ est positif autoadjoint et injectif, on l'appelle *l'opérateur modulaire* de Ψ et en utilisant le fait que $S = S^{-1}$ il n'est pas très difficile de montrer que $J_\Psi = J_\Psi^* = J_\Psi^{-1}$ et $J_\Psi^2 = 1$ donc J_Ψ est une conjugaison, appelée la *conjugaison canonique* associée à Ψ. De plus, on a le théorème fondamental de M. Tomita :

Théorème 2.9 *On a les identités suivantes :*

$$\begin{aligned}&\Delta_\Psi^{it}\pi_\Psi(M)\Delta_\Psi^{-it} = \pi_\Psi(M) \qquad t \in \mathbb{R},\\ &J_\Psi\pi_\Psi(M)J_\Psi = \pi_\Psi(M)'.\end{aligned}$$

Le théorème de Tomita fournit alors un groupe d'automorphismes de M :

$$\sigma_t^\Psi(x) = \pi_\Psi^{-1}(\Delta_\Psi^{it}\pi_\Psi(x)\Delta_\Psi^{-it}), \qquad x \in M,\ t \in \mathbb{R}$$

appelé le *groupe d'automorphismes modulaire* de Ψ.

On peut également construire le produit tensoriel de poids. En fait, on a le résultat suivant :

Proposition 2.10 *Soit M_1 et M_2 deux algèbres de von Neumann. Soit Ψ_i un poids sur M_i alors il existe un unique poid Ψ sur $M_1 \otimes M_2$ tel que :*

1. *$x_i \in \mathcal{M}_{\Psi_i}$ implique $x_1 \otimes x_2 \in \mathcal{M}_\Psi$ et $\Psi(x_1 \otimes x_2) = \Psi_1(x_1)\Psi_2(x_2)$*
2. *$\sigma_t^\Psi = \sigma_t^{\Psi_1} \otimes \sigma_t^{\Psi_2}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

2.6 Invariants S et T, classification des facteurs de type III

La référence pour cette section est [7].

2.6.1 Invariant T

Soit M une algèbre de von Neumann. On dispose de l'ensemble des poids f.n.s. sur M et de leurs groupes d'automorphismes modulaires. On peut alors se demander quelle est la dépendance en Ψ du groupe d'automorphismes σ_Ψ pour un poids Ψ donné. Le théorème suivant (dû à A. Connes), qui est une version non-commutative du théorème de Radon Nykodym, répond à cette question. Il dit que modulo le groupe des automorphismes intérieurs, σ_Ψ ne dépend pas de Ψ.

Théorème 2.11 *Soient φ et Ψ deux poids f.n.s. sur M. Alors il existe une application fortement continue $t \mapsto u_t$ de $\mathbb{R}$ dans les unitaires de M telle que :*

1. $\sigma_t^\Psi(x) = u_t \sigma_t^\varphi(x) u_t^* \qquad x \in M,\ t \in \mathbb{R}$
2. $u_{t+s} = u_t \sigma_t^\varphi(u_s) \qquad s, t \in \mathbb{R}.$

Soient Aut(M) le groupe des automorphismes de M, Int(M) le sous-groupe distingué des automorphismes intérieurs, Out(M) le quotient et ϵ l'application canonique de Aut(M) dans Out(M). Le théorème précédent implique que si Ψ est un poids f.n.s. sur M alors le morphisme $\delta\ :\ t \mapsto \delta_t = \epsilon(\sigma_t^\Psi)$ de $\mathbb{R}$ dans Out(M) ne dépend pas de Ψ. On l'appelle *l'homomorphisme modulaire* de M. On définit $T(M)$ comme le noyau de δ. C'est un sous groupe de $\mathbb{R}$ et un invariant algébrique de M. Dans le cas des produits tensoriel infini de facteurs M_n, on a un théorème qui relie $T(M)$ aux $T(M_n)$:

Théorème 2.12 *Soit $T_0 \neq 0$ et $M = \bigotimes (M_n, \omega_n)$ un produit tensoriel infini de facteurs selon des états normaux fidèles ω_n. On a $T_0 \in T(M)$ si et seulement si $T_0 \in \bigcap T(M_n)$ et si, u_n désignant un unitaire de M_n tel que $\sigma_{T_0}^{\omega_n}(x) = u_n x u_n^*$ pour tout $x \in M_n$ on a $\sum_{n=1}^\infty |1 - \omega_n(u_n)| < \infty$.*

2.6.2 Invariant S

Pour définir l'invariant S on considère également tous les poids f.n.s. sur M mais cette fois-ci on regarde le spectre des opérateurs modulaires. On pose :

$$S(M) = \bigcap \mathrm{Sp}\Delta_\Psi,\ \ \Psi \text{ poids f.n.s. sur } M.$$

Alors $S(M)$ est un invariant algébrique de M et on a le théorème suivant :

Théorème 2.13 *Soit M un facteur. M est de type* III *si et seulement si $0 \in S(M)$ et dans ce cas, $S(M)$ est soit :*

1. $\{0, 1\}$ *et on dit que M est de type* III_0
2. $\{0\} \cup \{\lambda^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ *avec $0 < \lambda < 1$ et on dit que M est de type* III_λ
3. $[0, +\infty[$ *et on dit que M est de type* III_1

De plus, Connes a montré que dans le cas des facteurs d'Araki-Woods on a $r_\infty(M) = S(M)$. Il a également montré la relation suivante entre les invariants T et S :

Théorème 2.14 *Soit M un facteur. Si $S(M) \neq \{0, 1\}$ alors $T(M)$ est l'orthogonal de $S(M) \cap \mathbb{R}_+^*$ pour la dualité $(t, \lambda) \mapsto \lambda^{it}$.*

2.7 Groupes quantiques localement compacts

2.7.1 Définitions

Les définitions proposées ici sont issues des travaux de J. Kustermans et S. Vaes dans [17] et [18]. Durant toute la suite de ce mémoire, les algèbres de von Neumann seront supposées être à prédual séparable et les groupes localement compacts à base dénombrable d'ouverts. Soient G un groupe localement compact et μ une mesure de Haar à gauche, ν une mesure de Haar à droite. Considérons l'algèbre de von Neumann $M = L^\infty(G)$. La multiplication de G fournit un *-morphisme unital normal :

$$\Delta \,:\, M \to M \otimes M \;:\; (\Delta f)(g,h) = f(gh)$$

où $\otimes$ est le produit tensoriel spatial d'algèbres de von Neumann, et où l'on a utilisé l'identification canonique $M \otimes M = L^\infty(G \times G)$. L'associativité de la multiplication dans G implique l'identité suivante :

$$(\Delta \otimes \iota)\Delta = (\iota \otimes \Delta)\Delta$$

où ι est l'application identité. Les mesures de Haar à gauche et à droite μ et ν de G fournissent des poids f.n.s. φ et ψ sur M :

$$\varphi \,:\, M^+ \to [0,+\infty] \;:\; \varphi(f) = \int_G f(x)d\mu(x)$$

$$\psi \,:\, M^+ \to [0,+\infty] \;:\; \psi(f) = \int_G f(x)d\nu(x)$$

où M^+ est l'ensemble des éléments positifs de M. L'invariance à gauche de μ et l'invariance à droite de ν impliquent les identités suivantes :

$$\varphi\left((\omega \otimes \iota)\Delta(a)\right) = \omega(1)\varphi(a) \quad a \in \mathcal{M}_\varphi^+,\, \omega \in M_*^+$$

$$\psi\left((\iota \otimes \omega)\Delta(a)\right) = \omega(1)\psi(a) \quad a \in \mathcal{M}_\psi^+,\, \omega \in M_*^+$$

où, si φ est un poids, on note $\mathcal{M}_\varphi^+ = \{x \in M^+,\ \varphi(x) < +\infty\}$, M_* est le prédual de M et M_*^+ est l'ensemble des formes positives ultrafaiblement continues sur M. Par analogie avec ce qui précède on définit :

Définition 2.15 *Soit M une algèbre de von Neumann. Une comultiplication sur M est un *-morphisme unital normal de M dans $M \otimes M$. Une comultiplication Δ sur M est dite coassociative si elle satisfait l'équation suivante :*

$$(\Delta \otimes \iota)\Delta = (\iota \otimes \Delta)\Delta.$$

Un poids f.n.s. φ est dit invariant à gauche pour Δ s'il satisfait :

$$\varphi\left((\omega \otimes \iota)\Delta(a)\right) = \omega(1)\varphi(a) \quad a \in \mathcal{M}_\varphi^+,\, \omega \in M_*^+.$$

Un poids f.n.s. ψ est dit invariant à droite pour Δ s'il satisfait :

$$\psi\left((\iota \otimes \omega)\Delta(a)\right) = \omega(1)\psi(a) \quad a \in \mathcal{M}_\psi^+,\, \omega \in M_*^+.$$

On définit alors les groupes quantiques localement compacts :

Définition 2.16 *Un groupe quantique localement compact est une paire (M, Δ) où Δ est une comultiplication coassociative et M est une algèbre de von Neumann munie d'un poids f.n.s φ invariant à gauche pour Δ et d'un poids f.n.s. ψ invariant à droite pour Δ.*

Le premier exemple évident est $L^\infty(G)$ avec la comultiplication et les poids invariant définis comme précédemment. On note Δ_G la comultiplication et φ_G le poids invariant à gauche. Cet exemple est commutatif et on peut montrer que tout groupe quantique localement compact commutatif est obtenu de cette façon.

On peut donner un autre exemple évident de groupe quantique localement compact provenant d'un groupe localement compact G. Prenont $M = \mathcal{L}(G)$ l'algèbre de von Neumann de G. On note $g \mapsto \lambda_g$ la représentation régulière gauche de G sur $L^2(G)$. On définit sur M une comultiplication par $\Delta(x) = x \otimes x$. En remarquant que $M = \left\{\int_G f(g)\lambda_g dg,\ f \in C_c(G)\right\}''$, où $C_c(G)$ est l'ensemble des fonctions continues à support compact sur G, on peut construire un poids f.n.s. φ sur M tel que :

$$\varphi\left(\int_G f(g)\lambda_g dg\right) = f(e).$$

Soit $f \in C_c(G)$ et $\omega \in M_*$ alors on a :

$$\begin{aligned}\varphi\left((\omega \otimes \iota)\Delta\left(\int_G f(g)\lambda_g dg\right)\right) &= \varphi\left(\int_G f(g)\omega(\lambda_g)\lambda_g dg\right)\\ &= f(e)\omega(\lambda_e) = \varphi\left(\int_G f(g)\lambda_g dg\right)\omega(1).\end{aligned}$$

Donc φ est invariant à gauche. Comme Δ est cocommutative, i.e. elle vérifie $\sigma\Delta = \Delta$ (où $\sigma(x \otimes y) = y \otimes x$, $x, y \in M$), φ est également invariant à droite et (M, Δ) est un groupe quantique localement compact. On peut montrer que tout groupe quantique localement compact cocommutatif est de cette forme.

Unitaires multiplicatifs et groupes quantiques localement compacts Les unitaires multiplicatifs sont étudiés dans [2]. Introduisons d'abord quelques notations. Soit H un espace de Hilbert. Pour $\xi \in H$ on définit :

$$\theta_\xi,\ \theta'_\xi \in \mathcal{B}(H, H \otimes H)$$

par :

$$\theta_\xi(\eta) = \xi \otimes \eta \quad \text{et} \quad \theta'_\xi(\eta) = \eta \otimes \xi.$$

On définit également $\theta_{i,\xi} \in \mathcal{B}(H \otimes H, H \otimes H \otimes H)$ ($i = 1, 2$ ou 3) en posant $\theta_{1,\xi}(\eta \otimes \zeta) = \xi \otimes \eta \otimes \zeta$, $\theta_{2,\xi}(\eta \otimes \zeta) = \eta \otimes \xi \otimes \zeta$ et $\theta_{3,\xi}(\eta \otimes \zeta) = \eta \otimes \zeta \otimes \xi$.

Pour $T \in \mathcal{B}(H \otimes H)$ on définit $T_{12}, T_{13}, T_{23} \in \mathcal{B}(H \otimes H \otimes H)$ par $T_{12}\theta_{2,\xi} = \theta_{2,\xi}T$, $T_{13}\theta_{2,\xi} = \theta_{2,\xi}T$ et $T_{23}\theta_{1,\xi} = \theta_{1,\xi}T$.

