# Sur le transfert lisse des intégrales orbitales d'après Waldspurger

Pierre-Henri Chaudouard

5 février 2008

## Table des matières



## 1 Introduction

Cet article se veut une introduction à l'article [9] de Waldspurger qui démontre l'existence du transfert modulo la validité du lemme fondamental sur les algèbres de Lie qui, aujourd'hui, est un théorème. En fait, l'existence du transfert est un problème local au voisinage d'éléments semi-simples. Des arguments de descente montre qu'il suffit de résoudre le même problème pour l'algèbre de Lie. L'approche de Waldspurger exploite un analogue sur les algèbres de Lie de la partie géométrique elliptique de la formule des traces d'Arthur-Selberg. L'avatar spectral est donnée par la transformée de Fourier du côté géométrique, les deux étant reliés par la formule sommatoire de Poisson. On peut alors appliquer les techniques de stabilisation, dues à Kottwitz et Langlands, pour comparer ces formules des traces sur les algèbres de Lie de différents groupes.

Décrivons plus en détails le contenu de cet article. Dans la section 2, le lecteur trouvera les notations utilisées. On y reprend les notions de cohomologie abélianisée pour lesquelles on renvoie à [5]. Les données endoscopiques sont introduites dans la section 3. On s'est livré à l'exercice oulipien cher à Labesse qui consiste à ne parler pas de dual de Langlands, d'où l'aspect inhabituel des définitions. Sauf erreur de ma part, leur formulation devrait être équivalente à la définition habituelle. Dans la section 4, on explique comment se transfèrent les classes de conjugaison entre un groupe et son groupe endoscopique. L'accent est mis sur la section de Kostant. Dans les sections 5 et 6, on procède à des rappels sur l'analyse harmonique $p$-adique sur les algèbres de Lie. Dans la section 7, on donne une définition des facteurs de transfert, qui s'inspire du résultat de Kottwitz dans [4]. Les énoncés principaux de la théorie endoscopique sur les algèbres de Lie $p$-adiques se trouvent dans la section 8. On y trouve pêle-même l'énoncé de transfert lisse des intégrales orbitales, le fait que le transfert commute à la transformation de Fourier et le lemme fondamental. Le point des travaux de Waldspurger est de montrer que chaque énoncé est impliqué par le suivant. Dans la section 9, on revoit la théorie analogue sur les algèbres de Lie complexes, dont les résultats reposent sur ceux de Bouaziz. La préstabilisation dans notre contexte est revue à la section 10. Dans la section finale 11, on explique quelques points de la preuve de Waldspurger du fait que "le lemme fondamental implique que le transfert commute à la transformée de Fourier". Par conséquent, *dixit* l'article éponyme, "le lemme fondamental implique le transfert".

# 2 Notations

**2.1.** Soit $F$ un corps de caractéristique 0. On suppose que $F$ est soit un corps $p$-adique c'est-à-dire une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ soit un corps de nombres. Soit $\bar{F}$ une clôture algébrique de $F$ et $\Gamma = Gal(\bar{F}/F)$ le groupe de Galois associé.

**2.2.** Soit $G$ un groupe réductif connexe sur $F$. Soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Soit $G_{\mathrm{der}} \subset G$ son sous-groupe dérivé et $G_{\mathrm{sc}}$ le revêtement simplement connexe de $G_{\mathrm{der}}$. Soit $Z_G$ le centre de $G$ et $G_{\mathrm{ad}} = G/Z_G$ le groupe adjoint. Pour tout sous-tore maximal $T$ de $G$, soit $\mathrm{Norm}_G(T)$ le normalisateur de $T$ dans $G$ et $W^G(T) = \mathrm{Norm}_G(T)/T$ le groupe de Weyl. Soit $T_{G_{\mathrm{sc}}}$ l'image réciproque de $T$ dans $G_{\mathrm{sc}}$ et $T_{G_{\mathrm{ad}}} = T/Z_G$. Lorsque le contexte est clair, on pose $T_{\mathrm{sc}} = T_{G_{\mathrm{sc}}}$ et $T_{\mathrm{ad}} = T_{G_{\mathrm{ad}}}$. On commettra parfois l'abus suivant : on notera simplement $G$ au lieu de $G(\bar{F})$ le groupe des points de $G$ à valeurs dans $\bar{F}$.

**2.3.** Le groupe $G$ opère sur son algèbre de Lie par adjonction. Soit $X \in \mathfrak{g}(F)$. Par définition, $X$ est régulier si son centralisateur $G_X$ dans $G$ est de dimension minimale, égale au rang de $G$. Si $X$ est de plus semi-simple et régulier, son centralisateur $G_X$ est un tore. On pose alors $T_X = G_X$ : c'est un sous-tore maximal de $G$ défini sur $F$.

Soit $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$ l'ensemble des éléments semi-simple et réguliers de $\mathfrak{g}(F)$. On introduit l'ensemble des classes de conjugaison semi-simples régulières

$$\Gamma(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)/G(F).$$

On introduit son analogue stable

$$\Sigma(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)/G(\bar{F})$$

qui est le quotient de $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$ pour la relation d'équivalence suivante : deux éléments $X$ et $Y$ de $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$ définissent la même classe dans $\Sigma(\mathfrak{g})$ si et seulement s'il existe $g \in G$ tel que $X = \mathrm{Ad}(g)Y$. On dit encore que $X$ et $Y$ sont stablement conjugués.

**2.4.** Soit $A_G$ le sous-tore déployé et central maximal de $G$. Pour tout tore $T$, le tore $A_T$ est le sous-tore déployé maximal de $T$.

On note $\mathfrak{g}_{\mathrm{ell}}(F) \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$ le sous-ensemble des éléments *elliptiques* : ce sont les éléments $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$ pour lesquels le centralisateur $T$ est *elliptique* c'est-à-dire vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes

- $A_T = A_G$ ;
- $X_*(T_{G_{\mathrm{sc}}})^\Gamma = 1$.

Cette notion d'ellipticité est stable par conjugaison et par conjugaison stable. On définit de manière évidente alors les ensembles $\Gamma_{\mathrm{ell}}(\mathfrak{g})$ et $\Sigma_{\mathrm{ell}}(\mathfrak{g})$.

**2.5.** Dans la suite, par abus, on ne distingue pas dans les notations une variété définie sur $F$ de la variété sur $\overline{F}$ obtenue par extension des scalaires. Celle-ci est muni d'une action de $\Gamma$.

Soit $G^*$ une forme intérieure quasi-déployée de $G$. Autrement dit $G^*$ est un groupe réductif connexe et quasi-déployé sur $F$ et il existe un isomorphisme sur $\bar{F}$

$$\varphi \ : \ G \to G^* \tag{2.1}$$

tel que pour tout $\sigma \in \Gamma$ on ait $\varphi\sigma(\varphi)^{-1}$ est un automorphisme intérieur de $G^*$. En particulier, il existe un cocycle $u$ à valeurs dans $G^*_{ad}$ tel que pour tout $\sigma \in \Gamma$ on ait

$$\varphi\sigma(\varphi)^{-1} = \mathrm{Ad}(u_\sigma).$$

La classe de $u$ dans $H^1(F, G^*_{ad})$ ne dépend pas du choix de $\varphi$. De plus, à $F$-isomorphisme près, les groupes $G$ qui sont des formes intérieures de $G^*$ sont en bijection naturelle avec l'ensemble $H^1(F, G^*_{ad})$. Le groupe $G$ est quasi-déployé si et seulement la classe du cocycle $u$ est trivial. Le groupe $G^*$ est défini à un $F$-isomorphisme près.

**2.6.** Soit $T$ un sous-tore maximal de $G$ défini sur $F$. La suite exacte courte

$$0 \to T \to G \to T\backslash G \to 0$$

induit une suite exacte longue en cohomologie

$$0 \to H^0(F,T) \to H^0(F,G) \to H^0(F,T\backslash G) \to H^1(F,T) \to H^1(F,G)$$

Suivant Langlands, Kottwitz et Labesse, on pose

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(T,G,F) &= \ker(H^1(F,T) \to H^1(F,G))\\ &= \mathrm{coker}(H^0(F,G) \to H^0(F,T\backslash G)),\end{aligned}$$

On prendra garde que $H^1(F,G)$ n'est pas un groupe mais seulement un ensemble pointé par la classe du cocycle trivial. Soit $X \in \mathfrak{g}(F)$ semi-simple et régulier. Alors l'ensemble $\mathcal{D}(T_X, G, F)$ est en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison dans la classe de conjugaison stable de $X$. Rappelons que la bijection s'obtient de la manière suivante : soit $Y \in \mathfrak{g}(F)$ stablement conjugué à $X$. Il existe $g \in G(\bar{F})$ tel que $Y = \mathrm{Ad}(g)X$. Pour tout $\sigma \in \Gamma$, on vérifie que $g^{-1}\sigma(g)$ centralise $X$ et donc appartient à $T_X$. On en déduit un élément de $\mathcal{D}(T_X, G, F)$.

La suite exacte longue ci-dessous est une version "abélianisée" de la suite exacte longue précédente

$$H^0(F,T) \to H^0(F,T_{\mathrm{sc}} \to T) \to H^1(F,T_{\mathrm{sc}}) \to H^1(F,T) \to H^1(F,T_{\mathrm{sc}} \to T).$$

D'où la définition

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(T,G,F) &= \ker(H^1(F,T) \to H^1(F,T_{\mathrm{sc}} \to T))\\ &= \mathrm{coker}(H^0(F,T_{\mathrm{sc}} \to T) \to H^1(F,T_{\mathrm{sc}})),\end{aligned}$$

Rappelons que Labesse a défini pour le module croisé $[G_{\mathrm{sc}} \to G]$ des ensembles de cohomologie $H^i(F, G_{\mathrm{sc}} \to G)$ qui sont isomorphes à $H^i(F, T_{\mathrm{sc}} \to T)$. On dispose en degrés $i = 0, 1$ d'applications d'abélianisation

$$H^i(F,G) \to H^i(F,G_{\mathrm{sc}} \to G)$$

et donc d'une application

$$\mathcal{D}(T,G,F) \hookrightarrow \mathcal{E}(T,G,F)$$

qui est évidemment une injection. C'est de plus une bijection si $F$ est local non-archimédien. Dans ce cas, en effet, l'application d'abélianisation

$$H^1(F,G) \to H^1(F,G_{\mathrm{sc}} \to G)$$

est injective : en général son noyau est l'image de $H^1(F, G_{\rm sc}) \to H^1(F, G)$ mais lorsque $F$ est local non-archimédien il est bien connu qu'on a

$$H^1(F, G_{\rm sc}) = 1.$$

Si $F$ est un corps de nombres, on note $\mathbb{A}_F/F$ l'anneau des adèles de $F$ et on pose

$$\mathcal{E}(T, G, \mathbb{A}_F/F) = \operatorname{coker}(H^0(\mathbb{A}_F, T_{\rm sc} \to T) \to H^1(\mathbb{A}_F/F, T_{\rm sc})).$$

Soit $C_F$ le corps $F$ si $F$ est local ou la $F$-algèbre des classes d'adèles $\mathbb{A}_F/F$ si $F$ est global. Dans les deux cas on définit *le groupe des caractères endoscopiques*

$$\mathcal{K}(T, G, F) = \mathcal{E}(T, G, C_F)^D$$

où l'exposant $D$ désigne la dualité de Pontryagin.

# 3 Données endoscopiques

**3.1. La définition.** — Soit $G$ comme dans la section précédente. Une *donnée endoscopique* de $G$ est la donnée d'un triplet $(H, \kappa, \xi)$ où

– $H$ est un groupe réductif connexe quasi-déployé sur $F$ ;

– $\xi$ est la donnée d'un diagramme commutatif

$$\xi : \begin{array}{ccc} T_{H_{\rm sc}} & \hookrightarrow & T_{G_{\rm sc}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_H & \xrightarrow{\iota} & T_G. \end{array} \tag{3.1}$$

où $T_H$ et $T_G$ sont des sous-tores maximaux définis sur $F$ respectivement de $H$ et $G$ et les flèches verticales sont les flèches évidentes ; les flèches horizontales sont des $F$-plongements et $\iota$ est un $F$-isomorphisme.

– $\kappa$ est un caractère du groupe $H_0(F, X_*(T_{H_{\rm sc}})\backslash X_*(T_{G_{\rm sc}}))$ (on identifie $X_*(T_{H_{\rm sc}})$ à son image dans $X_*(T_{G_{\rm sc}})$).

Ces objets doivent satisfaire *deux conditions* que nous allons expliciter. Soit respectivement $R_G$ et $R_G^\vee$ les ensembles des racines et des coracines de $T$ dans $G$. Notons que $R_G^\vee$ s'identifie à une partie du sous-module $X_*(T_{G_{\rm sc}})$ de $X_*(T)$. On pose

$$R_\kappa^\vee = \{\alpha^\vee \in R_G^\vee \mid \ <\kappa, \alpha^\vee>= 1\}$$

et

$$R_\kappa = \{\alpha \in R_G \mid \alpha^\vee \in R_\kappa^\vee\},$$

où $\alpha^\vee$ est la coracine de $\alpha$.