Pour $T \in \mathcal{B}(H \otimes H)$ et $\omega \in \mathcal{B}(H)_*$ on définit $(\iota \otimes \omega)(T)$ et $(\omega \otimes \iota)(T)$ comme les uniques éléments de $\mathcal{B}(H)$ vérifiant les formules :

$$< \xi, (\iota \otimes \omega)(T)\eta >= \omega(\theta_\xi^* T\theta_\eta >, \quad < \xi, (\omega \otimes \iota)(T)\eta >= \omega(\theta_\xi^{'*} T\theta'_\eta > .$$

On définit alors les unitaires multiplicatifs.

Définition 2.17 *Un unitaire $W \in \mathcal{B}(H \otimes H)$ est dit multiplicatif s'il satisfait la relation pentagonale :*

$$W_{12}W_{13}W_{23} = W_{23}W_{12}.$$

On associe à tout unitaire multiplicatif W l'algèbre naturelle suivante :

$$\mathcal{C}(W) = \{(\iota \otimes \omega)(\Sigma W),\ \omega \in \mathcal{B}(H)_*\}$$

où $\Sigma \in \mathcal{B}(H \otimes H)$ est la volte, i.e. $\Sigma(\xi \otimes \eta) = \eta \otimes \xi$. On a $[\mathcal{C}(W)\mathcal{C}(W)] = [\mathcal{C}(W)]$, où $[-]$ désigne l'adhérence normique, mais $[\mathcal{C}(W)]$ n'est pas une C^*-algèbre en général. On note $\mathcal{K}(H)$ les opérateurs compact sur H. On rappelle maintenant les notions de regularité et semi-régularité :

Définition 2.18 *Un unitaire multiplicatif W sur $H \otimes H$ est dit régulier si $[\mathcal{C}(W)] = \mathcal{K}(H)$ et semi-régulier si $\mathcal{K}(H) \subset [\mathcal{C}(W)]$.*

Soit G un groupe localement compact. Il est facile de vérifier que l'unitaire W_G défini par :

$$W_G \ :\ L^2(G \otimes G) \to L^2(G \otimes G), \quad (W_G\xi)(x, y) = \xi(xy, y)$$

est multiplicatif. En réécrivant cette formule en termes de Δ_G et Λ_G (où Λ_G est l'application G.N.S. canonique de φ_G i.e. l'inclusion de $L^\infty(G) \cap L^2(G)$ dans $L^2(G)$), on obtient :

$$W_G^*(\Lambda_G(a) \otimes \Lambda_G(b)) = (\Lambda_G \otimes \Lambda_G)(\Lambda_G(b)(a \otimes 1)) \quad \text{pour tout } a,\ b \in \mathcal{N}_{\varphi_G}$$

où $\Lambda_G \otimes \Lambda_G$ est l'application G.N.S canonique pour le poids $\varphi_G \otimes \varphi_G$. A l'aide de la dernière formule on peut, pour un groupe quantique localement compact (M, Δ) muni d'un poids f.n.s. φ invariant à gauche, définir un unitaire multiplicatif de la façon suivante. Représentons M sur l'espace G.N.S de φ tel que (H, ι, Λ) soit une construction G.N.S pour φ. Alors on peut prouver que la formule suivante :

$$W^*(\Lambda(a) \otimes \Lambda(b)) = (\Lambda \otimes \Lambda)(\Lambda(b)(a \otimes 1)) \quad \text{pour tout } a,\ b \in \mathcal{N}_\varphi$$

définit un unitaire dans $\mathcal{B}(H \otimes H)$ qui est multiplicatif. Cet unitaire est appelé la *représentation régulière gauche* de (M, Δ). Il permet de retrouver la comultiplication et l'algèbre de von Neumann du groupe quantique. Plus précisément, on a les formules :

$$\Delta(x) = W^*(1 \otimes x)W \quad \text{pour tout } x \in M$$
$$M = \overline{\{(\iota \otimes \omega)(W),\ \omega \in \mathcal{B}(H)_*\}}^{*-\text{ultraforte}}.$$

Si (M, Δ) est un groupe quantique, il est possible de construire un nouveau groupe quantique $(\hat{M}, \hat{\Delta})$, son dual, et dans le cas des groupes, $\mathcal{L}(G)$ est le dual de $L^\infty(G)$. On peut montrer que $(\hat{\hat{M}}, \hat{\hat{\Delta}})$ est isomorphe à (M, Δ). Ce dernier résultat généralise le théorème de Pontryagin.

2.7.2 Biproduit croisé

Pour obtenir des exemples de groupes quantiques qui ne proviennent pas de groupes, c'est à dire non commutatifs et non cocommutatifs, il existe une méthode très efficace, la construction du biproduit croisé. Dans cette section on définit, dans un cas simple qui nous servira par la suite, le biproduit croisé de deux groupes localement compacts.

Soient G et H deux groupes localement compacts tels qu'il existe deux applications définies presque partout et mesurables :

$$G \times H \to H \ :\ (g, s) \mapsto \alpha_g(s)$$
$$G \times H \to G \ :\ (g, s) \mapsto \beta_s(g)$$

vérifiant les identités suivantes :

$$\alpha_{hg}(s) = \alpha_h(\alpha_g(s)) \text{ et } \beta_s(hg) = \beta_{\alpha_g(s)}(h)\beta_s(g), \text{ pour presque tout } (g,h,s), \tag{2}$$

$$\beta_{ts}(g) = \beta_t(\beta_s(g)) \text{ et } \alpha_g(ts) = \alpha_{\beta_s(g)}(t)\alpha_g(s), \text{ pour presque tout } (s,t,g). \tag{3}$$

Dans ce cas on appelle (G, H) un couple assorti. On peut alors définir deux *-morphismes unitaux normaux :

$$\alpha : L^\infty(H) \to L^\infty(G \times H) \ : \ (\alpha f)(g,s) = f(\alpha_g(s)),$$
$$\beta : L^\infty(G) \to L^\infty(H \times G) \ : \ (\beta f)(s,g) = f(\beta_s(g)),$$

vérifiant :

$$(\iota \otimes \alpha)\alpha = (\Delta_G \otimes \iota)\alpha \qquad \text{et} \qquad (\iota \otimes \beta)\beta = (\Delta_H \otimes \iota)\beta$$

où Δ_G est la comultiplication sur $L^\infty(G)$. Alors α est une action du groupe quantique $(L^\infty(G), \Delta_G)$ sur l'algèbre de von Neumann $L^\infty(H)$ et β est une action du groupe quantique $(L^\infty(H), \Delta_H)$ sur l'algèbre de von Neumann $L^\infty(G)$. On peut alors définir les produits croisés suivants :

$$G \ltimes L^\infty(H) = (\alpha(L^\infty(H)) \cup \mathcal{L}(G) \otimes 1)'' \qquad \text{dans } \mathcal{B}(L^2(G \times H)) \qquad \text{et,}$$
$$H \ltimes L^\infty(G) = (\beta(L^\infty(G)) \cup \mathcal{L}(H) \otimes 1)'' \qquad \text{dans } \mathcal{B}(L^2(H \times G)).$$

De plus, en introduisant l'unitaire W sur $L^2(G \times H \times G \times H)$:

$$(W\xi)(g,s,h,t) = \xi(\beta_{\alpha_g(s)^{-1}t}(h)g, s, h, \alpha_g(s)^{-1}t),$$

on peut prouver que la formule :

$$\Delta(x) = W^*(1_{L^2(G \times H)} \otimes x)W \qquad \text{pour } x \in G \ltimes L^\infty(H)$$

définit une comultiplication coassociative sur $G \ltimes L^\infty(H)$. Le poids invariant à gauche est obtenu comme le poids dual du poids invariant à gauche sur $L^\infty(H)$. On peut également construire un poids invariant à droite. Ces structures font de $G \ltimes L^\infty(H)$ un groupe quantique localement compact, que l'on appelle le biproduit croisé de G par H, et on construit de la même façon une structure de groupe quantique localement compact sur $H \ltimes L^\infty(G)$. On peut alors montrer que $H \ltimes L^\infty(G)$ est le dual de $G \ltimes L^\infty(H)$.

Si (G_1, G_2) est un couple assorti on peut toujours construire un groupe G tel que l'on soit dans le cas suivant (voir [4, 3]).

Soient G un groupe localement compact et G_1, G_2 deux sous-groupes fermés de G tels que $G_1 \cap G_2 = \{e\}$ et $\mu(G - G_1G_2) = 0$ où μ est une mesure de Haar sur G à gauche ou à droite (elles ont les mêmes ensembles de mesure nulle). On note $\Omega = G_1G_2$ et on considère les applications :

$$\theta : G_1 \times G_2 \longrightarrow G : (g,s) \longmapsto gs \qquad \text{et,}$$
$$\rho : G_1 \times G_2 \longrightarrow G : (g,s) \longmapsto sg.$$

On montre que ce sont des isomorphismes boréliens (voir [4]). Donc $\mathcal{O} = \theta^{-1}(\Omega \cap \Omega^{-1})$ et $\mathcal{O}' = \rho^{-1}(\Omega \cap \Omega^{-1})$ sont des boréliens dont le complémentaire est de mesure nulle et $\rho^{-1}\theta$ est un isomorphisme borélien de $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{O}'$. Pour $(g,s) \in \mathcal{O}$ on peut donc définir $\beta_s(g) \in G_1$ et $\alpha_g(s) \in G_2$ tels que :

$$\rho^{-1}(\theta(g,s)) = (\beta_s(g), \alpha_g(s)).$$

On a donc, pour tout $(g,s) \in \mathcal{O}$, $gs = \alpha_g(s)\beta_s(g)$. De plus, on montre que (c.f. [4]) α et β sont mesurables, définies presque partout et vérifient les relations (2) et (3). Donc (G_1, G_2) est un couple assorti et il est facile de voir que l'action α est isomorphe à l'action canonique de G_1 sur $L^\infty(G/_{G_1})$ et on a donc $G_1 \ltimes L^\infty(G_2) \simeq G_1 \ltimes L^\infty(G/_{G_1})$ (on a le même résultat pour l'action β).

On renvoie à [4] pour la démonstration du résultat suivant :

Théorème 2.19 *Le biproduit croisé de G_1 par G_2 est régulier si et seulement si l'application θ est un homéomorphisme de $G_1 \times G_2$ sur G, il est semi-régulier si et seulement si θ est un homéomorphisme de $G_1 \times G_2$ sur un ouvert de G dont le complémentaire est de mesure nulle.*

3 Un exemple de groupe quantique de type III

3.1 Un premier exemple de type I_∞

Dans cette section on présente un exemple provenant de [27].

Considérons G, le produit semi-direct de K^* par K (le groupe $ax+b$) où K est un corps localement compact (commutatif), à base dénombrable d'ouverts et non-discret (par exemple $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou $\mathbb{Q}_p$). L'hypothèse sur K implique que si μ est une mesure de Haar additive sur K alors elle est sans atome. Soit $d\nu(x) = \frac{d\mu(x)}{m(x)}$ une mesure de Haar sur K^* qui est également sans atome. On considère sur G la mesure de Haar à droite produit des mesure ν et μ. On définit deux sous-groupes fermés de G :

$$G_1 = \{(g,0),\ g \in K^*\} \quad G_2 = \{(s, s-1),\ s \in K^*\}.$$

On a :

$$G_1G_2 = \{(gs, gs-g),\ g,\, s \in K^*\} = \{(a,b) \in G,\ a^{-1}b \neq 1\}$$

En particulier, G_1G_2 est ouvert et :

$$G - G_1G_2 = \{(a,b) \in G,\ a^{-1}b = 1\}$$

est de mesure nulle dans G. Identifions G_1 et G_2 avec K^* de facon évidente. Sous cette identification, un calcul direct donne, pour $g, s \in K^*$ et $g(s-1)+1 \neq 0$:

$$\alpha_g(s) = g(s-1)+1, \quad \beta_s(g) = \frac{gs}{g(s-1)+1}. \tag{4}$$

Notons (M, Δ) le groupe quantique localement compact obtenu par la construction du biproduit croisé de G_1 par G_2. Le théorème 2.19 dit que (M, Δ) est semi-régulier mais n'est pas régulier de plus on a le résultat suivant :

Proposition 3.1 *$G_1 \ltimes L^\infty(G_2)$ est un facteur de type I_∞ de plus :*

$$G_1 \ltimes L^\infty(G_2) \simeq G_2 \ltimes L^\infty(G_1)$$

.