La première condition s'exprime alors de la manière suivante. L'isomorphisme $\iota$ de (3.1) induit un $F$-isomorphisme de données radicielles

$$(X^*(T_H), R_H, X_*(T_H), R_H^\vee) \simeq (X^*(T_G), R_\kappa, X_*(T_G), R_\kappa^\vee). \tag{3.2}$$

Pour exprimer la seconde, fixons $E$ une extension galoisienne de $F$ qui déploie les tores $T_{G_{\rm sc}}$ et $T_{H_{\rm sc}}$. On peut alors voir $\kappa$ comme un caractère du groupe $H_0(E/F, X_*(T_{H_{\rm sc}})\backslash X_*(T_{G_{\rm sc}}))$. En composant le morphisme évident

$$\hat{H}^{-1}(E/F, X_*(T_{H_{\rm sc}})\backslash X_*(T_{G_{\rm sc}})) \to H_0(E/F, X_*(T_{H_{\rm sc}})\backslash X_*(T_{G_{\rm sc}}))$$

avec l'isomorphisme de Tate-Nakayama

$$H^1(C_F, T_{H_{\rm sc}} \to T_{G_{\rm sc}}) \simeq \hat{H}^{-1}(E/F, X_*(T_{H_{\rm sc}})\backslash X_*(T_{G_{\rm sc}})),$$

on voit que $\kappa$ induit un caractère sur $H^1(C_F, T_{H_{\rm sc}} \to T_{G_{\rm sc}})$ donc un caractère $\kappa_0$ sur $H^1(C_F, T_{G_{\rm sc}})$ via le morphisme

$$H^1(C_F, T_{G_{\rm sc}}) \to H^1(C_F, T_{H_{\rm sc}} \to T_{G_{\rm sc}}).$$

La seconde condition porte sur ce caractère $\kappa_0$. On demande que $\kappa_0$ appartienne à $\mathcal{K}(T_G, G, F)$ i.e. soit trivial sur l'image de $H^0(\mathbb{A}_F, T_{G_{\rm sc}} \to T_G)$ si $F$ est global, resp. de $H^0(F, T_{G_{\rm sc}} \to T_G)$ si $F$ est local.

**3.2. Équivalence.** — Soit $(H, \kappa, \xi)$ et $(H', \kappa', \xi')$ deux données endoscopiques de $G$. On a donc deux diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{cccc} & T_{H_{\rm sc}} & \hookrightarrow & T_{G_{\rm sc}} \\ \xi: & \downarrow & & \downarrow \\ & T_H & \xrightarrow{\iota} & T_G. \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} & T_{H'_{\rm sc}} & \hookrightarrow & T'_{G_{\rm sc}} \\ \xi': & \downarrow & & \downarrow \\ & T_{H'} & \xrightarrow{\iota} & T'_G. \end{array}$$

Par définition, ces données sont équivalentes s'il existe un $F$-isomorphisme

$$\alpha\ : H' \to H$$

et des éléments $h \in H_{\rm sc}$ et $g \in G_{\rm sc}$ qui vérifient les deux propriétés suivantes.

(1) On a $(\mathrm{Ad}(h) \circ \alpha)(T_{H'}) = T_H$ et $\mathrm{Ad}(g)(T'_G) = T_G$. Les morphismes $\mathrm{Ad}(h) \circ \alpha$ et $\mathrm{Ad}(g)$ induisent un isomorphisme sur $\bar{F}$ entre $\xi'$ et $\xi$. En particulier, on a des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} T_{H'_{\rm sc}} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ad}(h)\circ\alpha_{\rm sc}"'] & T'_{G_{\rm sc}} \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)"] \\ T_{H_{\rm sc}} \arrow[r] & T_{G_{\rm sc}} \end{tikzcd}$$

où $\alpha_{\rm sc}$ est l'unique isomorphisme $H'_{\rm sc} \to H_{\rm sc}$ qui relève $\alpha$ et

$$\begin{tikzcd} T_{H'} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ad}(h)\circ\alpha"'] & T'_G \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)"] \\ T_H \arrow[r] & T_G \end{tikzcd}$$

compatibles en un sens évident aux diagrammes $\xi$ et $\xi'$.
Notons que le premier diagramme ci-dessus induit un isomorphisme

$$X_*(T_{H'_{\rm sc}})\backslash X_*(T'_{G_{\rm sc}}) \to X_*(T_{H_{\rm sc}})\backslash X_*(T_{G_{\rm sc}}). \tag{3.3}$$

Montrons qu'il est équivariant. Pour cela, il suffit de montrer le résultat analogue où l'on remplace $T'_{G_{\rm sc}}$ et $T_{G_{\rm sc}}$ par $T'_G$ et $T_G$. Comme ceux-ci sont $F$-isomorphes à $T_{H'}$ et $T_H$ il suffit de montrer que l'isomorphisme

$$X_*(T_{H'_{\rm sc}})\backslash X_*(T_{H'}) \to X_*(T_{H_{\rm sc}})\backslash X_*(T_H)$$

induit par $\mathrm{Ad}(h) \circ \alpha$ est $\Gamma$-équivariant. Or

$$\mathrm{Ad}(h) \circ \alpha \circ \sigma(\mathrm{Ad}(h) \circ \alpha)^{-1} = \mathrm{Ad}(h\sigma(h)^{-1})$$

et $h\sigma(h)^{-1}$ appartient au normalisateur de $T_H$ dans $H$. Il suffit donc de vérifier que tout élément du groupe de Weyl $W^H(T_H)$ agit trivialement sur le quotient $X_*(T_{H_{\rm sc}})\backslash X_*(T_H)$. Il suffit encore de le vérifier sur la partie génératrice des réflexions simples $s_\alpha$ où $\alpha$ parcourt l'ensemble des racines de $T_H$ dans $H$. Or cela est évident sur la formule suivante valable pour tout $\chi \in X_*(T_H)$

$$s_\alpha(\chi) - \chi = \alpha(\chi)\alpha^\vee$$

puisque $\alpha^\vee \in X_*(T_{H_{\rm sc}})$.

(2) Identifions $\kappa'$ à un caractère de $H_0(F, X_*(T_{H_{\rm sc}})\backslash X_*(T_{G_{\rm sc}}))$ via l'isomorphisme

$$H_0(F, X_*(T_{H'_{\rm sc}})\backslash X_*(T'_{G_{\rm sc}})) \to H_0(F, X_*(T_{H_{\rm sc}})\backslash X_*(T_{G_{\rm sc}}))$$

induit par (3.3). Soit $\kappa'_0$ le caractère de $H^1(C_F, T_{H_{\rm sc}} \to T_{G_{\rm sc}})$ induit par $\kappa'$. On vérifie que $\kappa'_0$ appartient à $\mathcal{K}(T_G, G, F)$. Soit $\kappa_0$ l'élément de $\mathcal{K}(T_G, G, F)$ induit par $\kappa$. La seconde condition est l'égalité

$$\kappa_0 = \kappa'_0.$$

**3.3. Ellipticité.** — Une donnée endoscopique $(H, \kappa, \xi)$ de $G$ est *elliptique* si $\iota(A_H) = A_G$ (l'inclusion $\supset$ est toujours vraie).

# 4 Transfert de classes de conjugaison.

**4.1.** Soit $\bar{F}[\mathfrak{g}]$ la $\bar{F}$-algèbre des fonctions polynomiales régulières sur $\mathfrak{g}$. Elle est munie d'une action évidente de $\Gamma$. Soit $\bar{F}[\mathfrak{g}]^G$ la sous-algèbre des fonctions $G$-invariantes : elle est stable par $\Gamma$ et c'est une algèbre de polynômes sur $\bar{F}$. Soit l'espace affine $\mathfrak{c}_G = \mathrm{Spec}(\bar{F}[\mathfrak{g}]^G)$ : il est aussi muni d'une action de $\Gamma$. Soit

$$\chi = \chi_G \ : \ \mathfrak{g} \to \mathfrak{c}_G$$

le morphisme dual de l'inclusion $\bar{F}[\mathfrak{g}]^G \subset \bar{F}[\mathfrak{g}]^G$. Lorsque $X \in \mathfrak{g}$ est semi-simple et régulier, la fibre $\chi^{-1}(\chi(X))$ est la classe de $G$-conjugaison de $X$. Notons que $\chi$ est défini sur $F$. Lorsque $X \in \mathfrak{g}_{\rm reg}(F)$, les points sur $F$ de la fibre $\chi^{-1}(\chi(X))$ forment la classe de conjugaison stable de $X$.

Notons que $\chi$ induit des applications encore notées $\chi$ de $\gamma(\mathfrak{g})$ et $\Sigma(\mathfrak{g})$ dans $\mathfrak{c}_G$.

**4.2.** Soit $T$ un sous-tore maximal de $G$ et $W = W^G(T)$. Alors le morphisme de restrition $\bar{F}[\mathfrak{g}] \to \bar{F}[\mathfrak{t}]$ induit un isomorphisme (dit de Chevalley)

$$\bar{F}[\mathfrak{g}]^G \to \bar{F}[\mathfrak{t}]^W$$

sur l'algèbre des polynômes sur $\mathfrak{t}$ invariants par $W$. Notons que si $T$ est défini sur $F$, cet isomorphisme est $\Gamma$-équivariant.

**4.3. Transfert de classes de conjugaison.** — Soit $(H, \kappa, \xi)$ une donnée endoscopique de $G$. Soit $T_H$ et $T_G$ les sous-$F$-tores maximaux respectivement de $H$ et $G$ et

$$\iota \ : \ T_H \to T_G$$

le $F$-isomorphisme sous-jacents à cette donnée. Notons qu'il résulte de la définition d'une donnée endoscopique que $W^H = W^H(T_H)$ est naturellement un sous-groupe de $W^G = W^G(T_G)$ et que $\iota$ est équivariant sous $W^H$. En particulier, $\iota$ induit un morphisme $\Gamma$-équivariant

$$\bar{F}[\mathfrak{t}_G]^{W^G} \to \bar{F}[\mathfrak{t}_H]^{W^H}.$$

En combinant ce dernier avec l'isomorphisme de Chevalley, on obtient un morphisme $\Gamma$-équivariant de schéma affine :

$$\mathfrak{c}_H \to \mathfrak{c}_G. \tag{4.1}$$

Soit $Y \in \mathfrak{h}$ et $X \in \mathfrak{g}$. On dit que $Y$ est une image de $X$ et on note $Y \to X$ si $\chi_H(Y)$ a pour image $\chi_G(X)$ par le morphisme ci-dessus. On dit que $Y$ est $G$-régulier s'il existe (ou de manière équivalente si pour tout) $X$ semi-simple régulier tel que $Y \to X$.

**Définition 4.1**. — Soit $Y \in \mathfrak{h}(F)$ un élément $G$-régulier . On dit que $Y$ se transfère à $\mathfrak{g}$ s'il existe $X \in \mathfrak{g}_{\rm reg}(F)$ tel que $Y \to X$.

Si $Y \to X$, il en de même pour tous $Y' \in \mathfrak{h}(F)$ et $X' \in \mathfrak{g}(F)$ tels que $Y'$ est $H$-stablement conjugué à $Y$ et $X'$ est $G$-stablement conjugué à $X$. Tout $X' \in \mathfrak{g}(F)$ tel que $Y \to X'$ est stablement conjugué. Soit $\Sigma_G(\mathfrak{h}) \subset \Sigma(\mathfrak{h})$ le sous-ensemble des classes $G$-régulières. On a donc défini une fonction (de domaine les classes des images de $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$

$$\Sigma_G(\mathfrak{h}) \to \Sigma(\mathfrak{g})$$

dont on vérifie qu'elle est à fibres finies.

**4.4.** Soit $Y \in \mathfrak{h}(F)$ $G$-régulier et $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$. On vérifie que $Y \to X$ si et seulement s'il existe $h \in H_{\mathrm{sc}}$ et $g \in G_{\mathrm{sc}}$ tels que
- $\mathrm{Ad}(h)T_Y = T_H$ ;
- $\mathrm{Ad}(g)T_G = T_X$
- le morphisme composé

$$T_Y \xrightarrow{\mathrm{Ad}(h)} T_H \xrightarrow{\iota} T_G \xrightarrow{\mathrm{Ad}(g)} T_X \tag{4.2}$$

est un $F$-isomorphisme qui envoie $Y$ sur $X$.

L'isomorphisme (4.2) se complète de manière évidente en un diagramme

$$\xi' : \begin{array}{ccc} T_{Y,H_{\mathrm{sc}}} & \hookrightarrow & T_{X,G_{\mathrm{sc}}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_Y & \to & T_X. \end{array}$$

Les automorphismes intérieurs $\mathrm{Ad}(h)$ et $\mathrm{Ad}(g^{-1})$ induisent un isomorphisme de $\xi'$ sur $\xi$. On a vu (cf. ce qui suit la ligne (3.3)) que cela implique que $\mathrm{Ad}(g^{-1})$ induit un isomorphisme $\Gamma$-équivariant

$$X_*(T_{Y,H_{\mathrm{sc}}})\backslash X_*(T_{X,G_{\mathrm{sc}}}) \to X_*(T_{H_{\mathrm{sc}}})\backslash X_*(T_{G_{\mathrm{sc}}}) \tag{4.3}$$

Via cet isomorphisme, $\kappa$ définit un caractère noté $\kappa'$ de $H_0(X_*(T_{Y,H_{\mathrm{sc}}})\backslash X_*(T_{X,G_{\mathrm{sc}}}))$. On vérifie que $\kappa'$ est endoscopique i.e. définit sur $H^1(C_F, T_{X,G_{\mathrm{sc}}})$ un caractère noté $\kappa_Y$ qui appartient à $\mathcal{K}(T_X, G, F)$. On dispose donc d'une donnée endoscopique $(H, \kappa', \xi')$. L'identité de $H$ se complète en une équivalence entre les données $(H, \kappa, \xi)$ et $(H, \kappa', \xi')$.

**4.5.** Pour deux données endoscopiques $(H, \kappa, \xi)$ et $(H, \kappa', \xi')$ équivalentes, on obtient le même morphisme $\mathfrak{c}_H \to \mathfrak{c}_G$, cf. l.(4.1) et la même fonction $\Sigma_G(\mathfrak{h}) \to \Sigma(\mathfrak{g})$.

**4.6.** Dans ce paragraphe, on suppose que $G = G^*$ c'est-à-dire que $G$ est quasi-déployé. Soit $B$ un sous-groupe de Borel de $G$ défini sur $F$. Soit $T$ un sous-tore de $B$ défini sur $F$. Soit $\Phi$ l'ensemble des racines simples de $T$ dans $B$. Pour toute racine $\alpha$ de $T$ dans $G$, le sous-espace propre

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in T \ \ \mathrm{Ad}(t)X = \alpha(t)X\}$$

est de dimension 1 sur $\overline{F}$. Fixons pour tout $\alpha \in \Phi$ un élément non nul $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ tel que $\sigma(X_\alpha) = X_{\sigma(\alpha)}$ pour tout $\sigma \in \Gamma$. Le triplet $(B, T, \{X_\alpha\})$ forme ce qu'on appelle un épinglage.

Pour tout $\alpha \in \Phi$, soit $X_{-\alpha}$ l'unique élément de $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ défini par la condition $[X_\alpha, X_{-\alpha}]$ est la coracine $\alpha^\vee$ vue comme élément de $\mathfrak{t}$. Posons

$$X_+ = \sum_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$$

et

$$X_- = \sum_{\alpha \in \Delta} X_{-\alpha}.$$

Soit $\mathfrak{g}_{X_+}$ le centralisateur de $X_+$ dans $\mathfrak{g}$. Énonçons le théorème suivant dû à Kostant.

**Théorème 4.2.** — *La restriction à $X_- + \mathfrak{g}_{X_+}$ du morphisme $\chi$ induit un isomorphisme de $X_- + \mathfrak{g}_{X_+}$ sur $\mathfrak{c}$. En particulier, on a un isomorphisme de $X_- + \mathfrak{g}_{X_+}(F)$ sur $\mathfrak{c}(F)$.*

On en déduit les corollaires suivants.

**Corollaire 4.3**. — *Toute classe stable dans $\Sigma(\mathfrak{g})$ contient un et un seul élément dans $X_- + \mathfrak{g}_{X_+}$. La classe de conjugaison de cet élément ne dépend pas du choix de l'épinglage.*

**Corollaire 4.4**. — *Soit $(H, \kappa, \xi)$ une donnée endoscopique d'un groupe quasi-déployé $G$. Tout élément $G$-régulier de $\mathfrak{h}(F)$ se transfère à $\mathfrak{g}$.*

**4.7.** Nous ne faisons plus l'hypothèse que $G$ est quasi-déployé. Le $\overline{F}$-isomorphisme $\varphi$ (cf. l. (2.1)) induit un $F$-isomorphisme

$$\mathfrak{c}_G \to \mathfrak{c}_{G^*}.$$

Le corollaire précédent nous conduit à étudier les conditions pour qu'un élément $X^* \in \mathfrak{g}^*_{\mathrm{reg}}(F)$ se transfere à $\mathfrak{g}$ c'est-à-dire que la fibre $\chi_G^{-1}(\chi_{G^*}(X^*))$ ait des éléments rationnels.

**Lemme 4.5**. — *Soit $X^* \in \mathfrak{g}^*_{\mathrm{reg}}(F)$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *$X^*$ se transfère à $\mathfrak{g}$ ;*
2. *Il existe $g \in G^*_{\mathrm{sc}}$ et $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$ tel que*
$$\mathrm{Ad}(g) \circ \varphi(X) = X^* \ ;$$
3. *la classe de $\varphi$ dans $H^1(F, G^*_{\mathrm{ad}})$ appartient à l'image de*
$$H^1(F, T_{X^*,\mathrm{ad}}) \longrightarrow H^1(F, G^*_{\mathrm{ad}}).$$

*Si $F$ est local non-archimédien, tous les éléments elliptiques de $\mathfrak{g}^*(F)$ se transfèrent à $\mathfrak{g}$.*

**Démonstration.** — Clairement les assertions 1 et 2 sont équivalentes et 2 implique 3. On se contente donc de prouver que 3 implique 2. Pour alléger les notations, on pose $T = T_{X^*}$. Soit $u_\sigma$ le cocycle à valeurs dans $G^*_{\mathrm{ad}}$ défini par $\varphi\sigma(\varphi)^{-1}$. L'assertion 3 affirme que la classe de $u$ appartient à l'image de

$$H^1(F, T_{\mathrm{ad}}) \longrightarrow H^1(F, G^*_{\mathrm{ad}})$$

c'est-à-dire qu'il existe $g \in G^*_{\mathrm{sc}}$ tel que $gu_\sigma\sigma(g)^{-1}$ appartient à $T/Z_{G^*}$. Soit $X \in \mathfrak{g}$ tel que $\mathrm{Ad}(g) \circ \varphi(X) = X^*$. On vérifie que $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$.

Prouvons la dernière assertion. On suppose $F$ local non-archimédien.

Puisque $X^*$ est elliptique, $T$ est elliptique et l'isomorphisme de Tate-Nakayama donne $H^2(F, T_{\mathrm{sc}}) = 1$. Il s'agit de prouver que la flèche

$$H^1(F, T_{\mathrm{ad}}) \longrightarrow H^1(F, G^*_{\mathrm{ad}})$$

est surjective.

La suite exacte

$$H^1(F, T_{\mathrm{ad}}) \to H^1(F, T_{\mathrm{sc}} \to T_{\mathrm{ad}}) \to H^2(F, T_{\mathrm{sc}})$$

implique la surjectivité de la flèche $H^1(F, T_{\mathrm{ad}}) \to H^1(F, T_{\mathrm{sc}}$. La surjectivité cherchée résulte alors du diagramme commutatif ci-dessus

$$\begin{array}{ccc} H^1(F, T_{\mathrm{ad}}) & \longrightarrow & H^1(F, G_{\mathrm{ad}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(F, T_{\mathrm{sc}} \to T_{\mathrm{ad}}) & \longrightarrow & H^1(F, G_{\mathrm{sc}} \to G_{\mathrm{ad}}) \end{array}$$

et de l'injectivité de la flèche d'abélianisation (flèche verticale droite) pour un corps local non-archimédien (puisque pour un tel corps $H^1(F, G_{\mathrm{sc}}) = 1$). □

**4.8.** Le lemme suivant est une conséquence évidente du corollaire et du lemme ci-dessus.

**Lemme 4.6**. — *Soit $F$ un corps local non-archimédien. Supposons que la donnée endoscopique $(H, \kappa, \xi)$ soit elliptique. Alors tous les éléments elliptiques et $G$-réguliers de $\mathfrak{h}(F)$ se transfèrent à $G$.*

## 5 Analyse harmonique sur les algèbres de Lie $p$-adique

**5.1.** Dans toute cette section, $F$ désigne un corps $p$-adique. Dans cette section, on rappelle quelques résultats d'analyse harmonique sur $\mathfrak{g}(F)$ qui nous seront utiles pour la suite. Une excellente référence est [2].

**5.2.** Soit $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ l'espace vectoriel des fonctions complexes sur $\mathfrak{g}(F)$ lisses (c'est-à-dire localement constantes) et à support compact. Soit $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de $F$. Par réseau de $\mathfrak{g}(F)$, on entend un sous-$\mathcal{O}_F$-module de $\mathfrak{g}(F)$ qui est à la fois ouvert et compact. Soit $R$ un réseau de $\mathfrak{g}(F)$. On note $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F)/R)$ le sous-espace de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ formé des fonctions invariantes par $R$.

**5.3.** Par distribution (sur $\mathfrak{g}(F)$), on entend une forme linéaire sur $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. Si $T$ est une distribution, on note $\mathrm{supp}(T)$ son support. L'action de $G(F)$ sur $\mathfrak{g}(F)$ définit par dualité une action sur $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ et sur l'espace des distributions. Une distribution est ($G(F)$-)invariante si elle est fixe sous cette action. Soit $J$ l'espace des distributions invariantes.

Pour tous sous-ensembles, $\omega \subset \mathfrak{g}(F)$ et $H \subset G(F)$, on pose

$$\omega^H = \{\mathrm{Ad}(x)X \mid x \in H \ \text{ et } X \in \omega\}.$$

Soit $\omega \subset \mathfrak{g}(F)$ un sous-ensemble. On note $J(\omega)$ l'ensemble des distributions invariantes $T$ dont le support est inclus dans l'adhérence de $\omega^{G(F)}$.

Voici un premier résultat fondamental de finitude dû à Howe et Harish-Chandra. (c'est le théorème 12.1 de [2]).

**Théorème 5.1**. — *Soit $\omega \subset \mathfrak{g}(F)$ un sous-ensemble* compact *et $R$ un réseau de $\mathfrak{g}(F)$. Soit $J_R(\omega)$ l'espace engendré par les restrictions à $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F)/R)$ des éléments de $J(\omega)$. Alors*

$$\dim_{\mathbb{C}}(J_R(\omega)) < \infty.$$

**5.4.** Soit

$$\langle \ , \ \rangle \ : \ \mathfrak{g}(F) \times \mathfrak{g}(F) \to \mathbb{C}$$

une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et invariante par l'action de $G(F)$. Soit

$$\psi \ : \ F \to \mathbb{C}^\times$$

un caractère continu et non trivial. Tout sous-espace de $\mathfrak{g}(F)$ pour lequel la restriction de cette forme est non dégénérée est muni de la mesure de Haar auto-duale pour le bicaractère $\psi(\langle \ , \ \rangle)$.

On définit une transformation de Fourier qui est une bijection linéaire de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ dans lui-même par

$$\hat{f}(X) = \int_{\mathfrak{g}(F)} f(Y)\psi(\langle X, Y\rangle)\, dY.$$

Par dualité, on définit une transformée de Fourier sur l'espace des distributions. L'action de $G(F)$ commute à la transformation de Fourier. En particulier, cette dernière préserve $J$.

**5.5.** On peut alors énoncer le théorème de régularité de Harish-Chandra (cf. théorème 4.4 de [2]).

**Théorème 5.2**. — *Soit $\omega$ un compact de $\mathfrak{g}(F)$ et $T \in J(\omega)$. Il existe une fonction $\hat{t}$ localement constante sur $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$ et localement sommable sur $\mathfrak{g}(F)$ telle que*

$$\hat{T}(f) = \int_{\mathfrak{g}(F)} \hat{t}(X) f(X)\, dX.$$

## 6 Intégrales orbitales : cas d'un corps $p$-adique

**6.1.** On continue avec les notations de la section précédente.

**6.2.** On fixe une mesure de Haar sur $G(F)$. Soit $\mathcal{T}^G$ l'ensemble des classes de $G(F)$-conjugaison des sous-$F$-tores maximaux de $G$. On idenfie dans la suite cet ensemble avec un système de représentants. On munit les tores dans $\mathcal{T}^G$ de mesures de Haar. Tout sous-$F$-tore maximal de $G$ est conjugué à un tore dans $\mathcal{T}^G$ : il est alors muni de la mesure de Haar obtenue par transport.