Démonstration.

L'isomorphisme s'obtient de la façon suivante. Soit l'isomorphisme $u : G_1 \to G_2$, $u(g) = g^{-1}$, on a alors :

$$u(\beta_s(g)) = \alpha_{u^{-1}(s)}(u(g))$$

pour tout $s, g \in K^*$. Donc en posant :

$$U : L^2(G_1 \times G_2) \to L^2(G_2 \times G_1) \quad (U\xi)(s,g) = \xi(u^{-1}(s), u(g))$$

On obtient un unitaire tel que pour F $L^\infty(G_2)$ et $t \in G_1$:

$$U\alpha(F)U^* = \beta(\tilde{F}), \quad U(\lambda_t \otimes 1)U^* = \lambda_{u(t)} \otimes 1$$

où $\tilde{F} \in L^\infty(G_1)$, $\tilde{F}(x) = F(u(x))$. On en déduit que $G_1 \ltimes L^\infty(G_2) \simeq G_2 \ltimes L^\infty(G_1)$.

Pour montrer que $G_1 \ltimes L^\infty(G_2)$ est un facteur de type I_∞, on remarque d'abord que l'action de G_1 sur $L^\infty(G/_{G_1})$ est isomorphe à l'action (évidente) de K^* sur $L^\infty(K)$. Il suffit donc de montrer que $K^* \ltimes L^\infty(K)$ est un facteur de type I_∞. Posons :

$$W : L^2(K^* \times K) \to L^2(K^* \times K^*) \quad (W\xi)(x,y) = m(x)^{\frac{1}{2}}\xi(xy^{-1}, y).$$

Alors on a (pour le détail des calculs voir le début de la preuve du lemme 3.8)

$$W\left(K^* \ltimes L^\infty(K)\right)W^* = \mathcal{B}\left(L^2(K^*)\right) \otimes 1.$$

■

Remarque En fait, la même preuve montre que (M, Δ) est auto-dual i.e. $(\hat{M}, \hat{\Delta}) \simeq (M, \Delta)$ (voir [27]).

3.2 Définition

Dans cette section on définit l'exemple que l'on va étudier. Il s'inspire de l'exemple de la section précédente et de l'exemple 4.2 dans [4].

Soit $\mathcal{A}$ un anneau localement compact (à base dénombrable d'ouverts). Alors $\mathcal{A}^*$, le groupe des inversibles de $\mathcal{A}$, vu comme $\{(a,b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A},\ ab = ba = 1\}$ est un groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts. Le groupe $ax+b$ de $\mathcal{A}$ est $\mathcal{A}^* \ltimes \mathcal{A}$ pour l'action évidente de $\mathcal{A}^*$ sur $\mathcal{A}$. Si $G_1 = \mathcal{A}^* \times \{0\}$ et si G_2 est un sous groupe fermé de $\mathcal{A}^* \ltimes \mathcal{A}$ assorti à G_1 alors il est facile de voir que l'action de G_1 sur $L^\infty(G/_{G_1})$ est isomorphe à l'action de $\mathcal{A}^*$ sur $L^\infty(\mathcal{A})$. On a donc :

Lemme 3.2 *Si G_1, G_2 sont deux sous-groupes de $\mathcal{A}^* \ltimes \mathcal{A}$ tels que (G_1, G_2) soit assorti et $G_1 = \mathcal{A}^* \times \{0\}$ alors on a :*

$$G_1 \ltimes L^\infty(G_2) \simeq \mathcal{A}^* \ltimes L^\infty(\mathcal{A}).$$

Soient $(p_n)_n$ une suite de nombres premiers et $\mathcal{A} = \prod'_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{Q}_{p_n}, \mathbb{Z}_{p_n})$ le produit restreint des $\mathbb{Q}_{p_n}$ relativement aux $\mathbb{Z}_{p_n}$. Alors $\mathcal{A}$ est un anneau localement compact à base dénombrable d'ouverts. Le groupe des inversibles de $\mathcal{A}$ est :

$$\mathcal{A}^* = \prod_{n\in\mathbb{N}}{}' \left(\mathbb{Q}^*_{p_n}, \mathbb{Z}^*_{p_n}\right).$$

Soit ν_p^+ la mesure de Haar additive sur $\mathbb{Q}_p$ normalisée à 1 sur $\mathbb{Z}_p$, on rappelle que l'unique mesure de Haar sur $\mathbb{Q}_p^*$ normalisée à 1 sur $\mathbb{Z}_p^*$ est :

$$d\nu_p^\times(x) = (1-p^{-1})^{-1}|x|_p^{-1}d\nu_p^+(x). \tag{5}$$

Soit ν^+ la mesure sur $\mathcal{A}$ déduite des $\nu^+_{p_n}$. C'est l'unique mesure de Haar additive sur $\mathcal{A}$ normalisée à 1 sur $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p_n}$. On obtient de la même façon l'unique mesure de Haar $\nu^\times$ sur $\mathcal{A}^*$ normalisée à 1 sur $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}^*_{p_n}$ en considérant les mesures $\nu^\times_{p_n}$.

On note G le groupe $ax+b$ de $\mathcal{A}$ et μ la mesure de Haar à droite produit des mesures $\nu^\times$ et ν^+. On définit deux sous groupes de G. G_1 est le sous-groupe qui fixe 0 i.e. :

$$G_1 = \{(a,0) \in G\},$$

et G_2 est le sous groupe qui fixe "le point non-existant $\left(\frac{1}{p_n}\right)_n$ de $\mathcal{A}$" i.e. :

$$G_2 = \{((a_n),(b_n)) \in G,\ a_n + b_n p_n = 1\ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Afin de considérer le biproduit croisé de G_1 par G_2, démontrons le résultat suivant :

Lemme 3.3

(i) G_1 *et* G_2 *sont fermés et* $G_1 \cap G_2 = \{1\}$

(ii) $G_1G_2 \neq G$, $\mu(G - G_1G_2) = 0$ *et* G_1G_2 *est ouvert.*

Démonstration.
L'assertion (i) est triviale. Démontrons l'assertion (ii). On a :

$$G_2 = \left\{\left((a_n), \left(\frac{1-a_n}{p_n}\right)\right),\ a_n \neq 0\,\forall n \text{ et } a_n \in 1 + p_n\mathbb{Z}_{p_n} \text{ pour } n \text{ suffisamment grand}\right\}.$$

On déduit :

$$\begin{aligned} G_2G_1 &= \left\{\left((a_nb_n), \left(\frac{1-a_n}{p_n}\right)\right),\ b=(b_n)_n \in \mathcal{A}^*, a_n \neq 0\,\forall n \text{ et } a_n \in 1 + p_n\mathbb{Z}_{p_n} \text{ pour } n \text{ suffisamment grand}\right\} \\ &= \left\{(a,b) \in G,\ b_n \neq \frac{1}{p_n}\,\forall n \text{ où } b = (b_n)_n\right\}. \end{aligned}$$

Alors :

$$G - G_2G_1 = \left\{(a,b) \in G,\ \exists n \in \mathbb{N},\ b_n = \frac{1}{p_n} \text{ où } b = (b_n)_n\right\}$$

qui est clairement de mesure nulle. Donc $G - G_1G_2$ est de mesure nulle. De plus, il est clair que G_2G_1 est ouvert donc $G_1G_2 = (G_2G_1)^{-1}$ l'est aussi. ■

On peut maintenant effectuer le biproduit croisé de G_1 par G_2. Par le lemme 3.3 et le théorème 2.19 on a immédiatement le résultat suivant :

Proposition 3.4 *Le biproduit croisé de* G_1 *par* G_2 *est semi-régulier et n'est pas régulier.*

3.3 Type de l'algèbre

Le résultat principal de ce mémoire est le théorème suivant :

Théorème 3.5 *Pour tout* $\lambda \in [0,1]$ *il existe une famille de nombres premiers* $\mathcal{P}$ *telle que* $G_1 \ltimes L^\infty(G_2)$ *soit un facteur de type* III_λ.

Démonstration.
Par le lemme 3.2 il suffit d'étudier $\mathcal{A}^* \ltimes L^\infty(\mathcal{A})$.

Soit :

$$U \;:\; \bigotimes_{n=0}^{\infty}(L^2(\mathbb{Q}_{p_n}^* \times \mathbb{Q}_{p_n}), \chi_{\mathbb{Z}_{p_n}^* \times \mathbb{Z}_{p_n}}) \longrightarrow L^2(\mathcal{A}^* \times \mathcal{A})$$

défini sur un sous ensemble dense par :

$$U(F_0 \otimes \ldots \otimes F_n \otimes \chi_{\mathbb{Z}_{p_{n+1}}^* \times \mathbb{Z}_{p_{n+1}}} \otimes \ldots) = ((x_i),(y_i)) \mapsto \prod_{i=0}^{n} F_i(x_i,y_i) \times \prod_{i \geq n+1} \chi_{\mathbb{Z}_{p_i}^* \times \mathbb{Z}_{p_i}}(x_i,y_i)$$

où $F_i \in L^2(\mathbb{Q}_{p_i}^* \times \mathbb{Q}_{p_i})$, $(x_i) \in \mathcal{A}^*$ et $(y_i) \in \mathcal{A}$. C'est une isométrie d'image dense, qui se prolonge en un unitaire . On considère maintenant les applications suivantes :

$$\pi \;: L^\infty(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{B}(L^2(\mathcal{A}^* \times \mathcal{A})) \qquad\qquad \lambda \;: \mathcal{A}^* \longrightarrow \mathcal{B}(L^2(\mathcal{A}^* \times \mathcal{A}))$$
$$(\pi(F)\xi)(x,y) = F(xy)\xi(x,y) \qquad\qquad \lambda(t) = \lambda_t \otimes 1$$

Les applications $\pi_n \;:\; L^\infty(\mathbb{Q}_{p_n}) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{Q}_{p_n}^* \times \mathbb{Q}_{p_n}))$ et $\lambda_n \;:\; \mathbb{Q}_{p_n}^* \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{Q}_{p_n}^* \times \mathbb{Q}_{p_n}))$ sont définies de façon analogue. Un calcul immédiat donne les égalités suivantes :

$$U(\pi_0(F_0) \otimes \ldots \otimes \pi_n(F_n) \otimes 1 \ldots)U^* = \pi(F_0 \ldots F_n)$$
$$U(\lambda_0(t_0) \otimes \ldots \otimes \lambda_n(t_n) \otimes 1 \ldots)U^* = \lambda(t_0, \ldots, t_n, 1, \ldots)$$

où $F_i \in L^\infty(\mathbb{Q}_{p_i})$, $t_i \in \mathbb{Q}_{p_i}^*$ et $F_0 \ldots F_n((x_i)_i) := \prod_{i=0}^n F_i(x_i)$.
Comme $L^\infty(\mathcal{A})$ est engendrée par les fonctions de la forme $(x_i) \mapsto \prod_{i=1}^n F_i(x_i)$ où $F_i \in L^\infty(\mathbb{Q}_{p_i})$ et que $\{(t_1, \ldots, t_n, 1, \ldots),\, t_i \in \mathbb{Q}_{p_i}^*,\, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathcal{A}^*$, on déduit :

$$U^*\left(\mathcal{A}^* \ltimes L^\infty(\mathcal{A})\right)U = \bigotimes_{n=0}^{\infty}(\mathbb{Q}_{p_n}^* \ltimes L^\infty(\mathbb{Q}_{p_n}), L^2(\mathbb{Q}_{p_n}^* \times \mathbb{Q}_{p_n}), \chi_{\mathbb{Z}_{p_n}^* \times \mathbb{Z}_{p_n}}). \tag{6}$$