**6.3.** Soit $X \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}(F)$. L'intégrale orbitale de $X$ est la distribution invariante $I_X$ définie par

$$I_X(f) = |D^{\mathfrak{g}}(X)|_F^{\frac{1}{2}} \int_{T_X(F)\backslash G(F)} f(\text{Ad}(x^{-1})X)\, dx$$

où

– $dx$ est la mesure de Haar quotient ;

– $D^{\mathfrak{g}}(X) = \det(\text{ad}(x)_{|\mathfrak{g}/\mathfrak{t}_X})$ est le discriminant de Weyl.

Notons que l'intégrale est convergente. Cela résulte du fait que l'application

$$x \in T_X(F)\backslash G(F) \mapsto f(\text{Ad}(x^{-1})X)$$

est à support compact : en effet, $x \mapsto \text{Ad}(x^{-1})X$ induit un homéomorphisme de $T_X(F)\backslash G(F)$ sur l'orbite de $X$ et celle-ci est fermée puisque $X$ est semi-simple.

L'importance des intégrales orbitales (semi-simples régulières) dans l'analyse harmonique provient du théorème suivant de Harish-Chandra : l'ensemble intégrales orbitales (semi-simples régulières) est faiblement dense dans $J$ c'est-à-dire si $I_X(f) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}(F)$ alors $T(f) = 0$ pour tout $T \in J$ (cf. théorème 3.1 de [2]).

**6.4.** Un problème fondamental est de caractériser les fonctions

$$X \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}(F) \mapsto I_X(f)$$

obtenues avec $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. C'est en général un problème très difficile. Lorsqu'on se restreint aux $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{\text{reg}}(F))$ c'est-à-dire aux fonctions lisses qui ont un support compact inclus dans $\mathfrak{g}_{\text{reg}}(F)$, ce problème est facile.

**Lemme 6.1**. — *Soit $I$ une application de $\mathfrak{g}_{\text{reg}}(F)$ dans $\mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :*

1. *$I$ est localement constante, invariante sous l'action de $G(F)$ et à support inclus dans un ensemble $\omega^{G(F)}$ tel que $\omega$ soit compact ;*
2. *il existe $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{\text{reg}}(F))$ tel que*

$$\forall X \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}(F) \quad I(X) = I_X(f).$$

**Démonstration.** — Soit $T \in \mathcal{T}^G$ et

$$\begin{array}{cccc} \Phi_T & : & T(F)\backslash G(F) \times \mathfrak{t}_{\text{reg}}(F) & \to & \mathfrak{g}_{\text{reg}}(F) \\ & & (g, X) & \mapsto & \text{Ad}(g^{-1})X \end{array}$$

Un peu de calcul différentiel montre que $\Phi_T$ induit un revêtement d'espace analytique de $T(F)\backslash G(F) \times \mathfrak{t}_{\text{reg}}(F)$ sur un ouvert noté $\mathfrak{g}_T(F)$ de $\mathfrak{g}_{\text{reg}}(F)$ : ce revêtement est galoisien de groupe $W^G(T)$. Les ouverts $\mathfrak{g}_T(F)$ pour $T \in \mathcal{T}^G$ sont deux à deux disjoints et leur union est $\mathfrak{g}_{\text{reg}}(F)$.

Soit $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{\text{reg}}(F))$. Montrons que l'application $X \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}(F) \mapsto I_X(f)$ vérifie l'assertion 1. Seul le fait qu'elle soit localement constante n'est pas évident. Pour cela il suffit de montrer que pour tout $T \in \mathcal{T}^G$ l'application $I_{\Phi_T}(f)$. Or $f \circ \Phi_T$ appartient à $C_c^\infty(T(F)\backslash G(F) \times \mathfrak{t}_{\text{reg}}(F))$. Il existe donc une famille finie de fonctions $\alpha_i \in C_c^\infty(T(F)\backslash G(F))$ et $\theta_i \in C_c^\infty(\mathfrak{t}_{\text{reg}}(F)$ telle que

$$f \circ \Phi_T = \sum_i \alpha_i \otimes \theta_i.$$

On calcule alors pour $(g, X) \in T(F)\backslash G(F) \times \mathfrak{t}_{\mathrm{reg}}(F)$

$$\begin{aligned} I_{\Phi_T(g,X)}(f) &= |D^{\mathfrak{g}}(X)|_F^{\frac{1}{2}} \int_{T_{\mathrm{Ad}(g^{-1})X}(F)\backslash G(F)} f(\mathrm{Ad}(x^{-1}g^{-1})X)\,dx \\ &= |D^{\mathfrak{g}}(X)|_F^{\frac{1}{2}} \int_{T_X(F)\backslash G(F)} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})X)\,dx \\ &= |D^{\mathfrak{g}}(X)|_F^{\frac{1}{2}} \sum_i \int_{T_X(F)\backslash G(F)} \alpha_i(x)\,dx \times \theta_i(X) \end{aligned}$$

et le résultat est alors évident.

Réciproquement, soit $I$ qui vérifie la conditions 1. Soit $T \in \mathcal{T}^G$. La fonction $I \circ \Phi_T$ est constante sur la première variable et définit une fonction $\theta \in C_c^\infty(\mathfrak{t}_{\mathrm{reg}}(F)$ en la première variable. Le fait que $\theta$ soit à support régulier et compact vient de l'inclusion évidente $\mathrm{supp}(\theta) \subset \mathfrak{t}_{\mathrm{reg}}(F) \cap \omega^{G(F)}$ et ce dernier ensemble est compact. Soit $\alpha \in C_c^\infty(T(F)\backslash G(F))$ une fonction $W$-invariante qui vérifie

$$\int_{T_X(F)\backslash G(F)} \alpha_i(x)\,dx = 1.$$

Alors la fonction $\alpha \otimes |D^{\mathfrak{g}}(\cdot)|_F^{-\frac{1}{2}}\theta$ est $W$-invariante et appartient à $C_c^\infty(T(F)\backslash G(F) \times \mathfrak{t}_{\mathrm{reg}}(F))$. Elle définit donc une fonction $f_T \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_T(F))$. En faisant varier $T$, on obtient une fonction $f$ qui satisfait 2.

$\square$

Le lemme suivant est alors évident.

**Lemme 6.2**. — *Soit $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F))$. La fonction $X \mapsto I_X(f)$ vérifie les assertions du lemme précédent.*

**6.5.** Voici une formulation précisée et légèrement différente du théorème de régularité 5.2 de Harish-Chandra pour les intégrales orbitales.

**Théorème 6.3**. — *Il existe une unique fonction*

$$\hat{i}^G \ : \ \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F) \times \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F) \to \mathbb{C}$$

*localement constante et invariante par $G(F) \times G(F)$ telle que pour tout $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$ et tout $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ on ait*

$$\hat{I}_X(f) = \sum_{T \in \mathcal{T}^G} |W^G(T)|^{-1} \int_{\mathfrak{t}(F)} I_Y(f)\hat{i}^G(X,Y)\,dY$$

Le lien entre les deux formulations se fait à l'aide de la formule d'intégration de Weyl : il existe des constantes $c_T$ pour $T \in \mathcal{T}^G$ qui vérifient pour tout $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$

$$\int_{\mathfrak{g}(F)} f(X)\,dX = \sum_{T \in \mathcal{T}^G} c_T \cdot |W^G(T)|^{-1} \int_{\mathfrak{t}(F)} |D^{\mathfrak{g}}(X)|_F \int_{T(F)\backslash G(F)} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})X)\,dx\,dX.$$

Le fait que $\hat{i}^G$ est localement constante en la première variable résulte du lemme 6.2.

**Remarque**. — Il est clair que la fonction $\hat{i}^G$ ne dépend du choix des mesures de Haar sur $G(F)$ et les tores $T(F)$.

# 7 Facteurs de transfert

**7.1.** Dans cette section, $F$ désigne un corps local.

**7.2.** Soit $(H, \kappa, \xi)$ une donnée endoscopique de $H$. L'objet de cette section est de définir le facteur de transfert de Langlands-Shelstad. C'est une application

$$\Delta \ :\Sigma \ \ _G(\mathfrak{h}) \times \Gamma(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$$

qui vérifie : $\Delta(Y, X) \neq 0$ si et seulement si $Y \to X$. On va préciser les valeurs non nulles de $\Delta$. Pour cela, on définit dans la suite un facteur de transfert relatif canonique $\Delta(Y_1, X_1, Y_2, X_2)$ pour des éléments $Y_i \in \Sigma_G(\mathfrak{h})$ et $X_i \in \Gamma(\mathfrak{g})$ qui vérifient $Y_i \to X_i$ pour $i = 1, 2$. On fixe un couple base $(Y_0, X_0)$ tel que $Y_0 \to X_0$ (s'il existe un tel couple). On fixe arbitrairement $\Delta(Y_0, X_0)$ dans $\mathbb{C}^\times$. Pour tout couple $(Y, X)$ tel que $Y \to X$ on pose

$$\Delta(Y, X) = \Delta(Y, X, Y_0, X_0)\Delta(Y_0, X_0).$$

Cette définition fait sens car comme on le verra pour un tel couple $(Y, X)$ on a

$$\Delta(Y, X, Y, X) = 1. \tag{7.1}$$

Pour définir le facteur de transfert relatif, on a besoin d'une forme intérieure quasi-déployée $G^*$ de $G$ (cf. §2.5 et l'isomorphisme $\varphi$ de 1.2.1) ainsi que d'un épinglage de $G^*$ (cf. §4.6). On a alors une section de $\chi_{G^*}$ (cf. théorème 4.2) qui composée avec $\mathfrak{c}_H \to \mathfrak{c}_{G^*}$ (cf. 1.4.1 ) et $\chi_H$ donne une application

$$\Sigma_G(\mathfrak{h}) \to X_- + \mathfrak{g}_{X_+}(F)$$

qu'on note $Y \mapsto Y^*$. On laisse au soin du lecteur de vérifier que le facteur de transfert relatif ne dépend pas de ces choix auxillaires.

**7.3.** Sous-jacents à la donnée $(H, \kappa, \xi)$, on a des sous-tores maximaux $T_G \subset G$ et $T_H \subset H$. De plus, $\kappa$ induit un caractère du groupe $H^1(F, T_{H_{\rm sc}} \to T_{G_{\rm sc}})$ (cf. §3.1). Posons

$$U = T_{G_{\rm sc}} \times T_{G_{\rm sc}} / \{(z, z^{-1}) | z \in Z_{G_{\rm sc}}\}.$$

On a un morphisme évident $U \to T_{G_{\rm sc}}$ induit par le produit et plus généralement un morphisme de complexes

$$[T_{H_{\rm sc}} \times T_{H_{\rm sc}} \to U] \to [T_{H_{\rm sc}} \to T_{G_{\rm sc}}].$$

On a donc une flèche

$$H^1(F, T_{H_{\rm sc}} \times T_{H_{\rm sc}} \to U) \to H^1(F, T_{H_{\rm sc}} \to T_{G_{\rm sc}}).$$

On note $\kappa_U$ le caractère que $\kappa$ induit sur le premier groupe.

On veut définir $\Delta(Y_1, X_1, Y_2, X_2)$ pour un quadruplet $(Y_1, X_1, Y_2, X_2)$ comme ci-dessus. Par définition de $Y_i^*$, il existe $g_i \in G^*_{\rm sc}$ tel que $\mathrm{Ad}(g_i)T_G = T_{Y_i^*}$ et qui vérifie les conditions du paragraphe §4.4. Posons

$$U_{1,2} = T_{Y_1^*, G_{\rm sc}} \times T_{Y_2^*, G_{\rm sc}} / \{(z, z^{-1}) | z \in Z_{G_{\rm sc}}\}.$$

Par une variante de ce qui suit la ligne (3.3)), on vérifie que la paire $(\mathrm{Ad}(g_1^{-1}), \mathrm{Ad}(g_2^{-1}))$ induit un isomorphisme $\Gamma$-équivariant

$$X_*(T_{Y,H_{\rm sc}} \times T_{Y,H_{\rm sc}}) \backslash X_*(U_{1,2}) \to X_*(T_{H_{\rm sc}} \times T_{H_{\rm sc}}) \backslash X_*(U)$$

d'où un isomorphisme

$$H^1(F, T_{Y,H_{\rm sc}} \times T_{Y,H_{\rm sc}} \to U_{1,2}) \to H^1(F, T_{H_{\rm sc}} \times T_{H_{\rm sc}} \to U).$$

Donc $\kappa_U$ induit un caractère sur $H^1(F, T_{Y,H_{\mathrm{sc}}} \times T_{Y,H_{\mathrm{sc}}} \to U_{1,2})$ donc un caractère noté $\kappa_{1,2}$ sur $H^1(F, U_{1,2})$.