On considère maintenant deux projections q_1 et q_2 de $\mathcal{A}^* \ltimes L^\infty(\mathcal{A})$. Soit q_1 l'image de $\chi_{(\prod_n \mathbb{Z}_{p_n}^*)}$ par la représentation de $L^1(\mathcal{A}^*)$ associée à la représentation régulière gauche de $\mathcal{A}^*$, i.e. q_1 est la convolution à gauche par $\chi_{(\prod_n \mathbb{Z}_{p_n}^*)}$. On sait que (c.f. [8]) $q_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{A}^*)$. On note encore q_1 l'image de q_1 dans $\mathcal{A}^* \ltimes L^\infty(\mathcal{A})$. Soit q_2 l'image de $\chi_{(\prod_n \mathbb{Z}_{p_n})} \in L^\infty(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{A}^* \ltimes L^\infty(\mathcal{A})$. q_1 est une projection car on a $\chi_{(\prod_n \mathbb{Z}_{p_n}^*)} * \chi_{(\prod_n \mathbb{Z}_{p_n}^*)} = \chi_{(\prod_n \mathbb{Z}_{p_n}^*)}$ en utilisant le fait que $\prod_n \mathbb{Z}_{p_n}^*$ est un sous-groupe de mesure 1. Il est facile de vérifier que q_1 et q_2 commutent :

$$\left(q_1 q_2 \xi\right)(x,y) = \chi_{(\prod_n \mathbb{Z}_{p_n})}(xy)\left(q_2\xi\right)(x,y) = \chi_{(\prod_n \mathbb{Z}_{p_n})}(xy)\int_{\prod_n \mathbb{Z}_{p_n}^*} \xi(t^{-1}x,y)dt.$$

Et :

$$\begin{aligned}\left(q_2 q_1 \xi\right)(x,y) &= \int_{\prod_n \mathbb{Z}_{p_n}^*} \left(q_1\xi\right)(t^{-1}x,y)dt = \int_{\prod_n \mathbb{Z}_{p_n}^*} \chi_{(\prod_n \mathbb{Z}_{p_n})}(t^{-1}xy)\xi(t^{-1}x,y)dt \\ &= \chi_{(\prod_n \mathbb{Z}_{p_n})}(xy)\int_{\prod_n \mathbb{Z}_{p_n}^*} \xi(t^{-1}x,y)dt\end{aligned}$$

car $t^{-1}xy \in \prod_n \mathbb{Z}_{p_n}$ et $t \in \prod_n \mathbb{Z}_{p_n}^* \Leftrightarrow xy \in \prod_n \mathbb{Z}_{p_n}$ et $t \in \prod_n \mathbb{Z}_{p_n}^*$. Donc $q = q_1 q_2$ est une projection dans $\mathcal{A}^* \ltimes L^\infty(\mathcal{A})$. On a alors le résultat suivant :

Lemme 3.6 *Soit* $q_n = q_n^1 q_n^2$ *avec* q_n^1 *l'image de* $\chi_{\mathbb{Z}_{p_n}^*}$ *par la représentation de* $L^1(\mathbb{Q}_{p_n}^*)$ *associée à la représentation régulière gauche de* $\mathbb{Q}_{p_n}^*$ *et* $q_n^2 = \chi_{\mathbb{Z}_{p_n}} \in L^\infty(\mathbb{Q}_{p_n})$ *(on confond* q_n^i *avec son image dans* $\mathbb{Q}_{p_n}^* \ltimes L^\infty(\mathbb{Q}_{p_n})$ *). Alors* q_n *est une projection,* $q_n \chi_{\mathbb{Z}_{p_n}^* \times \mathbb{Z}_{p_n}} = \chi_{\mathbb{Z}_{p_n}^* \times \mathbb{Z}_{p_n}}$ *et on a l'isomorphisme suivant :*

$$q\left(\mathcal{A}^* \ltimes L^\infty(\mathcal{A})\right) q \simeq \bigotimes_{n=0}^{\infty} (q_n \left(\mathbb{Q}_{p_n}^* \ltimes L^\infty(\mathbb{Q}_{p_n})\right) q_n, \omega_{\chi_{\mathbb{Z}_{p_n}^* \times \mathbb{Z}_{p_n}}})$$

où $\omega_{\chi_{\mathbb{Z}_{p_n}^* \times \mathbb{Z}_{p_n}}}$ *est l'état vectoriel associé à* $\chi_{\mathbb{Z}_{p_n}^* \times \mathbb{Z}_{p_n}}$.

Démonstration.

On montre, comme pour q_1 et q_2, que q_n^1 et q_n^2 sont des projections qui commutent. Donc q_n est une projection et on a :

$$(q_n\xi)(x, y) = \chi_{\mathbb{Z}_{p_n}}(xy) \int_{\mathbb{Z}_{p_n}^*} \xi(t^{-1}x, y) dt, \tag{7}$$

ce qui implique que $q_n \chi_{\mathbb{Z}_{p_n}^* \times \mathbb{Z}_{p_n}} = \chi_{\mathbb{Z}_{p_n}^* \times \mathbb{Z}_{p_n}}$. Calculons l'image de q par l'isomorphisme (6). Soient $F_i \in L^2(\mathbb{Q}_{p_i}^* \times \mathbb{Q}_{p_i})$, $x = (x_i) \in \mathcal{A}^*$, $y = (y_i) \in \mathcal{A}$. On a :

$$\begin{aligned}\left(qU\left(F_1 \otimes \ldots \otimes F_n \bigotimes_{i \geq n+1} \chi_{\mathbb{Z}_{p_i}^* \times \mathbb{Z}_{p_i}}\right)\right)(x, y) &= \prod_{i=0}^{n} \chi_{\mathbb{Z}_{p_i}}(x_i y_i) \int_{\mathbb{Z}_{p_i}^*} F_i(t_i^{-1} x_i, y_i) dt_i \\ &\times \prod_{i \geq n+1} \chi_{\mathbb{Z}_{p_i}}(x_i y_i) \int_{\mathbb{Z}_{p_i}^*} \chi_{\mathbb{Z}_{p_i}^* \times \mathbb{Z}_{p_i}}(t_i^{-1} x_i, y_i) dt_i \\ &= \prod_{i=0}^{n} (q_i F_i)(x_i, y_i) \prod_{i \geq n+1} \left(q_i \chi_{\mathbb{Z}_{p_i}^* \times \mathbb{Z}_{p_i}}\right)(x_i, y_i).\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$U^* q U = \bigotimes_{n=0}^{\infty} q_n. \tag{8}$$

Donc on a :

$$U\left(q\left(\mathcal{A}^* \ltimes L^\infty(\mathcal{A})\right) q\right) U^* = \bigotimes_{n=0}^{\infty} (q_n \left(\mathbb{Q}_{p_n}^* \ltimes L^\infty(\mathbb{Q}_{p_n})\right) q_n, q_n L^2(\mathbb{Q}_{p_n}^* \times \mathbb{Q}_{p_n}), \chi_{\mathbb{Z}_{p_n}^* \times \mathbb{Z}_{p_n}}).$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et notons $e = q_n$, $p = p_n$ et $\pi = \pi_n$. Pour conclure le lemme il suffit de montrer que $eL^2(\mathbb{Q}_p^* \times \mathbb{Q}_p)$ est la construction G.N.S de l'état vectoriel $\omega_{\chi_{\mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p}}$ sur $e\left(\mathbb{Q}_p^* \ltimes L^\infty(\mathbb{Q}_p)\right) e$, i.e. le vecteur $\chi_{\mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p}$ est cyclique et séparateur.

Soient (X, ν) un espace mesuré standard, f une classe d'équivalence (pour la relation habituelle) d'applications mesurables de X dans $\mathbb{C}$ et $A \subseteq X$. On dit que le support de f est inclus dans A et on note $\text{Supp}(f) \subseteq A$ si il existe un représentant de f à support dans A. On commence par démontrer le lemme suivant :

Lemme 3.7 *Soit* $f \in C_c(\mathbb{Q}_p)$ *avec* $\text{Supp}(f) \subseteq \mathbb{Z}_p$. *Soit* $f_n = \chi_{p^n \mathbb{Z}_p^*} * f$ *où le produit de convolution est sur* $\mathbb{Q}_p^*$ *pour la mesure* $\nu_p^\times$. *Alors,* f_n *est dans* $L^2(\mathbb{Q}_p)$ *et :*

$$\|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{Q}_p)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Démonstration. On considère $f \in L^2(\mathbb{Q}_p^*)$ et $\text{Supp}(f) \subset \mathbb{Z}_p^*$. On remarque que $\left\{p^n \mathbb{Z}_p^*\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de voisinage de 1 dans $\mathbb{Q}_p^*$. Donc on déduit des résultats classiques de convolution que

$f_n \in L^2(\mathbb{Q}_p^*)$ et que $\|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{Q}_p^*)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. De plus, si $g \in L^2(\mathbb{Q}_p^*)$ et $\mathrm{Supp}(g) \subseteq \mathbb{Z}_p^*$ on déduit de l'équation (5) :

$$\begin{aligned}\|g\|^2_{L^2(\mathbb{Q}_p)} &= (1-p^{-1}) \int_{\mathbb{Q}_p^*} |g(x)|^2 |x|_p d\nu_p^\times(x) \\ &\leq (1-p^{-1}) \int_{\mathbb{Z}_p^*} |g(x)|^2 d\nu_p^\times(x) = (1-p^{-1}) \|g\|^2_{L^2(\mathbb{Q}_p^*)}.\end{aligned}$$

Or, $\mathrm{Supp}(f_n) \subseteq p^n\mathbb{Z}_p^* + \mathbb{Z}_p^*$ donc $\mathrm{Supp}(f_n) \subseteq \mathbb{Z}_p^*$. On en déduit le lemme. ■

Commençons par calculer l'image de e. On a par (7) :

$\mathrm{Im}(e) = \left\{\xi \in L^2(\mathbb{Q}_p^* \times \mathbb{Q}_p),\ \xi \text{ est invariant par translation par } \mathbb{Z}_p^* \text{ sur la } 1^{\text{ière}} \text{ variable et } \mathrm{Supp}(\xi) \subseteq X\right\}$.

où $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{Q}_p^* \times \mathbb{Q}_p,\ xy \in \mathbb{Z}_p\right\}$. Donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(e) &= \overline{\mathrm{Vect} < \chi_{p^n\mathbb{Z}_p^*} \otimes \eta,\ n \in \mathbb{Z},\ \eta \in L^2(\mathbb{Q}_p) \text{ et } \mathrm{Supp}(\eta) \subseteq p^{-n}\mathbb{Z}_p >} \\ &= \overline{\mathrm{Vect} < \chi_{p^n\mathbb{Z}_p^*} \otimes \chi_{p^{-n}\mathbb{Z}_p} L^2(\mathbb{Q}_p),\ n \in \mathbb{Z} >} \\ &= \overline{\mathrm{Vect} < \chi_{p^n\mathbb{Z}_p^*} \otimes \chi_{p^{-n}\mathbb{Z}_p} C_c(\mathbb{Q}_p),\ n \in \mathbb{Z} >}.\end{aligned}$$

où $\mathrm{Vect} < - >$ désigne l'espace vectoriel engendré.