Puisque $Y_i \to X_i$ par hypothèse, on a $\chi_G(X_i) = \chi_{G^*}(Y_i^*)$ et donc il existe $x_i \in G^*_{\mathrm{sc}}$ tel que

$$\mathrm{Ad}(x_i) \circ \varphi(X_i) = Y_i^*.$$

Pour tout $\sigma \in \Gamma$, soit $u_\sigma$ un élément de $G^*_{\mathrm{sc}}$ qui vérifie

$$\varphi\sigma(\varphi)^{-1} = \mathrm{Ad}(u_\sigma).$$

Alors le couple $(x_1 u_\sigma \sigma(x_1)^{-1}, \sigma(x_2) u_\sigma^{-1} x_2^{-1})$ définit une 1-cochaîne à valeurs dans $U_{1,2}$ dont on note $\mathrm{inv}(Y_1, X_1, Y_2, X_2)$ la classe dans $H^1(F, U_{1,2})$. On pose

$$\Delta(Y_1, X_1, Y_2, X_2) = \langle \kappa_{1,2}, \mathrm{inv}(Y_1, X_1, Y_2, X_2) \rangle.$$

**7.4.** Soit $X^* \in \mathfrak{g}^*_{\mathrm{reg}}(F)$. Pour $i = 1, 2$ soit $X_i \in \mathfrak{g}(F)$ tel qu'il existe $x_i \in G^*_{\mathrm{sc}}$ tel que

$$\mathrm{Ad}(x_i) \circ \varphi(X_i) = X^*.$$

Alors le produit

$$x_1 u_\sigma \sigma(x_1)^{-1} \sigma(x_2) u_\sigma^{-1} x_2^{-1}$$

définit une 1-cochaîne galoisienne à valeurs dans $T_{X^*,\mathrm{sc}}$. Sa classe dans $H^1(F, T_{X^*,\mathrm{sc}})$ est notée $\mathrm{inv}(X^*; X_1, X_2)$. On vérifie facilement la formule suivante : pour tout $Y \in \mathfrak{h}_{G-\mathrm{reg}}(F)$ tel que $Y \to X^*$, on a

$$\Delta(Y, X_1) = \Delta(Y, X_2) \langle \kappa_Y, \mathrm{inv}(X^*; X_1, X_2) \rangle. \tag{7.2}$$

où $\kappa_Y$ est défini à la fin du paragraphe 4.4.

# 8 Transfert lisse et transformée de Fourier : cas $p$-adique.

**8.1.** Dans toute cette section, $F$ désigne un corps $p$-adique.

**8.2.** Deux éléments de $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$ stablement conjugués ont leurs tores centralisateurs "stablement conjugués" et donc isomorphes. On impose que les mesures de Haar sur ces tores se correspondent par cet isomorphisme.

**8.3.** Soit $X \in \Sigma(\mathfrak{g})$. On définit $S_X$ l'intégrale orbitale stable comme la distribution invariante définie par

$$S_X(f) = \sum_{\{Z \in \Gamma(\mathfrak{g}) \ | \ \chi(Z) = \chi(X)\}} I_Z(f).$$

Une distribution $T$ est stable si elle appartient à l'adhérence faible de l'espace des intégrales orbitales stables c'est-à-dire si $S_X(f) = 0$ pour tout $X \in \Sigma(\mathfrak{g})$ implique $T(f) = 0$.

Pour préciser que ce sont des objets relatifs à $G$, on écrira $I^G$, $S^G$ etc.

**8.4.** Soit $(H, \kappa, \xi)$ une donnée endoscopique de $G$. Pour tout $Y \in \Sigma_G(\mathfrak{h})$, on définit $I_Y^{G,H}$ l'intégrale orbitale endoscopique comme la distribution invariante définie par

$$I_Y^{G,H}(f) = \sum_{X \in \Gamma(\mathfrak{g})} \Delta(Y, X) I_X(f).$$

**8.5.** Voici le théorème de transfert lisse dû à Waldspurger.

**Théorème 8.1.** — *Pour tout $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, il existe $f^H \in C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))$ tel que pour tout $Y \in \Sigma_G(\mathfrak{h})$, on ait*

$$I_Y^{G,H}(f) = S_Y^H(f^H).$$

*On dit que $f^H$ est un transfert de $f$.*

On peut montrer que si $T$ une distribution stable sur $\mathfrak{h}(F)$ alors $T(f^H)$ ne dépend que $f$ on obtient alors une distribution sur $\mathfrak{g}(F)$ : c'est le transfert endoscopique dual.

**8.6.** Supposons que le groupe $G$ est non ramifié ; par définition, cela signifie qu'il est quasi-déployé et déployé sur une extension non ramifiés. La théorie de Bruhat-Tits montre qu'il existe un schéma en groupes $\mathcal{G}$ lisse sur $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de $F$, à fibres réductives connexes, dont la fibre spéciale est $G$. Notons $1_G$ la fonction caractéristique du réseau $\mathcal{G}(\mathcal{O}_F)$ dans $\mathfrak{g}(F)$. On dit qu'un tel réseau est *hyperspécial*. Supposons que $H$ est non ramifiée, on a alors une fonction $1_H$. Le théorème suivant dû à Wadspurger pour $SL(n)$, Laumon-Ngô pour les groupes unitaires et Ngô par une preuve générale est vrai pour tout choix de modèle entier comme ci-dessus : c'est le lemme fondamental de Langlands-Shelstad.

**Théorème 8.2**. — *Il existe une constante $c \neq 0$ tel que pour tout $Y \in \Sigma_G(\mathfrak{h})$, on ait*

$$c\, I_Y^{G,H}(1_G) = S_Y^H(1_H).$$

**8.7.** Harish-Chandra a mis en évidence l'analogie entre l'analyse harmonique sur le groupe $G$ et sur son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Évidemment, de part et d'autre on dispose des intégrales orbitales associées aux éléments semi-simples réguliers. Il y a cependant d'autres distributions sur le groupe à savoir les traces des représentations (tempérées). Leurs analogues sur l'algèbre de Lie sont les transformées de Fourier des intégrales orbitales.

Waldspurger a poussé plus en avant cette analogie. Sur le groupe, les représentations tempérées se regroupent en $L$-paquets dont les traces associées devraient être des distributions stables. Selon Waldspurger, l'analogue d'un $L$-paquet est une classe de conjugaison stable. En particulier, on s'attend à ce que la transformée de Fourier $\hat{S}_X^G$ pour $X \in \Sigma(\mathfrak{g})$ soit stable. Waldspurger a montré le théorème suivant.

**Théorème 8.3**. — *La transformée de Fourier d'une distribution stable est stable.*

**8.8.** On fixe comme forme bilinéaire sur $\mathfrak{h}(F)$ (cf. §5.4) la forme qui se restreint à $\mathfrak{t}_H$ en la forme $\langle \iota(\cdot), \iota(\cdot)\rangle$ (cf. §3.1). On prend le même caractère $\psi$ d'où une transformation de Fourier. On peut alors regarder le transfert réciproque de $\hat{S}_Y^H$. Quel est-il ? Voici la réponse due à Waldspurger.

**Théorème 8.4**. — *Il existe une constante $c \neq 0$ telle que pour tout $Y \in \Sigma_G(\mathfrak{h})$ et tout $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, on ait*

$$c\, \hat{I}_Y^{G,H}(f) = \hat{S}_Y^H(f^H)$$

*où $f^H$ est un transfert de $f$. Autrement dit, le transfert commute à la transformée de Fourier à une constante près.*

**8.9.** Le théorème 8.4 est équivalent au théorème suivant (dû aussi à Waldspurger). L'affirmation “implique” est une conséquence du fait que les fonctions $\hat{\imath}^G$ sont localement constantes et du lemme 6.1 qui permet d'isoler les orbites.

**Théorème 8.5**. — *Il existe une constante $c \neq 0$ telle que pour tout $Y \in \Sigma_G(\mathfrak{h})$ et tout $Z \in \Gamma(X)$ on ait l'égalité entre*

$$\sum_{X \in \Gamma(\mathfrak{g})} \Delta(Y,X)\hat{\imath}^G(X,Z)$$

*et*

$$c \sum_{Z' \in \Gamma(\mathfrak{h})} \sum_{Y'} \hat{\imath}^H(Y,Z')\Delta(Z',Z)|\ker(H^1(F,T_{Z'}) \to H^1(F,H))|^{-1}. \tag{8.1}$$

*où la somme sur $Y'$ porte sur les $Y' \in \Gamma(\mathfrak{h})$ stablement conjugués à $Y$.*

**8.10.** Il est remarquable que du théorème 8.5 implique l'existence du transfert du théorème 8.1. Esquissons une explication. Fixons $\omega$ un compact de $\mathfrak{h}$. Pour tout compact $K$ de $\mathfrak{g}(F)$, il résulte du théorème 5.1 de finitude de Howe que l'espace noté $V_{\omega,K}$ engendré par les fonctions indexées par $Z \in K \cap \mathfrak{g}_{\text{reg}}(F)$

$$Y \in \omega \cap \mathfrak{h}_{G-\text{reg}}(F) \mapsto \sum_{X \in \Gamma(\mathfrak{g})} \Delta(Y, X) \hat{i}^G(X, Z)$$

est de dimension finie. Par le théorème 8.5, cet espace est inclus dans celui engendré par les fonctions de la ligne (8.1) et ce dernier est inclus dans

$$Y \in \omega \cap \mathfrak{h}_{G-\text{reg}}(F) \mapsto S_Y^H(f')$$

lorsque $f'$ parcourt $C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))$ (pour le voir, on utilise le lemme 6.1.

Prenons $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. Il résulte de la formule d'intégration du théorème 6.3 que la fonction

$$Y \in \omega \cap \mathfrak{h}_{G-\text{reg}}(F) \mapsto I_Y^{G,H}(f)$$

appartient à l'espace $V_{\omega,K}$ défini ci-dessus pour un $K$ convenable. Mais comme on l'a dit tout élément de $V_{\omega,K}$ est de la forme $S_Y^H(f')$ pour $f' \in C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))$.

Cela donne le transfert local au voisinage de tout point. À l'aide de partition de l'unité, on peut recoller les transferts obtenus.

**8.11.** L'usage d'une exponentielle et d'arguments de descente au centralisateur montre que le transfert au niveau des groupes se déduit du transfert au niveau des algèbres de Lie des centralisateurs des éléments semi-simples du groupe. Cela nécessite de vérifier différentes formules de descente pour les facteurs de transfert.

# 9 Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie complexes

**9.1.** Dans cette section, le corps considéré est $\mathbb{C}$. Sur un tel corps la conjugaison stable se confond avec la conjugaison. Soit $(H, \kappa, \xi)$ une donnée endoscopique de $G$. Le facteur de transfert vaut soit une constante non nul soit est nul.

**9.2.** Soit $B \subset G$ un sous-groupe de Borel, $T \subset B$ un sous-tore maximal et $K \subset G(\mathbb{C})$ un sous-groupe compact maximal "en bonne position" relativement à $T$. Soit $U_B$ le radical unipotent de $B$. Soit $\mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{C}))$ l'espace de Schwartz de $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$. Pour $X \in \Gamma(\mathfrak{g})$ et $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{C}))$, on définit une intégrale orbitale $I_X(f)$ comme en §6.3. L'intégrale converge. Dans le cas complexe, une intégrale orbitale se calcule via la décomposition d'Iwasawa comme un terme constant "sphérique". Plus précisément pour des choix de mesure de Haar que nous ne précisons pas ici : pour tout $X \in \mathfrak{t}_{reg}(\mathbb{C})$ on a

$$I_X(f) = f_B(X)$$

où l'on a défini pour *tout* $X \in \mathfrak{t}(\mathbb{C})$ le "terme 'constant"

$$f_B(X) = \int_{K \times U_B(\mathbb{C})} f(\text{Ad}(k)(X + N))\, dN\, dk.$$

On a alors le théorème suivant (cas particulier d'un théorème de Bouaziz, cf. [1]).

**Théorème 9.1.** — *Soit $W = W^G(T)$ le groupe de Weyl. L'application*

$$f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{C})) \mapsto f_B \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{C}))^W$$

*est surjective.*

**9.3.** On fixe un caractère $\psi$ et une forme comme en §5.4 d'où une transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{C}))$. On demande que les formes sur $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ soient compatibles (cf. §8.7) c'est-à-dire qu'elles coïncident sur l'algèbre de Lie "du" tore commun ("du" puisque tous les tores maximaux sont conjugués). Il est alors facile de déduire du théorème ci-dessus le résultat suivant.

**Théorème 9.2.** — *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{C}))$. Alors*

– *Il existe un transfert* $f^H \in \mathcal{S}(\mathfrak{h}(\mathbb{C}))$ *tel que pour tout* $Y \in \Gamma_G(\mathfrak{h})$

$$I_Y(f^H) = I_Y^{G,H}(f) \ ;$$

– *le transfert commute à la transformation de Fourier.*

# 10 Préstablisation de la formule des traces pour les algèbres de Lie.

**10.1.** Dans cette section et sauf mention contraire, $F$ est un corps de nombres.

**10.2. Analogue de la partie elliptique de la formule des traces d'Arthur-Selberg.** Soit $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$ l'espace de Schwartz-Bruhat de $g(\mathbb{A})$ : c'est l'espace engendré par les fonctions $f_\infty \otimes f^\infty$ où $f_\infty$ est une fonction de Schwartz sur $\mathfrak{g}(F \otimes \mathbb{R})$ et $f^\infty$ est la fonction caractéristique d'un sous-groupe compact ouvert de $\mathfrak{g}(\mathbb{A}_f)$ où $\mathbb{A}_f$ désigne l'ensemble des adèles finis. On note $G(\mathbb{A})^1$ le sous-groupe de $G(\mathbb{A})$ qui s'insère dans la suite exacte

$$1 \to G(\mathbb{A})^1 \to G(\mathbb{A}) \to \mathrm{Hom}(X^*(G), \mathbb{R}_+^\times) \to 1$$

où $X^*(G)$ est le groupe des caractères rationnels de $G$ définis sur $F$ et la flèche non évidente est celle qui envoie $g \in G(\mathbb{A})$ sur le morphisme $\chi \mapsto |\chi(g)|_{\mathbb{A}}$.

On munit $G(\mathbb{A})$ de la mesure de Tamagawa et $\mathrm{Hom}(X^*(G), \mathbb{R}_+^\times)$ de la mesure déduite de la mesure usuelle de $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit une mesure sur $G(\mathbb{A})^1$. Le quotient $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$ est fini et on définit le nombre de Tamagawa de $G$ par

$$\tau(G) = \mathrm{vol}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1).$$

Le calcul des nombres de Tamagawa a été achevé avec la preuve par Kottwitz de la conjecture de Weil. Donnons le résultat sous la forme suivante (cf. [5] corollaire 1.7.4 p.39)

$$\tau(G) = \frac{|H^1_{ab}(\mathbb{A}/F, G)|}{\mathrm{Ker}^1_{ab}(F, G)}.$$

Cette expression vaut aussi pour les sous-tores de $G$.

**Théorème 10.1.** — *Pour tout* $f \in \mathcal{S}$*, l'intégrale*

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_{X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{ell}}(F)} |f(x^{-1}Xx)| \, dx < \infty$$

*est convergente.*

Pour la preuve de ce théorème, nous renvoyons à [9] paragraphe 10.8. Elle repose sur la théorie de la réduction qui fournit un ersatz de domaine fondamental au quotient $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$.

On peut donc poser

$$J^G(f) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_{X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{ell}}(F)} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})X) \, dx.$$

On écrit encore

$$J^G(f) = \sum_{X \in \Gamma_{\mathrm{ell}}(\mathfrak{g})} \tau(T_X) \, I_X^G(f)$$

où l'on a introduit l'intégrale orbitale globale

$$I_X^G(f) = \int_{T_X(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})X) \, dx. \qquad (10.1)$$

**10.3.** Au paragraphe précédent, on a exprimé $J^G(f)$ à l'aide de classes de conjugaison rationnelles. On aimerait trouver une expression en termes de classes de conjugaison stable locales. Ce sera possible mais à un terme d'erreur près. Il nous faut pour cela d'abord introduire l'obstruction de Langlands.

**10.4. L'obstruction de Langlands.** — On cherche à trouver une condition cohomologique pour qu'un élément de $\mathfrak{g}^*(F)$ qui localement partout se transfère à $\mathfrak{g}$ se transfère aussi globalement.

Plus précisément, soit $X^* \in \mathfrak{g}^*(F)$ un élément semi-simple régulier tel qu'il existe $x \in G^*(\bar{\mathbb{A}})$ et $X \in \mathfrak{g}(\mathbb{A})$ tel que

$$\mathrm{Ad}(x) \circ \varphi(X) = X^*.$$

On peut et on va supposer que $x \in G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$ (cf. [9] 10.2). Soit $u_\sigma$ une cochaîne à valeurs dans $G^*_{\mathrm{sc}}$ qui vérifie

$$\varphi\sigma(\varphi)^{-1} = \mathrm{Ad}(u_\sigma)$$

pour tout $\sigma \in \Gamma$. Soit $T$ le centralisateur de $X^*$ dans $G^*$. Alors la cochaîne $xu_\sigma\sigma(x)^{-1} \in T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$ définit une classe de 1-cocycle dans $H^1(\mathbb{A}_F/F, T_{\mathrm{sc}})$ notée $\widetilde{\mathrm{inv}}(X^*, X)$. Comme $x$ est bien défini à translation à gauche près par un élément de $T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$, la classe $\widetilde{\mathrm{inv}}(X^*, X)$ ne dépend que de $X^*$ et de $X$. On note $\mathrm{inv}(X^*, X)$ l'image de $\widetilde{\mathrm{inv}}(X^*, X)$ dans $\mathcal{E}(T, G, \mathbb{A}/F)$

**Théorème 10.2.** —*(Langlands) Il existe $g \in G(\mathbb{A})$ tel que $\mathrm{Ad}(g)(X) \in \mathfrak{g}(F)$ si et seulement si* $\mathrm{inv}(X^*, X) = 1$.

**Démonstration.** — La condition est nécessaire. En effet si $g \in G(\mathbb{A})$ vérifie $\mathrm{Ad}(g)(X) \in \mathfrak{g}(F)$, on est immédiatement ramené au cas où $X \in \mathfrak{g}(F)$. Mais alors l'ensemble des $y \in G$ tels que

$$\mathrm{Ad}(y) \circ \varphi(X) = X^*$$

est une sous-variété de $G_{\mathrm{sc}}$ non vide puisqu'elle possède un point dans $\bar{\mathbb{A}}$. On peut donc prendre $x \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$. On voit donc que $\widetilde{\mathrm{inv}}(X^*, X) = 1$ d'où la première implication.

La réciproque est plus élaborée. Puisque $\mathrm{inv}(X^*, X) = 1$, il existe un 1-cocycle $\beta_\sigma$ à valeurs dans $T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$, $y \in T(\bar{\mathbb{A}})$ et une 1-cochaîne $t_\sigma$ à valeurs dans $T_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ tels que

$$\beta_\sigma = y^{-1}\sigma(y)$$

(par abus, on ne distingue pas dans l'écriture $\beta_\sigma$ et son image dans $T(\bar{\mathbb{A}})$) et

$$xu_\sigma\sigma(x)^{-1} = \beta_\sigma t_\sigma.$$

pour tout $\sigma \in \Gamma$. Puisque le cobord $\partial\beta$ est trivial, on a $\partial u = \partial t$. On en déduit que la cochaîne $t_\sigma u_\sigma^{-1}$ est un cocycle “à valeurs dans $G_{\mathrm{sc}}$” expression un peu abusive qui signifie que $\varphi^{-1}(t_\sigma u_\sigma^{-1})$ est un cocycle à valeurs dans $G_{\mathrm{sc}}$. La cochaîne $yxu_\sigma\sigma(yx)^{-1}u_\sigma^{-1}$ définit un 1-cocycle à valeurs dans $G$ localement trivial : sa classe est donc un élément de $\mathrm{Ker}^1(F, G)$. Son image dans l'abélianisé $\mathrm{Ker}^1_{ab}(F, G)$ est triviale : en effet c'est la classe de l'hypercochaîne $(1, t_\sigma u_\sigma^{-1})$ qui est cohomologue à la classe triviale. Mais la flèche d'abélianisation $\mathrm{Ker}^1_{ab}(F, G) \to \mathrm{Ker}^1_{ab}(F, G)$ est un isomorphisme. On en déduit que la cochaîne $yxu_\sigma\sigma(yx)^{-1}u_\sigma^{-1}$ est triviale : il existe donc $a \in G^*$ tel que

$$yxu_\sigma\sigma(yx)^{-1}u_\sigma^{-1} = au_\sigma\sigma(a)^{-1}u_\sigma^{-1}.$$

Soit $Y \in \mathfrak{g}(\overline{F})$ tel que $\mathrm{Ad}(a) \circ \varphi(Y) = X^*$. Alors $Y = \mathrm{Ad}(b)X$ avec $b = \varphi^{-1}(a^{-1}yx)$ et on vérifie que $b \in G(\mathbb{A})$. Il s'ensuit que $Y \in \mathfrak{g}(\overline{F}) \cap \mathfrak{g}(\mathbb{A}) = \mathfrak{g}(F)$ ce qu'il fallait vérifier. □

**10.5. Pré-stabilisation.** Pour exprimer $J^G(f)$ à l'aide de classes de conjugaison stable locales, on va utiliser une inversion de Fourier sur le groupe $\mathcal{E}(T_{X^*}, g^*, f)$.

Par abus, on confond $\Gamma_{\mathrm{ell}}(\mathfrak{g})$ et $\Sigma_{\mathrm{ell}}(\mathfrak{g}^*)$ avec des systèmes de représentants. Pour tout $X^* \in \Sigma_{\mathrm{ell}}(\mathfrak{g}^*)$, soit

$$\Gamma_{X^*}(\mathfrak{g}) = \{X \in \Gamma_{\mathrm{ell}}(\mathfrak{g}) \mid \exists g \in G^*_{\mathrm{sc}} \quad \mathrm{Ad}(g) \circ \varphi(X) = X^*\}.$$

Il se peut que cet ensemble soit vide. S'il ne l'est pas, ses éléments sont des représentants des classes de conjugaison ordinaire dans une même classe stable de $\mathfrak{g}(F)$ déterminée par $X^*$. On a

$$\Gamma_{\mathrm{ell}}(\mathfrak{g}) = \bigcup_{X^* \in \Sigma_{\mathrm{ell}}(\mathfrak{g}^*)} \Gamma_{X^*}(\mathfrak{g})$$

et la réunion est évidemment disjointe. Introduisons alors

$$\Gamma_{X^*}(\mathfrak{g}(\mathbb{A})) = \{X \in \mathfrak{g}(\mathbb{A}) \mid \exists g \in G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}}) \quad \mathrm{Ad}(g) \circ \varphi(X) = X^*\}/G(\mathbb{A}).$$

Le théorème 10.2 implique que l'application évidente

$$\Gamma_{X^*}(\mathfrak{g}) \to \{X \in \Gamma_{X^*}(\mathfrak{g}(\mathbb{A})) \text{ tel que } \mathrm{inv}(X^*, X) = 1\} \tag{10.2}$$

est surjective. Elle n'est pas injective : soit $X \in \Gamma_{X^*}(\mathfrak{g})$. Alors l'ensemble $\Gamma_{X^*}(\mathfrak{g})$ est en bijection naturelle avec $\mathcal{D}(T_X, G, F)$. Un élément de $\Gamma_{X^*}(\mathfrak{g})$ s'envoie sur la classe de $X$ par (10.2) si et seulement si il correspond à un élément de

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{D}(T_X, G, F) \to \mathcal{D}(T_X, G, \mathbb{A})) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Ker}^1(F, T_X) \to \mathrm{Ker}^1(F, G)).$$

En utilisant le fait que $\mathrm{Ker}^1(F, G)$ est en bijection naturelle avec $\mathrm{Ker}^1_{ab}(F, G)$ et que la cohomologie abélianisée reste insensible aux torsions intérieures, on voit que les fibres de (10.2) ont toutes même cardinal à savoir

$$d(X^*) = |\,\mathrm{Ker}(\mathrm{Ker}^1(F, T_{X^*}) \to \mathrm{Ker}^1(F, G^*))|.$$

L'expression (10.1) qui définit $I^G_X(f)$ vaut aussi pour tout $X \in \mathfrak{g}(\mathbb{A})$. Comme fonction de $X$, l'intégrale orbitale est invariante sous l'action de $G(\mathbb{A})$. Enfin si $X \in \Gamma_{X^*}(\mathfrak{g})$, on vérifie que $\tau(T_X) = \tau(T_{X^*})$.