Montrons que $\chi_{\mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p}$ est cyclique. Soit $H = e\left(\mathbb{Q}_p^* \ltimes L^\infty(\mathbb{Q}_p)\right) e\chi_{\mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p}$. Un calcul facile montre que si $F \in L^\infty(\mathbb{Q}_p)$ on a :

$$e\pi(F)e\chi_{\mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p} = \chi_{\mathbb{Z}_p^*} \otimes \Big(\chi_{\mathbb{Z}_p^*} * (\chi_{\mathbb{Z}_p} F)\Big).$$

Si l'on note α l'action de $\mathbb{Q}_p^*$ sur $L^\infty(\mathbb{Q}_p)$ on déduit du calcul précédent :

$$e\pi(\alpha_g(F))e\chi_{\mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p} = \chi_{\mathbb{Z}_p^*} \otimes \Big(\chi_{g\mathbb{Z}_p^*} * (\chi_{\mathbb{Z}_p} F)\Big) \tag{9}$$

pour tout $g \in \mathbb{Q}_p^*$. En appliquant (9) à $g = p^n$ on voit que :

$$\{\chi_{\mathbb{Z}_p^*} \otimes \Big(\chi_{p^n\mathbb{Z}_p^*} * (\chi_{\mathbb{Z}_p} F)\Big),\ F \in C_c(\mathbb{Q}_p),\ n \in \mathbb{Z}\} \subseteq H.$$

De plus, le lemme 3.7 implique que :

$$\chi_{\mathbb{Z}_p^*} \otimes (\chi_{p^n\mathbb{Z}_p^*} * \chi_{\mathbb{Z}_p} F) \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2(\mathbb{Q}_p^* \times \mathbb{Q}_p)} \chi_{\mathbb{Z}_p^*} \otimes (\chi_{\mathbb{Z}_p} F)$$

pour $F \in C_c(\mathbb{Q}_p)$. Donc $\{\chi_{\mathbb{Z}_p^*} \otimes (\chi_{\mathbb{Z}_p} F),\ F \in C_c(\mathbb{Q}_p)\} \subseteq \overline{H}$. De plus, si $g \in \mathbb{Q}_p^*$, on a :

$$e(\lambda_g \otimes 1)e\Big(\chi_{\mathbb{Z}_p^*} \otimes (\chi_{\mathbb{Z}_p} F)\Big) = \chi_{g\mathbb{Z}_p^*} \otimes \left(\chi_{g^{-1}\mathbb{Z}_p} F\right).$$

Donc en appliquant ceci à $g = p^{-n}$ on déduit $\{\chi_{p^n\mathbb{Z}_p^*} \otimes (\chi_{p^{-n}\mathbb{Z}_p} F),\ F \in C_c(\mathbb{Q}_p)\} \subseteq \overline{H}$, ce qui implique que $\mathrm{Im}(e) = \overline{H}$. Montrons maintenant que $\chi_{\mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p}$ est séparateur. Il suffit pour cela de montrer que c'est un vecteur cyclique pour le commutant. Notons $K = e\left(\mathbb{Q}_p^* \ltimes L^\infty(\mathbb{Q}_p)\right)' e\chi_{\mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p}$. Il est facile de vérifier que si $g \in \mathbb{Q}_p^*$ et $F \in L^\infty(\mathbb{Q}_p)$ alors les éléments $\rho_g \otimes \lambda_g$ et $\pi(F)$ sont dans $\left(\mathbb{Q}_p^* \ltimes L^\infty(\mathbb{Q}_p)\right)' = \left(\mathcal{L}(\mathbb{Q}_p^*) \otimes 1\right)' \cap (\pi(L^\infty(\mathbb{Q}_p))'$. On en déduit comme précédemment, par l'équation (9) et le lemme 3.7, que $\{\chi_{\mathbb{Z}_p^*} \otimes (\chi_{\mathbb{Z}_p} F),\ F \in C_c(\mathbb{Q}_p)\} \subseteq \overline{K}$. On a également l'identité suivante :

$$e(\rho_g \otimes \lambda_g)e\Big(\chi_{\mathbb{Z}_p^*} \otimes (\chi_{\mathbb{Z}_p} F)\Big) = \chi_{g^{-1}\mathbb{Z}_p^*} \otimes \left(\chi_{g\mathbb{Z}_p} \alpha_g(F)\right).$$

On en déduit que $\{\chi_{p^n\mathbb{Z}_p^*}\otimes(\chi_{p^{-n}\mathbb{Z}_p}F),\ F\in C_c(\mathbb{Q}_p)\}\subseteq\overline{K}$. Donc Im$e=\overline{K}$.

■

Si l'on note, pour p un nombre premier, Φ_p l'état normal fidèle sur $\mathcal{B}(l^2(\mathbb{N}))$ défini par :

$$\Phi_p(x)=\sum_{n=}^{\infty}p^{-n}(1-p^{-1})<xe_n,e_n>$$

où (e_n) est la base canonique de $\mathcal{B}(l^2(\mathbb{N}))$ alors on a l'identification suivante :

Lemme 3.8

$$q\left(\mathcal{A}^*\ltimes L^\infty(\mathcal{A})\right)q\simeq\bigotimes_{n\in\mathbb{N}}\left(\mathcal{B}(l^2(\mathbb{N})),\Phi_{p_n}\right).$$

Démonstration. Par l'équation (5), on déduit que les applications suivantes sont unitaires :

$$u\ :\ L^2(\mathbb{Q}_p^*)\longrightarrow L^2(\mathbb{Q}_p)\,,\ (u\xi)(x)=|x|_p^{-\frac{1}{2}}(1-p^{-1})^{-\frac{1}{2}}\xi(x),$$

$$V\ :\ L^2(\mathbb{Q}_p^*\times\mathbb{Q}_p^*)\longrightarrow L^2(\mathbb{Q}_p^*\times\mathbb{Q}_p^*)\,,\ (V\xi)(x,y)=\xi(xy^{-1},y),\quad\text{et,}$$

$$W\ :\ L^2(\mathbb{Q}_p^*\times\mathbb{Q}_p)\longrightarrow L^2(\mathbb{Q}_p^*\times\mathbb{Q}_p^*)\,,\ W=V(1\otimes u^*).$$

On a alors les formules suivantes :

$$(W\xi)(x,y)=|y|_p^{\frac{1}{2}}(1-p^{-1})^{\frac{1}{2}}\xi(xy^{-1},y)\ \text{ et,}\tag{10}$$

$$(W^*\xi)(x,y)=|y|_p^{-\frac{1}{2}}(1-p^{-1})^{-\frac{1}{2}}\xi(xy,y).\tag{11}$$

A l'aide de (10) et (11) on calcule $W\left(\mathbb{Q}_p^*\ltimes L^\infty(\mathbb{Q}_p)\right)W^*$. Si $g\in\mathbb{Q}_p^*$ on a :

$$(W(\lambda_g\otimes1)W^*\xi)(x,y)=\xi(t^{-1}x,y)=\left((\lambda_g\otimes1)\xi\right)(x,y).$$

Si $F\in L^\infty(\mathbb{Q}_p)$ on a :

$$(W\pi(F)W^*\xi)(x,y)=F(x)\xi(x,y)=((F\otimes1)\xi)(x,y).$$

Comme les mesures de Haar multiplicative et additive ont les mêmes ensembles de mesure nulle on a $L^\infty(\mathbb{Q}_p)=L^\infty(\mathbb{Q}_p^*)$ et on déduit des calculs précédents que :

$$W\left(\mathbb{Q}_p^*\ltimes L^\infty(\mathbb{Q}_p)\right)W^*=\left(\mathcal{L}(\mathbb{Q}_p^*)\cup L^\infty(\mathbb{Q}_p^*)\right)^{''}\otimes1.$$

Et comme $\left(L^\infty(\mathbb{Q}_p^*)\right)^{'}=L^\infty(\mathbb{Q}_p^*)$, on en déduit que $\left(\mathcal{L}(\mathbb{Q}_p^*)\right)^{'}\cap\left(L^\infty(\mathbb{Q}_p^*)\right)^{'}$ est l'ensemble des fonctions L^∞ invariantes par translations, donc est réduit aux fonctions constantes d'où :

$$W\left(\mathbb{Q}_p^*\ltimes L^\infty(\mathbb{Q}_p)\right)W^*=\mathcal{B}\left(L^2(\mathbb{Q}_p^*)\right)\otimes1.\tag{12}$$

Comme :

$$\begin{aligned}\chi_{\mathbb{Z}_p^*\times\mathbb{Z}_p}&=\chi_{\mathbb{Z}_p^*\times\mathbb{Z}_p-\{0\}}\qquad\text{presque partout}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\chi_{\mathbb{Z}_p^*\times p^n\mathbb{Z}_p^*}\,,\end{aligned}$$

on a :

$$W\chi_{\mathbb{Z}_p^*\times\mathbb{Z}_p}=\sum_{n=0}^{\infty}p^{-\frac{n}{2}}(1-p^{-1})^{\frac{1}{2}}\chi_{p^n\mathbb{Z}_p^*\times p^n\mathbb{Z}_p^*},$$

on en déduit que l'état vectoriel $\omega_{\chi_{\mathbb{Z}_p^*\times\mathbb{Z}_p}}$ sur $\mathbb{Q}_p^* \ltimes L^\infty(\mathbb{Q}_p)$ devient par l'isomorphisme (12) avec $\mathcal{B}\left(L^2(\mathbb{Q}_p^*)\right)$ l'état ω défini par :

$$\omega(x) =< (x \otimes 1)W\chi_{\mathbb{Z}_p^*\times\mathbb{Z}_p}, W\chi_{\mathbb{Z}_p^*\times\mathbb{Z}_p} >= \sum_{n=0}^{\infty} p^{-n}(1-p^{-1}) < x\chi_{p^n\mathbb{Z}_p^*}, \chi_{p^n\mathbb{Z}_p^*} > .$$

Soit f la projection de $L^2(\mathbb{Q}_p^*)$ définie par $f = f_1 f_2$ où f_1 est la convolution à gauche par $\chi_{\mathbb{Z}_p^*}$ et f_2 est la multiplication par $\chi_{\mathbb{Z}_p}$. On a :

$$(f\xi)(x) = \chi_{\mathbb{Z}_p}(x) \int_{\mathbb{Z}_p^*} \xi(t^{-1}x)dt. \tag{13}$$

Si l'on note e la projection q_n où $p_n = p$ (voir équation (7)) alors on a :

$$(WfW^*\xi)(x,y) = \chi_{\mathbb{Z}_p}(x) \int_{\mathbb{Z}_p^*} \xi(t^{-1}x, y)dt.$$

Donc $e = f \otimes 1$ et :

$$W\left(e\left(\mathbb{Q}_p^* \ltimes L^\infty(\mathbb{Q}_p)\right)e\right)W^* = \left(f\mathcal{B}\left(L^2(\mathbb{Q}_p^*)\right)f\right) \otimes 1 = \mathcal{B}\left(fL^2(\mathbb{Q}_p^*)\right) \otimes 1.$$

De plus, par l'équation (13) on déduit que :

$$\begin{aligned} fL^2(\mathbb{Q}_p^*) &= \left\{\xi \in L^2(\mathbb{Q}_p^*)\,,\ \xi \text{ est à support dans } \mathbb{Z}_p - \{0\} \text{ et est invariant par translation par } \mathbb{Z}_p^*\right\} \\ &= \overline{\text{Vect} < \chi_{p^n\mathbb{Z}_p^*},\ n \in \mathbb{N} >}, \end{aligned}$$

ce qui fournit un unitaire entre $fL^2(\mathbb{Q}_p^*)$ et $l^2(\mathbb{N})$ qui envoie $\chi_{p^n\mathbb{Z}_p^*}$ sur e_n et l'état ω sur l'état Φ_p. On termine la démonstration en appliquant le lemme 3.6.

■

On démontre maintenant un résultat général sur les algèbres de von Neumann. Si M est une algèbre de von Neumann, une projection $p \in M$ est dite purement infinie si $p \neq 0$ et s'il existe deux projections e et f dans M telles que $ef = 0$, $p = e + f$ et $e \sim f \sim p$. Une algèbre de von Neumann est dite purement infinie si 1 est une projection purement infinie de M. On a le résultat suivant :

Lemme 3.9 *Soit M une algèbre de von Neumann à prédual séparable et purement infinie. Si p est une projection de M purement infinie, de support central 1, alors $M \simeq pMp$.*

Démonstration. On rappelle que (c.f. [24]) si M est à prédual séparable et si e, f sont deux projections purement infinies de M alors $Z(e) = Z(f)$ implique $e \sim f$ où $Z(e)$ est le support central de e. On peut supposer $M \subseteq \mathcal{B}(H)$ avec H séparable et $\overline{MH} = H$. On définit alors une sous-algèbre involutive de $\mathcal{B}(H \oplus pH)$ par :

$$N = \begin{pmatrix} M & Mp \\ pM & pMp \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2p \\ px_3 & px_4p \end{pmatrix},\ x_i \in M \right\}.$$

On vérifie par un calcul très simple que $N^{''} = N$, donc N est une algèbre de von Neumman et comme $H \oplus pH$ est séparable, N_* est séparable. Il est facile de vérifier que les deux projections :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

sont purement infinies dans N en utilisant le fait que 1 et p le sont dans M. Puis on voit que le support central de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ car c'est la projection sur :

$$\overline{N\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(H \oplus pH)} = \overline{MH \oplus pMH} = H \oplus pH.$$

De plus, comme $\overline{MpH} = H$, on a :

$$\overline{N\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}(H \oplus pH)} = \overline{MpH \oplus pMpH} = H \oplus pH,$$

donc, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ est de support central $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par conséquent, il existe $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in N$ tel que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^*a + c^*c & a^*b + c^*d \\ b^*a + d^*c & b^*b + d^*d \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa^* + bb^* & ac^* + bd^* \\ ca^* + db^* & cc^* + dd^* \end{pmatrix} \tag{15}$$

En utilisant les équations (14) et (15) on trouve $a = b = d = 0$. On en déduit que $c \in pM$ vérifie $c^*c = 1$ et $cc^* = p$ donc $c : \ H \to pH$ est unitaire et $cMc^* = c1M1c^* = cc^*cMc^*cc^* = pcMc^*p = pMp$, ce qui démontre la proposition. ■