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} J^G(f) &= \sum_{X^* \in \Sigma_{\mathrm{ell}}(\mathfrak{g}^*)} \tau(T_{X^*}) d(X^*) \sum_{\{X \in \Gamma_{X^*}(\mathfrak{g}(\mathbb{A})) \mid \mathrm{inv}(X^*, X) = 1\}} I^G_X(f) \\ &= \sum_{X^* \in \Sigma_{\mathrm{ell}}(\mathfrak{g}^*)} \frac{\tau(T_{X^*}) d(X^*)}{|\mathcal{E}(T_{X^*}, G^*, \mathbb{A}/F)|} \sum_{X \in \Gamma_{X^*}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))} \sum_{\kappa \in \mathcal{K}(T_{X^*}, G^*, F)} \langle \kappa, \mathrm{inv}(X^*, X) \rangle I^G_X(f) \end{aligned}$$

On utilise alors la suite exacte suivante ([5] proposition 1.8.4 p.42)

$$1 \to \mathrm{Ker}(\mathrm{Ker}^1(F, T_{X^*}) \to \mathrm{Ker}^1_{ab}(F, G^*)) \to \mathrm{Ker}^1(F, T_{X^*}) \to \mathrm{Ker}^1_{ab}(F, G^*) \to$$

$$\mathcal{E}(T_{X^*}, G^*, \mathbb{A}/F) \to H^1(\mathbb{A}/F, T_{X^*}) \to H^1_{ab}(\mathbb{A}/F, G^*) \to H^2(\mathbb{A}/F, T_{X^*,\mathrm{sc}}) \to 1.$$

Comme $T_{X^*,\mathrm{sc}}$ est elliptique, on voit en utilisant l'isomorphisme de Tate-Nakayama que $H^2(\mathbb{A}/F, T_{X^*,\mathrm{sc}}) = 1$. En utilisant la bijection naturelle entre $\mathrm{Ker}^1(F, G^*)$ et son abélisanisé, on en déduit que

$$\frac{\tau(T_{X^*}) d(X^*)}{|\mathcal{E}(T_{X^*}, G^*, \mathbb{A}/F)|} = \tau(G^*).$$

L'ensemble $\Gamma_{X^*}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$ est infini. Il existe un ensemble fini $S$ de places tel que $G$ soit défini sur $\mathfrak{o}^S$ (l'anneau des éléments de $F$ entiers hors de $S$) et que pour tous $X$ et $X'$ dans $\Gamma_{X^*}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$ tel que $I^G_X(f) \neq 0$, $X_v$ et $X'_v$ soient conjugués sous un élément de $G(\mathfrak{o}_v)$ pour $v \notin S$ (cf. [9] lemme 7.2). Il en résulte que l'ensemble

$$\{X \in \Gamma_{X^*}(\mathfrak{g}(\mathbb{A})) \mid I^G_X(f) \neq 0\}$$

est fini et on peut intervertir l'ordre de sommation entre $X$ et $\kappa$ dans la somme précédente. On trouve alors

$$J^G(f) = \tau(G^*) \sum_{X^* \in \Sigma_{\mathrm{ell}}(\mathfrak{g}^*)} \sum_{\kappa \in \mathcal{K}(T_{X^*}, G^*, F)} I^{G,\kappa}_{X^*}(f) \tag{10.3}$$

où l'on a posé

$$I_{X^*}^{G,\kappa}(f) = \sum_{X \in \Gamma_{X^*}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))} \langle \kappa, \mathrm{inv}(X^*, X) \rangle I_X^G(f)$$

**10.6.** Dans ce paragraphe $F$ est local ou global.

Partons d'un triplet endoscopique $(H, \kappa, \xi)$ et de $Y \in \mathfrak{h}_{G-\mathrm{reg}}(F)$. Alors il existe $X^* \in \Sigma(\mathfrak{g}^*)$ tel que $Y \to X^*$. On a expliqué au paragraphe §4.4 comment on définissait un élément $\kappa_Y \in \mathcal{K}(T_{X^*}, G^*, F)$. Énonçons le lemme suivant.

**Lemme 10.3**. — *Pour tous $X^* \in \Sigma_{\mathrm{ell}}(\mathfrak{g}^*)$ et $\kappa \in \mathcal{K}(T_{X^*}, G^*, F)$, il existe un triplet endoscopique elliptique $(H, \kappa, \xi)$ et $Y \in \Sigma(\mathfrak{h})$ tel que $Y \to X^*$ et $\kappa_Y = \kappa$.*
*Deux telles données $(H, \kappa, \xi, Y)$ et $(H', \kappa', \xi', Y')$ sont équivalentes comme donnée endoscopique de $G$ par un isomorphisme qui envoie $Y$ sur $Y'$. Un tel isomophisme est unique à un automorphisme intérieur près.*

**Démonstration.** — On ne traite que la partie existence (on trouve une preuve complète dans [3] lemme 9.7). Soit $X^* \in \mathfrak{g}^*_{\mathrm{ell}}(F)$. Posons $T = T_{X^*}$. Soit $\kappa \in \mathcal{K}(T_{X^*}, G^*, F)$. En particulier, $\kappa$ définit un caractère de $H^1(C_F, T_{\mathrm{sc}})$. Fixons $E$ une extension galoisienne finie de $F$ qui déploie $T$. La dualité de Tate-Nakayama identifie $H^1(C_F, T_{\mathrm{sc}})$ à $\hat{H}^{-1}(E/F, X_*(T_{\mathrm{sc}}))$ mais comme $X_*(T_{\mathrm{sc}})^\Gamma = 1$ par ellipticité de $T$ on a aussi

$$H^1(C_F, T_{\mathrm{sc}}) \simeq H_0(E/F, X_*(T_{\mathrm{sc}}))$$

donc on peut voir $\kappa$ comme un caractère de $H_0(E/F, X_*(T_{\mathrm{sc}}))$. La donnée radicielle

$$(X^*(T_G), R_\kappa, X_*(T_G), R_\kappa^\vee)$$

est stable par $\Gamma$. De plus, l'action de $\Gamma$ envoie une base sur une base. Cette donnée radicielle est donc la donnée radicielle d'un groupe $H$. On complète aisément ces données en un triplet $(H, \kappa, \xi)$ endoscopique. Le tore $T$ s'identifie à un sous-tore de $H$ et cette identification envoie $X^*$ sur un élément $Y \in \mathfrak{h}(F)$ qui est $G$-régulier. Cela construit le quadruplet $(H, \kappa, \xi, Y)$. □

**10.7. Normalisation des facteurs de transfert.** Soit $F$ un corps global. Soit $(H, \kappa, \xi)$ une donnée endoscopique de $G$. Soit $V$ l'ensemble des places de $F$. De manière évidente, on en déduit une donnée endoscopique locale $(H_v, \kappa, \xi)$ de $G_v$ pour toute place $v \in V$ : on a noté $G_v$ le groupe sur $F_v$, le complété de $F$ en $v$, obtenu par extension des scalaires.

Soit $Y_i \in \mathfrak{h}_{G-\mathrm{reg}}(F)$ et $X_i^* \in \mathfrak{g}^*_{\mathrm{reg}}(F)$ tels que $Y_i \to X_i^*$ pour $i = 1, 2$. Supposons que $\Gamma_{X_i^*}(\mathfrak{g}(\mathbb{A})) \neq \emptyset$. Soit $X_i \in \Gamma_{X_i^*}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$.

En chaque place $v$, on a un facteur de transfert relatif noté $\Delta_{G_v, H_v}$ ou simplement $\Delta_v$ (cf. section 7). On vérifie alors la formule suivante (cf. [7] section 6)

$$\langle \kappa_{Y_1}, \mathrm{inv}(X_1^*, X_1) \rangle \langle \kappa_{Y_2}, \mathrm{inv}(X_2^*, X_2) \rangle^{-1} = \prod_{v \in V} \Delta_v(Y_1, X_1, Y_2, X_2)$$

où pour presque tout $v$

$$\Delta_v(Y_1, X_1, Y_2, X_2) = 1.$$

On normalise alors le facteur de transfert en prenant $(Y, X_{2,v})$ pour point base. On impose que
– pour presque tout $v$, $\Delta_v(Y, X_{2,v}) = 1$ ;
– $\prod_{v \in V} \Delta_v(Y_2, X_2) = \langle \kappa_{Y_2}, \mathrm{inv}(X_2^*, X_2) \rangle$.

Une fois le facteur de transfert ainsi normalisé, les deux formules ci-dessus valent pour *tous* $Y \in \mathfrak{h}_{G-\mathrm{reg}}(F)$, $X^* \in \mathfrak{g}^*_{\mathrm{reg}}(F)$ et $X \in \Gamma_{X^*}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$ tels que $Y \to X^*$.

**10.8.** Reprenons les notations de la fin du paragraphe 10.5. Soit $X^* \in \Sigma_{\mathrm{ell}}(\mathfrak{g}^*)$ et $\kappa \in \mathcal{K}(T_{X^*}, G^*, F)$. Soit $(H, \kappa, \xi)$ une donnée endoscopique et $Y \in \mathfrak{h}_{G-\mathrm{reg}}(F)$ tels que $Y \to X^*$ et $\kappa_Y = \kappa$ (cf. lemme

10.3). Supposons $f=\otimes_{v\in V} f_v$. En utilisant la normalisation des facteurs de transfert ci-dessus on voit que

$$I_{X^*}^{G,\kappa}(f)=\prod_{v\in V} I_Y^{G_v,H_v}(f_v)$$

où pour presque tout $v\in V$

$$I_Y^{G_v,H_v}(f_v)=1$$

(cf. [9] section 7 et §10.2). Ici il convient d'établir des relations de compatibilité entre les mesures de Haar locales et globales. Nous n'en parlerons pas.

# 11 Le résultat de Waldspurger

**11.1.** Soit $F$ un corps global et $u$ une place finie de $F$. Soit $(H,\kappa,\xi)$ une donnée endoscopique. On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

1. $F$ est totalement imaginaire ;
2. pour tout $v\in V$, il existe $Y\in\mathfrak{h}_{G-\mathrm{reg}}(F_v)$ et $X\in\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F_v)$ tel que $Y\to X$ ;
3. $u$ est inerte dans $F[H]$, la plus petite extension sur laquelle $H$ se déploie ;
4. la donnée $(H_u,\kappa,\xi)$ est elliptique.

Voici le théorème que démontre Waldspurger dans [9].

**Théorème 11.1.** — *Soit $w$ une place finie de $V$ distincte de $u$. Alors le théorème 8.4 vaut pour la paire $(G_w,H_w)$.*

De là, par des arguments de globalisation ou de descente, on montre que le théorème 8.4 vaut en toute généralité (cf. sections 4,5,6 et 11 de [9]). Notons que pour démontrer le théorème 11.1, on a besoin de connaître le lemme fondamental (théorème 8.2) pour presque toute paire $(G_v,H_v)$.

**11.2.** On fixe $w\neq u$ une place finie de $F$. Soit

$$\langle\ ,\ \rangle\ :\ \mathfrak{g}(F)\times\mathfrak{g}(F)\to\mathbb{C}$$

une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et invariante par l'action de $G(F)$. Soit

$$\psi\ :\ \mathbb{A}_F/F\to\mathbb{C}^\times$$

un caractère continu et non trivial. Comme au paragraphe 8.8, on en déduit une forme analogue sur $\mathfrak{h}(F)$.

On fixe deux $\mathcal{O}_F$-réseaux $a\subset\mathfrak{g}(F)$ et $b\subset\mathfrak{h}(F)$. On en déduit des $\mathcal{O}_{F_v}$ réseaux $a_v\subset\mathfrak{g}(F)$ et $b_v\subset\mathfrak{h}(F)$. Il existe un ensemble fini de places $S_1$ qui contient les places archimédiennes, les places $u$ et $w$ et tels que pour tout $v\notin S_1$ les réseaux $a_v$ et $b_v$ sont hyperspéciaux et autoduaux pour les bicaractères $\psi(\langle\cdot,\cdot\rangle)$.

**11.3.** L'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques de $G^*$ (forme intérieure quasi-déployée de $G$) qui sont non ramifiées en dehors de $S_1$ est fini (cf. [6] lemme 8.12). Fixons un ensemble $\mathcal{H}$ de représentants de ces classes. Comme $H$ est non ramifiée hors $S_1$, on peut et on va supposer que $(H,\kappa,\xi)\in\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{H}'\subset\mathcal{H}$ le sous-ensemble formé des données $(H',\kappa',\xi')$ telles que $F[H']\not\subset F[H]$ (c'est-à-dire telles que $H'$ n'est pas déployé sur $F[H]$). Soit $v=v_{(H',\kappa',\xi')}\in V-S_1$ tel que le Frobenius associé à $v$ dans $\mathrm{Gal}(F[H]F[H']/F)$ fixe $F[H]$ mais pas $F[H']$. Dans ce cas $H_v$ est déployé alors que $H'_v$ ne l'est pas. Soit

$$S_2=\{v_{(H',\kappa',\xi')}\text{ pour }(H',\kappa',\xi')\in\mathcal{H}'\}.$$

On pose

$$S=S_1\cup S_2$$

.

**11.4.** On veut prouver qu'il existe une constante $c \neq 0$ qui vérifie l'assertions suivante. Pour tout $f_w \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F_w))$ et tout $f_w^H \in C_c^\infty(\mathfrak{h}(F_w))$ qui est un transfert de $f_w$ (c'est-à-dire $f_w^H$ vérifie la conclusion du théorème 8.1), pour tout $Y_w \in \Sigma_G(\mathfrak{h})$ on a l'égalité

$$c\, \hat{I}_{Y_w}^{G_w,H_w}(f) = \hat{S}_{Y_w}^{H_w}(f_w^H). \tag{11.1}$$

On verra d'ailleurs que $c = \prod_{v\in S-V_\infty, v\neq w} c_v^{-1}$ où la constante $c_v$ est introduite à l'assertion 7 de la proposition 11.2.