Il est facile de voir que tout facteur M de type I_∞ (et à prédual séparable) est purement infini. En effet, en écrivant M de la forme $\mathcal{B}(l^2(\mathbb{N}))$ et en décomposant $1 = e + f$ avec e la projection sur l'espace vectoriel fermé engendré par les vecteurs de base d'indices pairs et $f = 1 - e$ on voit immédiatement que 1 est purement infinie. On en déduit que $\mathbb{Q}_p^* \ltimes L^\infty(\mathbb{Q}_p)$ est purement infinie (c'est de type I_∞ par l'equation (12)). On remarque également qu'un produit tensoriel infini $\bigotimes_n (M_n, H_n, \xi_n)$ est purement infini si l'une des algèbres M_n est purement infinie. En effet, si M_i est purement infinie, on écrit $1 = e + f$ avec $ef = 0$, et $e \sim f \sim 1$ et on obtient, dans le produit tensoriel infini, $1 = E + F$ avec $EF = 0$, et $E \sim F \sim 1$ où $E = 1 \otimes \ldots \otimes e \otimes 1 \otimes \ldots$ et $F = 1 \otimes \ldots \otimes f \otimes 1 \otimes \ldots$ (e et f en $i^{\text{ième}}$ place). On déduit donc de l'isomorphisme (6) que $\mathcal{A}^* \ltimes L^\infty(\mathcal{A})$ est purement infinie et on voit avec le lemme 3.8 que la projection q (définie avant le lemme 3.8) est purement infinie. On a alors :

Proposition 3.10 *On a un isomorphisme :*

$$\mathcal{A}^* \ltimes L^\infty(\mathcal{A}) \simeq \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \left(\mathcal{B}(l^2(\mathbb{N})), \Phi_{p_n}\right).$$

Démonstration. D'après la discussion précédente, il suffit de montrer que q est de support central 1. On commence par remarquer que si $M = \bigotimes(M_n, H_n, \xi_n)$, f_n est une projection dans M_n avec $\xi_n f_n = f_n$ et $\overline{M_n f_n H_n} = H_n$ alors $f = \bigotimes f_n$ vérifie $\overline{MfH} = H$. Donc en utilisant l'isomorphisme (6) et l'égalité (8), il suffit de montrer que pour tout n, $Z(q_n) = 1$. On reprend les notations de la démonstrations du lemme 3.6 i.e. on fixe n et on pose $e = q_n$, $p = p_n$ et $\pi = \pi_n$. Soit :

$$H = \mathbb{Q}_p^* \ltimes L^\infty(\mathbb{Q}_p) e L^2(\mathbb{Q}_p^* \times \mathbb{Q}_p).$$

Un calcul simple montre que, pour $\xi \in L^2(\mathbb{Q}_p^*)$, $\eta \in L^2(\mathbb{Q}_p)$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left(\lambda_{p^{-n}} \otimes 1\right) \pi \left(\chi_{(\mathbb{Q}_p - \mathbb{Z}_p)}\right) e(\xi \otimes \eta) = \left(\chi_{p^n \mathbb{Z}_p^*} \xi\right) \otimes \eta,$$

et comme $\left\{p^n \mathbb{Z}_p^*\right\}$ est une base de voisinages ouverts de 1 dans $\mathbb{Q}_p^*$ on déduit :

$$\left(\chi_{p^n \mathbb{Z}_p^*} \xi\right) \otimes \eta \xrightarrow[n \to +\infty]{L^2(\mathbb{Q}_p^* \times \mathbb{Q}_p)} \xi \otimes \eta.$$

Par conséquent, $\xi \otimes \eta \in \overline{H}$, ce qui démontre la proposition. ∎

On démontre maintenant la proposition suivante :

Proposition 3.11 *Pour tout $\lambda \in [0,1]$, il existe une suite $(q_k)_{k \geq 0}$ de nombres premiers telle que $M = \bigotimes_{k=0}^{\infty} \left(\mathcal{B}(l^2(\mathbb{N})), \phi_{q_k}\right)$ soit un facteur de type III_λ.*

Démonstration.

On présente ici la même preuve que [26]. Le groupe d'automorphismes modulaires $\sigma_{p,t}$ de ϕ_p est la conjugaison par l'unitaire $U_{p,t}$ qui est l'opérateur diagonal ayant pour valeurs propres $\{p^{itn},\, n \in \mathbb{N}\}$. On commence par démontrer le lemme suivant :

Lemme 3.12 *Soit $(q_k)_{k \geq 0}$ une suite de nombres premiers telle que $\lim_{k \to \infty} q_k = \infty$. Alors, si $M = \bigotimes_{k=0}^{\infty} \left(\mathcal{B}(l^2(\mathbb{N})), \phi_{q_k}\right)$ on a pour tout $\lambda \in]0,1[$:*

$$\frac{2\pi}{\ln \lambda} \in T(M) \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q_k^{-1} \left|1 - q_k^{\frac{2i\pi}{\ln \lambda}}\right| < \infty.$$

Démonstration. Soient $\lambda \in]0,1[$ et $t = \frac{2\pi}{\ln \lambda}$. Par le théorème 2.12 on a :

$$t \in T(M) \Longleftrightarrow \sum_k |1 - \phi_{q_k}(U_{q_k,t})| < \infty.$$

Or :

$$\begin{aligned} 1 - \phi_p(U_{p,t}) &= 1 - \sum_{n \geq 0} p^{-n}(1 - p^{-1}) p^{itn} = 1 - \frac{1 - p^{-1}}{1 - p^{it-1}} \\ &= \frac{p^{-1} - p^{it-1}}{1 - p^{it-1}} = \frac{1 - p^{it}}{p - p^{it}}. \end{aligned}$$

Donc on a $t \in T(M) \Longleftrightarrow \sum_k \left|\frac{1 - q_k^{it}}{q_k - q_k^{it}}\right| < \infty$. Mais $\lim_{k \to +\infty} q_k = +\infty$ implique que :

$$\left|\frac{1 - q_k^{it}}{q_k - q_k^{it}}\right| \sim_{k \to +\infty} q_k^{-1} |1 - q_k^{it}|$$

et le lemme est démontré.

∎

On démontre maintenant le lemme suivant :

Lemme 3.13 *Soit $\mu \in]1, \infty[$. Alors il existe une constante $A > 0$ et une suite $(n_j)_{j \geq 1}$ de nombres entiers avec $n_j \uparrow +\infty$ tels que :*

1. $n_j \ln n_j \sim \mu^j$
2. $\left|\frac{\ln(n_j \ln n_j)}{\ln \mu} - j\right| < \frac{A}{j}$.

Démonstration. Soient $x_j \in]1,\infty[$ tel que $x_j \ln x_j = \mu^j$ et $n_j = [x_j]$ où $[-]$ désigne la partie entière. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $x \mapsto x \ln x$ et en utilisant le fait que la suite $\left(\frac{1+\ln x_j}{j}\right)_{j\geq 1}$ est bornée on trouve une constante $C > 0$ telle que $\left|n_j \ln n_j - \mu^j\right| < Cj$. Donc l'assertion 1 est démontrée et de plus, en appliquant les acroissements finis à $x \mapsto \ln x$ et en remarquant que la suite $\left(\frac{j^2}{n_j \ln n_j}\right)$ est bornée, on déduit l'assertion 2. ∎

On rappelle le théorème des nombres premiers (voir par exemple [19]) qui peut s'écrire sous la forme :

$$p_n \sim_{n\to+\infty} n \ln n + n \ln(\ln n) + O(n)$$

où p_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre premier.

Démontrons maintenant la proposition.

Le cas $\lambda \in]0,1[$.

Soient $\mu = \frac{1}{\lambda}$ et p_n le $n^{\text{ième}}$ nombre premier. On a $\mu \in]1,\infty[$ et l'on peut donc considérer une suite $(n_j)_{k\geq 1}$ comme dans le lemme 3.13. On pose $q_j^{'} = p_{n_j}$ puis on construit la suite $(q_k)_{k\geq 0}$ à partir de la suite $(q_j^{'})_{k\geq 1}$ en répétant $\left[\frac{\mu^j}{j}\right]$ fois le terme $q_j^{'}$, i.e on pose :

$$q_0 = q_1^{'}, q_1 = q_1^{'}, \ldots, q_{[\mu]-1} = q_1^{'}, q_{[\mu]} = q_2^{'}, \ldots, q_{[\mu]+\left[\frac{\mu^2}{2}\right]-1} = q_2^{'}, q_{[\mu]+\left[\frac{\mu^2}{2}\right]} = q_3^{'}, \ldots$$

Vérifions que la proposition marche pour cette suite.

Etape 1 : *M est de type* III

D'après le lemme 2.7, il suffit de montrer que :

$$\sum_{i,k\geq 0} q_k^{-i}\left(1-q_k^{-1}\right)\inf\left\{\left|q_k^i - 1\right|, 1\right\} = +\infty.$$

Or on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i,k\geq 0} q_k^{-i}\left(1-q_k^{-1}\right)\inf\left\{\left|q_k^i - 1\right|, 1\right\} &= \sum_{k\geq 0, i\geq 1} q_k^{-i}\left(1-q_k^{-1}\right) = \sum_{k\geq 0}\left(1-q_k^{-1}\right)\sum_{i\geq 1}\left(\frac{1}{q_k}\right)^i \\ &= \sum_{k\geq 0}\frac{1}{q_k} = \sum_{j\geq 1}\frac{1}{q_j^{'}}\left[\frac{\mu^j}{j}\right].\end{aligned}$$

De plus, le théorème des nombres premiers et le lemme 3.13 donnent :

$$\frac{1}{q_j^{'}}\left[\frac{\mu^j}{j}\right] \sim \frac{1}{n_j \ln n_j}\frac{\mu^j}{j} \sim \frac{1}{j}. \tag{16}$$

Donc M est de type III.

Etape 2 : $\left\{\frac{2\pi n}{\ln \lambda}, n \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq T(M)$.

Comme $T(M)$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, il suffit de montrer, par le lemme 3.12 que :

$$\sum_{k\geq 0}^{\infty} q_k^{-1}\left|1 - q_k^{\frac{2i\pi}{\ln \lambda}}\right| < \infty.$$

On a :

$$\sum_{k\geq 0}^{\infty} q_k^{-1}\left|1 - q_k^{\frac{2i\pi}{\ln \lambda}}\right| = \sum_{j\geq 1}\left[\frac{\mu^j}{j}\right]\frac{1}{q_j^{'}}\left|1 - \left(q_j^{'}\right)^{\frac{2i\pi}{\ln \lambda}}\right|$$

et par l'équivalence (16), cette série est de même type que $\sum_j \frac{1}{j}\left|1-\left(q_j^{'}\right)^{\frac{2i\pi}{\ln\lambda}}\right|$. Montrons que cette dernière série est convergente. Par le théorème des nombres premiers on a :

$$\left|ln(n_j \ln n_j) - \ln p_{n_j}\right| = \left|\ln\left(1+\frac{\ln(\ln n_j)}{\ln n_j}+\frac{O(n_j)}{n_j \ln n_j}\right)\right|.$$

Puis en utilisant le fait que $\ln(1+x) < x$, $\frac{\ln x}{x}$ est décroissante pour $x > e$ et que $\ln n_j > \frac{j}{2}$ pour j assez grand, on trouve une constante $B > 0$ telle que :

$$\left|\ln(n_j \ln n_j) - \ln p_{n_j}\right| < B\frac{\ln n_j}{j}.$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité précédente et l'inégalité (2) du lemme 3.13 on trouve une constante $C > 0$ telle que :

$$\frac{\ln p_{n_j}}{\ln\lambda} = -j+\epsilon \text{ avec } |\epsilon| < C\frac{\ln j}{j}. \tag{17}$$

Ce qui permet de déduire l'existence d'une constante $D > 0$ telle que :

$$\left|1-\left(q_j^{'}\right)^{\frac{2i\pi}{\ln\lambda}}\right| = \left|1-e^{2i\pi\frac{\ln p_{n_j}}{\ln\lambda}}\right| < D\frac{\ln j}{j}.$$

D'où :

$$\sum_j \frac{1}{j}\left|1-\left(q_j^{'}\right)^{\frac{2i\pi}{\ln\lambda}}\right| < D\sum_j \frac{\ln j}{j^2} < +\infty.$$

Ce qui termine l'étape 2.

Etape 3 : $\lambda \in S(M)$

On rappelle que $r_\infty(M) = S(M)$. On va montrer que $\lambda \in r_\infty(M)$ en utilisant la définition de $r_\infty(M)$.

Soit ν_p la mesure sur $\mathbb{N}$ définie par $\nu_p(n) = p^{-n}(1-p^{-1})$. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $I \subset \mathbb{N}$, on note X_k l'espace discret $\mathbb{N}$ muni de la mesure de probabilité $\mu_k = \nu_{q_k}$ et $X(I) = \prod_{k\in I} X_k$ muni de la mesure de probabilité produit $\mu_I = \prod_{k\in I}\mu_k$. Pour montrer que $\lambda \in r_\infty(M)$ il suffit de montrer qu'il existe une suite (I_α) de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ deux à deux disjoints et deux suites (K_α^1), (K_α^2) de sous-ensembles de $X(I_\alpha)$ munies de bijections $\Phi_\alpha : K_\alpha^1 \longrightarrow K_\alpha^2$ telles que :

$$\sum_\alpha \mu_{I_\alpha}(K_\alpha^1) = \infty \text{ et } \lim_{\alpha\to\infty}\max_{x\in K_\alpha^1}\left|\lambda - \frac{\mu_{I_\alpha}(\Phi_\alpha(x))}{\mu_{I_\alpha}(x)}\right| = 0.$$

Pour cela notons $r_j = \left[\frac{\mu^j}{2j}\right]$ et $N_j = \sum_{s\le j}\left[\frac{\mu^s}{s}\right]$. Par définition on a $N_j + k = q_{j+1}^{'}$ pour $0 \le k \le \left[\frac{\mu^{j+1}}{j+1}\right]$ et $q_{N_j-\left[\frac{\mu^j}{j}\right]+k} = q_j^{'}$ pour $0 \le k \le \left[\frac{\mu^j}{j}\right]-1$. On pose $n = \left[\frac{1}{\mu-1}\right]+1$ et on ne considère que les $j \ge n$. On a alors $\frac{\mu^j}{j} < \frac{\mu^{j+1}}{j+1}$ et donc $r_j = \left[\frac{\mu^j}{2j}\right] \le \left[\frac{\mu^j}{j}\right] \le \left[\frac{\mu^{j+1}}{j+1}\right]$. On en déduit que pour $0 \le k \le r_j - 1$ on a :

$$q_{N_j-r_j+k} = q_j^{'} \text{ et } q_{N_j+k} = q_{j+1}^{'}.$$

On pose alors $I_{j,k} = \{N_j - r_j + k, N_j + k\}$ où $k = 0,\ldots,r_j-1$ et $j \ge n$. Les $I_{j,k}$ sont disjoints car on a :

$$N_j + r_j - 1 < N_{j+1} - r_{j+1} \Longleftrightarrow \left[\frac{\mu^{j+1}}{j+1}\right] > \left[\frac{\mu^{j+1}}{2(j+1)}\right] + \left[\frac{\mu^j}{2j}\right] - 1.$$

On construit alors la suite des I_α à partir des $I_{j,k}$ pour $j \ge n$, i.e. on pose :

$$I_0 = I_{n,0}, I_1 = I_{n,1}, \ldots, I_{r_n-1} = I_{n,r_n-1}, I_{r_n} = I_{n+1,0}, \ldots$$

Comme $X(I_{j,k}) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ muni de la mesure produit $\nu_{q'_j} \times \nu_{q'_{j+1}}$, en prenant $K^1_\alpha = \{(1,0)\}$ et $K^2_\alpha = \{(0,1)\}$ avec les Φ_α évidents, on trouve :

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha \geq 0} \mu_{I_\alpha}(K^1_\alpha) &= \sum_{j \geq n} r_j \left(\nu_{q'_j}(1)\nu_{q'_{j+1}}(0)\right) = \sum_{j \geq n} r_j \frac{1}{q'_j}\left(1 - \frac{1}{q'_j}\right)\left(1 - \frac{1}{q'_{j+1}}\right) \\ &> \frac{1}{4}\sum_{j \geq n} \left[\frac{\mu^j}{2j}\right] \frac{1}{q'_j} = +\infty\end{aligned}$$

car $\left[\frac{\mu^j}{2j}\right] \sim \frac{\mu^j}{2j}$ et on a l'équivalence (16). De plus :

$$\begin{aligned}\max_{x \in K^1_\alpha} \left|\lambda - \frac{\mu_{I_\alpha}(\Phi_\alpha(x))}{\mu_{I_\alpha}(x)}\right| &= \left|\lambda - \frac{\mu_{I_\alpha}(K^2_\alpha)}{\mu_{I_\alpha}(K^1_\alpha)}\right| = \left|\lambda - \frac{\nu_{q'_j}(0)\nu_{q'_{j+1}}(1)}{\nu_{q'_j}(1)\nu_{q'_{j+1}}(0)}\right| \\ &= \left|\lambda - \frac{q'_j}{q'_{j+1}}\right|\end{aligned}$$

et comme $\frac{q'_j}{q'_{j+1}} \sim \frac{\mu^j}{\mu^{j+1}} = \lambda$, l'étape 3 est démontrée.

On sait maintenant que M est de type III, et l'étape 2 permet de déduire que M est de type III_0 ou III_{λ^k} avec $k \in \mathbb{N}^*$ alors que l'étape 3 implique que M est de type III_1 ou $\mathrm{III}_{\lambda^{\frac{1}{k}}}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ donc M est de type III_λ.

<u>Le cas $\lambda = 0$.</u> Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in]0,1[$ tels que $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2^k}$. Comme l'ecriture de $\sum 2^{-2^k}$ n'est pas périodique, on a $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}$ et par conséquent, $\mathbb{Z}\frac{2\pi}{\ln \lambda_1} + \mathbb{Z}\frac{2\pi}{\ln \lambda_2}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Il suffit donc de construire une suite de nombres premiers (q_k) telle que $\frac{2\pi}{\ln \lambda_l} \in T(M)$ pour $l = 1, 2$ et M est de type III. Pour cela on choisit une suite $\epsilon_j > 0$ telle que $|1 - \epsilon_j| < \frac{1}{j}$. Si l'on pose $m_1 = 2^{2^n}$ et $m_2 = m_1 \sum_{k=0}^{n} 2^{-2^k}$, on trouve :

$$|m_1 \ln \lambda_1 - m_2 \ln \lambda_2| = \ln(\lambda_2) 2^{2^n} \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-2^k} < \ln(\lambda_2) 2^{1-2^n}.$$

On peut donc trouver une suite d'entiers strictement croissante (n_j) telle que, si l'on note $m_{1,j} = 2^{2^{n_j}}$ et $m_{2,j} = m_{1,j} \sum_{k=0}^{n_j} 2^{-2^k}$, on a les deux inégalités suivantes :

$$|m_{1,j} \ln \lambda_1 - m_{2,j} \ln \lambda_2| < \frac{\epsilon_j}{2} |\ln \lambda_1| \tag{18}$$

$$C \frac{\ln m_{1,j}}{m_{1,j}} < \frac{\epsilon_j}{2} \tag{19}$$

où la constante C apparaissant dans l'inégalité (19) est la même que celle de l'inégalité (17) obtenue dans le cas $\lambda \in]0,1[$ à l'étape 2 en prenant $\lambda = \lambda_1$. On choisit alors $q''_j = q'_{m_{1,j}}$ suite extraite de la suite de nombres premiers q'_j construite dans le cas $\lambda \in]0,1[$ pour $\lambda = \lambda_1$. Les inégalités (17) et (19) permettent de montrer que $|\ln q''_j + m_{1,j} \ln \lambda_1| < \frac{\epsilon_j}{2} |\ln \lambda_1|$ et, avec l'inégalité (18) et la définition de ϵ_j on voit que :

$$\left|1 - \left(q''_j\right)^{\frac{2i\pi}{\ln \lambda_l}}\right| < \frac{1}{j} \text{ pour } l = 1, 2.$$

On construit alors la suite (q_k) à partir de la suite (q''_j) en répétant $\left[\frac{q''_j}{j}\right]$ le terme q''_j. Comme $\frac{q''_j}{j} \to \infty$ on a $\left[\frac{q''_j}{j}\right] \sim \frac{q''_j}{j}$ et par conséquent, $\sum q_k^{-1} = \sum \left[\frac{q''_j}{j}\right] \frac{1}{q''_j} = +\infty$. Donc, par le même argument que dans l'étape 1 du cas $\lambda \in]0,1[$ on voit que M est de type III. De plus, on a :

$$\sum q_k^{-1} \left| 1 - \left(q_j^{''}\right)^{\frac{2i\pi}{\ln \lambda_l}} \right| < \sum \left[\frac{q_j^{''}}{j} \right] \left(\frac{1}{q_j^{''}} \right) \left(\frac{1}{j} \right) < +\infty.$$

Donc $\frac{2\pi}{\ln \lambda_l} \in T(M)$ pour $l = 1, 2$ par le lemme 3.12.

<u>Le cas $\lambda = 1$.</u> On présente ici la même preuve que [6]. Soit $\pi(x)$ le cardinal de l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à x. Le théorème des nombres premiers peut s'écrire également sous la forme (c.f. [19]) :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x} = 1.$$

On démontre maintenant le lemme suivant :

Lemme 3.14 *Soient $r > 0$ et $\epsilon > 0$ fixés. Alors pour x suffisamment grand on a :*

$$\pi\left((r+\epsilon)x\right) - \pi(rx) \geq \frac{\epsilon x}{2 \ln x}.$$

En particulier, $\pi\left((r+\epsilon)x\right) - \pi(rx) \to +\infty$.

Démonstration. On déduit du théorème des nombres premiers que :

$$\lim \left(\frac{\pi\left((r+\epsilon)x\right) \ln(r+\epsilon)x}{(r+\epsilon)x} - \frac{\pi(rx) \ln rx}{rx} \right) = 0.$$

En développant les logarithmes on obtient :

$$\lim \left(\frac{\pi\left((r+\epsilon)x\right) \ln x}{(r+\epsilon)x} - \frac{\pi(rx) \ln x}{rx} + \frac{\pi\left((r+\epsilon)x\right) \ln(r+\epsilon)}{(r+\epsilon)x} - \frac{\pi(rx) \ln r}{rx} \right) = 0.$$

Les deux derniers termes tendant vers 0 avec x on déduit :

$$\lim \left(\frac{\pi\left((r+\epsilon)x\right) \ln x}{(r+\epsilon)x} - \frac{\pi(rx) \ln x}{rx} \right) = \lim \frac{r\pi\left((r+\epsilon)x\right) \ln x - (r+\epsilon)\pi(rx) \ln x}{r(r+\epsilon)x} = 0.$$

En retirant $(r+\epsilon)$ du dénominateur, la limite reste nulle et donc :

$$\lim \left(\left(\pi\left((r+\epsilon)x\right) - \pi(rx)\right) \frac{\ln x}{x} - \epsilon \frac{\pi(rx) \ln x}{rx} \right) = 0.$$

Mais comme :

$$1 = \lim \frac{\pi(rx) \ln rx}{rx} = \lim \left(\frac{\pi(rx) \ln x}{rx} + \frac{\pi(rx) \ln r}{rx} \right) = \lim \frac{\pi(rx) \ln x}{rx},$$

on déduit :

$$\lim (\pi\left((r+\epsilon)x\right) - \pi(rx)) \frac{\ln x}{x} = \lim \epsilon \frac{\pi(rx) \ln x}{rx} = \epsilon.$$

Donc, pour x suffisamment grand on a :

$$\left(\pi\left((r+\epsilon)x\right) - \pi(rx)\right) \frac{\ln x}{x} > \frac{\epsilon}{2}$$

et le lemme est démontré. ■

On peut maintenant démontrer le cas $\lambda = 1$. On prend $q_k = p_k$ le $k^{\text{ième}}$ nombre premier. Comme $\sum \frac{1}{p_k} = \infty$ on déduit, par le même argument que dans le cas $\lambda \in]0,1[$ à l'étape 1, que M est de type III. On va maintenant montrer que $r_\infty(M) = \mathbb{R}_+$ ce qui prouve que M est de type III_1.

Pour cela on se donne un $r > 0$ et on montre que $r \in r_\infty(M)$ en utilisant la définition de $r_\infty(M)$. On reprend les notations du début de l'étape 3 du cas $\lambda \in]0,1[$. Pour tout n on note t_{2n} le plus petit nombre premier de la forme p_{2k+1} qui est supérieur ou égal à p_{2n} puis on pose $J_n = \{p_{2n}, t_{2n}\}$. Par le lemme 3.14 on a :

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}, \ n > N \Longrightarrow rp_{2n} \leq t_{2n} \leq (r+\epsilon)p_{2n}. \tag{20}$$

En utilisant (20) et le fait que $p_{k+1} - p_k \to \infty$ on déduit facilement qu'il existe un entier N_1 tel que $n \geq N_1$ implique $t_{2(n+1)} > t_{2n}$, ce qui implique que les J_n sont deux à deux disjoints à partir du rang N_1. On construit alors la suite (I_α) à partir de la suite (I_n) en décalant les premiers termes, i.e. on pose $I_0 = J_{N_1}, I_1 = J_{N_1+1}$, etc. On pose alors $K_\alpha^1 = \{(0,1)\}$, $K_\alpha^2 = \{(1,0)\}$ et les Φ_α évidents. En appliquant (20) on a, pour n assez grand, $rp_{2n} < t_{2n} < 2rp_{2n}$ d'où :

$$\frac{1}{t_{2n}}\left(1 - \frac{1}{p_{2n}}\right)\left(1 - \frac{1}{t_{2n}}\right) \geq \frac{1}{8rp_{2n}}$$

pour $n > N_2$. Donc en posant $l = \max\{N_1, N_2\}$ on a :

$$\sum_\alpha \mu_\alpha(K_\alpha^1) = \sum_{n \geq N_1} \frac{1}{t_{2n}}\left(1 - \frac{1}{p_{2n}}\right)\left(1 - \frac{1}{t_{2n}}\right) \geq \frac{1}{8r}\sum_{n \geq l} \frac{1}{p_{2n}} = +\infty.$$

De plus,

$$\max_{x \in K_\alpha^1} \left| r - \frac{\mu_{I_\alpha}(\Phi_\alpha(x))}{\mu_{I_\alpha}(x)} \right| = \left| r - \frac{\mu_{I_\alpha}(K_\alpha^2)}{\mu_{I_\alpha}(K_\alpha^1)} \right| = \left| r - \frac{t_{2\alpha}}{p_{2\alpha}} \right|$$

et (20) implique que :

$$\lim_{\alpha \to \infty} \left| r - \frac{t_{2\alpha}}{p_{2\alpha}} \right| = 0.$$

Ce qui termine la démonstration. ∎

La démonstration du théorème est terminée en appliquant le lemme 3.2 et les propositions 3.10 et 3.11. ∎

3.4 L'algèbre du dual

Dans cette section nous allons montrer, en écrivant sous la forme d'un produit tensoriel infini de facteur, que le dual, $G_2 \ltimes L^\infty(G_1)$, est un facteur. Pour cela nous allons utiliser la même méthode que dans la section précédente. Notons ν_p la mesure de Haar sur $\mathbb{Q}_p^*$ normalisée à 1 sur $1 + p\mathbb{Z}_p$ et μ_p celle qui est normalisée à 1 sur $\mathbb{Z}_p^*$.

On rappelle que l'on a :

$$G_1 = \{(a, 0), \, a \in \mathcal{A}^*\},$$

et :

$$G_2 = \left\{ \left((a_n), \left(\frac{1 - a_n}{p_n} \right) \right), \ a_n \neq 0 \, \forall n \text{ et } a_n \in 1 + p_n\mathbb{Z}_{p_n} \text{ pour } n \text{ suffisamment grand} \right\}.$$

Soit $\mathcal{K} = \prod_n' \left(\mathbb{Q}_{p_n}^*, 1 + p_n\mathbb{Z}_{p_n}\right)$ muni de la mesure ν déduite des ν_p. Identifions dès maintenant G_2 à $\mathcal{K}$ et G_1 à $\mathcal{A}^*$. Sous cette identification, un calcul direct montre que, pour $s = (s_n) \in \mathcal{K}$ et $g = (g_n) \in \mathcal{A}^*$ tels que pour tout n, $g_n(s_n - 1) + 1 \neq 0$ et, à partir d'un certain rang, $g_n(s_n - 1) + 1 \in 1 + p_n\mathbb{Z}_{p_n}$, on a :

$$\alpha_g(s) = (g_n(s_n - 1) + 1), \quad \beta_s(g) = \left(\frac{g_n s_n}{g_n(s_n - 1) + 1} \right).$$

Notons alors $G_1^n = G_2^n = \mathbb{Q}_{p_n}^*$. On rappelle que $(G_1^n,\, G_2^n)$ est un couple assorti (voir section 3.1) et les actions α^n,β^n peuvent être directement calculées (voir équation 4). On a alors la proposition suivante :

Proposition 3.15 *On a un isomorphisme :*

$$G_2 \ltimes L^\infty(G_1) = \bigotimes_n \Big(G_2^n \ltimes L^\infty(G_1^n), L^2(\mathbb{Q}_{p_n}^* \times \mathbb{Q}_{p_n}^*, \nu_{p_n} \times \mu_{p_n}), \chi_{(1+p_n\mathbb{Z}_{p_n})\times \mathbb{Z}_{p_n}^*} \Big).$$

Démonstration. On considère l'unitaire (comme dans la section précédente) :

$$U \,:\, \bigotimes_n \left(L^2(\mathbb{Q}_{p_n}^* \times \mathbb{Q}_{p_n}^*, \nu_{p_n} \times \mu_{p_n} \right) \to L^2(\mathcal{K} \times \mathcal{A}^*, \nu \times \mu)$$

défini sur un sous-ensemble dense par :

$$U(F_0 \otimes \ldots \otimes F_n \otimes \chi_{(1+p_{n+1}\mathbb{Z}_{p_{n+1}})\times \mathbb{Z}_{p_{n+1}}^*} \otimes \ldots) = ((x_i),(y_i)) \mapsto \prod_{i=0}^{n} F_i(x_i,y_i) \prod_{k\geq n+1} \chi_{(1+p_k\mathbb{Z}_{p_k})\times \mathbb{Z}_{p_k}^*}(x_i,y_i)$$

où $F_n \in L^2(\mathbb{Q}_{p_n}^* \times \mathbb{Q}_{p_n}^*)$ et $(x_i) \in \mathcal{K}$, $(y_i) \in \mathcal{A}^*$. Un calcul direct montre que :

$$U\left(\beta^0(F_0) \otimes \ldots \otimes \beta^n(F_n) \otimes 1 \otimes \ldots\right) U^* = \beta(F_0 \ldots F_n)$$

où $F_i \in L^\infty(G_1^i)$ et $F_0 \ldots F_n \in L^\infty(G_1)$, $F_0 \ldots F_n(g_k) = \prod_{i=0}^n F_i(g_i)$. De plus , si $t_i \in G_2^i$ on a :

$$U\left(\lambda(t_0) \otimes \ldots \lambda(t_n) \otimes 1 \ldots\right) U^* = \lambda((t_0,\ldots,t_n,1,\ldots)).$$

où l'on note $\lambda(t) = \lambda_t \otimes 1$, $t \mapsto \lambda_t$ étant la représentation régulière gauche. On déduit :

$$U^*\left(G_2 \ltimes L^\infty(G_1)\right) U = \bigotimes_n \Big(G_2^n \ltimes L^\infty(G_1^n), L^2(\mathbb{Q}_{p_n}^* \times \mathbb{Q}_{p_n}^*, \nu_{p_n} \times \mu_{p_n}), \chi_{(1+p_n\mathbb{Z}_{p_n})\times \mathbb{Z}_{p_n}^*} \Big).$$

■

On déduit alors de la proposition 3.1 et du corollaire 2.6 :

Corollaire 3.16 $G_2 \ltimes L^\infty(G_1)$ *est un facteur.*

Références

[1] H. Araki and J. Woods. A classification of factors. *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto. Univ., Ser. A*, 4 :51–130, 1968.

[2] S. Baaj and G. Skandalis. Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C^*-algèbres. *Ann. Sci. ENS, 4^e série*, 26 :425–488, 1993.

[3] S. Baaj and G. Skandalis. Transformations pentagonales. *C.R. Acad. Sci. Paris, série I*, 327 :623–628, 1998.

[4] S. Baaj, G. Skandalis, and S. Vaes. Non-Semi-Regular Quantum Groups Coming from Number Theory. *Commun. Math. Phys.*, 235 :139–167, 2003.

[5] T. Banica. Le groupe quantique compact libre $U(n)$. *Commun. Math. Phys.*, 190, No. 1 :143–172, 1997.

[6] B. Blackadar. The regular representation of the restricted direct product groups. *J. Funct. Anal.*, 25 :267–274, 1977.

[7] A. Connes. Une classification des facteurs de type III. *Ann. Sci. ENS*, 6 :133–252, 1973.

[8] J. Dixmier. *C^*-algèbres et leurs représentations*. Paris Gauthier-Villars, 1964.

[9] V.G. Drinfel'd. Quantum groups. *Proceedings ICM Berkeley*, pages 798–820, 1986.

[10] M. Enock and J.-M. Schwartz. *Kac Algebras and Duality of Locally Compacts Groups*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[11] M. Jimbo. A q-difference analogue of U_n and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, 10 :63–69, 1985.

[12] G. Kac. Generalization of the group principle of duality. *Soviet Math. Dokl.*, 2 :581–584, 1961.

[13] G. Kac. Ring groups and the principle of duality, I, II. *Trans. Moscow Math. Soc.*, pages 291–339, 94–126, 1963, 1965.

[14] G. Kac. Extensions of groups to ring groups. *Math. USSR Sb.*, 5 :451–474, 1968.

[15] G. Kac and L. Vainerman. Nonunimodular ring-groups and Hopf-von Neumann algabras. *Math. USSR Sb.*, 23 :185–214, 1974.

[16] J. Kustermans and S. Vaes. A simple definition for locally compact quantum groups. *C.R. Acad. Sci. Paris, série I*, 328 (10) :871–876, 1999.

[17] J. Kustermans and S. Vaes. Locally compact quantum groups. *Ann. Sci. ENS*, 33 (6) :837–934, 2000.

[18] J. Kustermans and S. Vaes. Locally compact quantum groups in the von Neumann algebraic setting. *Math. Scand.*, 2000. à paraître.

[19] W. J. LeVeque. *Topics in number theory*, volume 2. Addison-Wesley, Reading, MA, 1956.

[20] S. Majid. Physics for algebraists : Non-commutative and non-cocommutative Hopf algebras by a bicrossproduct construction. *J. Algebra*, 130 :17–64, 1990.

[21] S. Majid. Hopf-von Neumann algebra bicrossproducts, Kac algebra bicrossproducts, and the classical Yang-Baxter equations. *J. Funct. Anal.*, 95 :291–319, 1991.

[22] A.M. Robert. *A course in p-adic Analysis*. Springer, Graduate Texts in Mathematics, 2000.

[23] S. Stratila. *Modular Theory in Operator Algebras*. Abacus Press, Tunbridge Wells, England, 1981.

[24] S. Stratila and L. Zsido. *Lectures on Von Neumann algebras*. Abacus Press, 1979.

[25] M. Takeuchi. Matched pairs of groups and bismash products of Hopf algebras. *Comm. Algebra*, 9 :841–882, 1981.

[26] K. Tzanev. *C^*-algèbres de Hecke et K-théorie*. PhD thesis, Université Paris 7, 2000.

[27] S. Vaes and L. Vainerman. Extensions of locally compact quantum groups and the bicrossed product construction. *Adv. in Math.*, 175 :1–101, 2003.

[28] A. Van Daele. An algebraic framework for group duality. *Adv. in Math.*, 140 :323–366, 1998.

[29] S.L. Woronowicz. Compact matrix pseudogroups. *Commun. Math. Phys.*, 111 :613–665, 1987.

[30] S.L. Woronowicz. Twisted SU_2 group. An exemple of a non-commutative differential calculus. *Publ. RIMS, Kyoto University*, 23 :117–181, 1987.

[31] S.L. Woronowicz. From multiplicative unitaries to quantum groups. *Int. J. Math.*, Vol. 7, No. 1 :127–149, 1996.