Soit $Y_w \in \mathfrak{h}_{G-\mathrm{reg}}(F_w)$. On fixe un sous-ensemble ouvert compact $\Omega_w$ inclus dans $\mathfrak{h}_{G-\mathrm{reg}}(F_w)$ tel que $Y_w \in \Omega_w$ et que les deux membres de l'égalité à prouver soient constants sur $\Omega_w$.

**11.5.** Soit $V_\infty$ l'ensemble des places archimédiennes. Pour tout $v \in S - V_\infty$ et $v \neq w$, on fixe un sous-ensemble ouvert compact $\Omega_v$ inclus dans $\mathfrak{h}_{G-\mathrm{reg}}(F_v)$ tel que

1. tout point de $\Omega_v$ est l'image d'un élément de $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F_v)$ (c'est possible par la condition 2 du paragraphe 11.1) ;
2. si $v \in S_2$ tout point de $\Omega_v$ a pour centralisateur un tore déployé (c'est possible puisque pour $v \in S_2$ on a vu ci-dessus que $H_v$ était déployé) ;
3. tout point de $\Omega_u$ est elliptique (c'est compatible avec la condition 1 par la condition 4 du paragraphe 11.1 et le lemme 4.6) ;

**11.6.** Pour tout sous-tore maximal $T$ défini sur $F$ de $G^*$, on a une application naturelle

$$\mathcal{E}(T, G^*, F_v) \to \mathcal{E}(T, G^*, \mathbb{A}_F/F)$$

et donc une application duale

$$\mathcal{K}(T, G^*, \mathbb{A}_F/F) \to \mathcal{K}(T, G^*, F_v)$$

notée $\kappa \mapsto \kappa_v$.

**11.7.** Soit $Y_0 \in \mathfrak{h}(F)$ tel que

1. pour tout $v \in S - V_\infty$, on ait $Y_0 \in \Omega_v$ ;
2. pour tout $v \in V - S$, on ait $Y_0 \in b_v$.

L'approximation forte assure l'existence de $Y_0$. Soit $X_0^* \in \mathfrak{g}^*_{\mathrm{reg}}(F)$ tel que $Y_0 \to X_0^*$. On vérifie que $X_0^*$ est semi-simple régulier et elliptique. Soit $\mathcal{Y} \subset \Sigma_G(\mathfrak{h})$ le sous-ensemble (fini) des $Y$ tels que $Y \to X_0^*$ qu'on identifie à un système de représentants. On suppose bien sûr que $Y_0 \in \mathcal{Y}$. On a expliqué (cf. fin du paragraphe 4.4) comment tout élément de $\mathcal{Y}$ définit un élément $\kappa_Y \in \mathcal{K}(T_{X_0^*}, G^*, F)$. On pose

$$\kappa_0 = \kappa_{Y_0}$$

et

$$\mathcal{Y}_0 = \{Y \in \mathcal{Y} \mid \kappa_Y = \kappa_0\}.$$

**11.8. Choix de fonctions hors $S$.** — Pour tout $v \notin S$, soit $f_v$, resp. $f_v^H$, la fonction caractéristique de $a_v$, resp. $b_v$. Soit $c_v \neq 0$ la constante donnée par le théorème 8.2.

**11.9. Constructions de fonctions aux places finies.** — Soit $v \in S$ une place finie, distincte de $w$. Soit $X^* \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F_v)$. Posons

$$\mathfrak{g}(X^*, F) = \chi_G^{-1}(\chi_{G^*}(X^*)) \cap \mathfrak{g}(F)$$

Soit $\kappa \in \mathcal{K}(T_{X^*}, G^*, F_v)$. On appelle $\kappa$-fonction au-dessus de $X^*$ une fonction $\theta$ de $\mathfrak{g}(X^*, F)$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie

– $\theta$ est invariante par $G(F)$ ;

– pour $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}(X^*, F)$, on a

$$\theta(X_1) = \theta(X_2)\langle \kappa_Y, \mathrm{inv}(X^*; X_1, X_2)\rangle$$

Pour une telle fonction $\theta$ et $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F_v))$, on pose

$$I^\theta_{X^*}(f) = \sum_X \theta(X) I_X(f)$$

où la somme est prise sur $X \in \mathfrak{g}(X^*, F)$ modulo conjugaison. Lorsque $\theta = \Delta(Y, \cdot)$ (cf. l.(7.2) du §7.4) pour $Y \in \mathfrak{h}(F)$ tel que $Y \to X^*$, on a

$$I^\theta_{X^*}(f) = I^{G,H}_Y(f).$$

Lorsque $G = G^*$ et $\varphi$ est l'identité, on peut prendre $\theta = \mathrm{inv}(X^*; \cdot, X^*)$ et on pose alors

$$I^\kappa_{X^*}(f) = I^\theta_{X^*}(f).$$

Venons-en à la construction suivante due à Waldspurger (cf. [9] proposition 8.2). Les notations non rappelées sont celles des paragraphes précédents.

**Proposition 11.2.** — *Il existe des fonctions $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F_v))$ et $f^H \in C_c^\infty(\mathfrak{h}_{G-\mathrm{reg}}(F_v))$ telles que*

1. *Si $X \in \mathrm{supp}(f)$, resp. $Y \in \mathrm{supp}(f^H)$, il existe $X' \in \mathfrak{t}_{X_0^*}(F_v)$ tel que $\chi_{G^*}(X') = \chi_G(X)$, resp. tel que $Y \to X'$ ;*
2. *$f^H$ est un transfert de $f$ ;*
3. *soit $Z \in \mathfrak{g}^*_{\mathrm{reg}}(F_v)$ et $\tau \in \mathcal{K}(T_Z, G^*, F_v)$. Supposons qu'il n'existe pas de $g \in G^*$ tel que la conjugaison par $g$ induise un $F_v$-isomorphisme entre $(T_{X_0^*}, \kappa_0)$ et $(T_Z, \tau)$. Alors pour toute $\tau$-fonction $\theta$ au-dessus de $Z$, on a*
$$I^\theta_Z(f) = 0 \;;$$
4. *Soit $Y \in \mathfrak{h}_{G^*-\mathrm{reg}}(F_v)$ et $\tau \in \mathcal{K}(T_Y, H, F_v)$. Si $\tau \neq 1$ alors*
$$I^\tau_Y(f^H) = 0 \;;$$
5. *soit $\tau \in \mathcal{K}(T_{X_0^*}, G^*, F_v)$ et $\theta$ une $\tau$-fonction au dessus de $X_0^*$ non nulle. Alors pour $\tau \neq \kappa_0$ on a*
$$I^\tau_{X_0^*}(\hat{f}) = 0.$$
*De plus, on a*
$$I^{\kappa_0}_{X_0^*}(\hat{f}) \neq 0 \;;$$
6. *Soit $Y \in \mathcal{Y}$ et $\tau \in \mathcal{K}(T_Y, H, F_v)$. Alors*
$$J^\tau_Y(\hat{f}^H) = 0$$
*dès que $Y \notin \mathcal{Y}_0$ ou $\tau \neq 1$. De plus,*
$$I^{G_v,H_v}_Y(\hat{f}) = 0$$
*si $Y \notin \mathcal{Y}_0$ ;*
7. *Il existe une constante $c_v \neq 0$ qui ne dépend que des données $(G_v, H_v, \psi_v, \langle,\rangle)$ telle que pour tout $Y \in \mathcal{Y}_0$*
$$S^{H_v}_Y(\hat{f}^H) = c_v\, I^{G_v,H_v}_Y(\hat{f}) \neq 0.$$

Il n'est pas question ici de donner la construction élaborée de ces fonctions. En revanche, le lecteur pourra vérifier de lui-même qu'il est facile de construire des paires de fonctions qui vérifient les conditions 1 à 4 ci-dessus. Les conditions 5 à 7 sont bien plus difficiles à satisfaire. Leurs constructions reposent sur une expression explicite à "l'infini" des fonctions $\hat{i}^G$ du théorème. Plus précisément, soit $X, Z \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F_v)$. Waldspurger montre qu'il existe un entier naturel $N$ tel que pour tout $\lambda \in F_v^\times$ tel que $v(\lambda) < -N$, la quantité $\hat{i}^G(\lambda X, Z)$ admette une expression explicite (cf. proposition VIII.1 de [8]).

**11.10.** Pour tout $v \in S$ une place finie, distincte de $w$, soient $f_v \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F_v))$ et $f_v^H \in C_c^\infty(\mathfrak{h}_{G-\mathrm{reg}}(F_v))$ des fonctions qui satisfont les conclusions de la proposition 11.2.

**11.11.** Soit $v \in V_\infty$ une place archimédienne. On rappelle qu'on suppose que $F_v \simeq \mathbb{C}$. Soit $f_v \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}(F_v))$ une fonction arbitraire. Soit $f_v^H \in \mathcal{S}(\mathfrak{h}(F_v))$ un transfert de $f$ (cf. théorème 9.2).

**11.12.** Posons $f = \otimes_{v\in V} f_v$ et $f^H = \otimes f_v^H$. Soit $\mathrm{Out}_G(H)$ le groupe des automorphismes de la donnée $(H, \kappa, \xi)$ modulo le groupe des automorphismes intérieurs. C'est un groupe fini. la proposition suivante est la proposition 10.9 de [9]. Posons

$$c^S = \prod_{v\notin S} c_v$$

où $c_v$ est définie au §11.8.

**Proposition 11.3**. — *On a l'égalité*

$$J^H(f^H) = |\,\mathrm{Out}_G(H)| c^S \tau(H)\tau(G^*)^{-1} J^G(f).$$

**Démonstration.** — Partons de la ligne (10.3) du paragraphe 10.5. On a donc

$$J^G(f) = \tau(G^*) \sum_{X^*\in\Sigma_{\mathrm{ell}}(\mathfrak{g}^*)} \sum_{\kappa\in\mathcal{K}(T_{X^*},G^*,F)} I_{X^*}^{G,\kappa}(f).$$

Soit $X^* \in \Sigma_{\mathrm{ell}}(\mathfrak{g}^*)$ et $\kappa \in \mathcal{K}(T_{X^*}, G^*, F)$. Soit $(H', \kappa', \xi'$ la donnée endoscopique elliptique de $G^*$ et $Y \in \Sigma(\mathfrak{h}')$ tel que $Y \to X^*$ et $\kappa_Y = \kappa$ (cf. lemme 10.3). On a donc (cf. §10.8)

$$I_{X^*}^{G,\kappa}(f) = \prod_{v\in V} I_Y^{G_v,H'_v}(f_v)$$

(comme d'habitude dans les produits infinis que nous considérons presque tous les facteurs sont égaux à 1.) Dans la suite, on suppose que

$$I_{X^*}^{G,\kappa}(f) \neq 0.$$

Cela implique que pour tout $v \notin S$ on $I_Y^{G_v,H'_v}(f_v) \neq 0$. Or $f_v$ est une fonction caractéristique d'un réseau hyperspécial. On en déduit que $H'_v$ est non-ramifié (il s'agit d'une version d'un lemme dû à Kottwitz, cf. [9] lemme 7.4). Par ailleurs pour $v \in S_2$, on sait que $I_Y^{G_v,H'_v}(f_v) \neq 0$ implique que le centralisateur de $Y$ est déployé (par la condition 1 de la proposition 11.2 et la condition 2 du §11.5). Donc $H$ est non ramifié hors de $S_1$.

On peut donc supposer que $(H', \kappa', \xi') \in \mathcal{H}$. Si $(H', \kappa', \xi') \in \mathcal{H}'$, pour $v = v_{(H',\kappa',\xi')}$, on a $I_Y^{G_v,H'_v}(f_v) \neq 0$ et donc comme ci-dessus $H'_v$ est déployé : contradiction. Donc $F[H'] \subset F[H]$.

On utilise maintenant la place $u$. Par la condition 3 de la proposition 11.2 et le lemme 10.3, on voit que les données $(H_u, \kappa, \xi)$ et $(H'_u, , \kappa', \xi')$ sont équivalentes sur $F_u$. En utilisant la condition 3 du paragraphe 11.1, on montre que cet isomorphisme se prolonge en un $F$-isomorphisme.

Soit $\Sigma_G(\mathfrak{h})(X^*, \kappa)$ le sous-ensemble de $\Sigma_G(\mathfrak{h})$ formé des $Y$ tels que $Y \to X^*$ et $\kappa_Y = \kappa$. Alors lorsque $\Sigma_G(\mathfrak{h})(X^*, \kappa)$ est non vide il est de cardinal $|\,\mathrm{Out}_G(H)|$ (cf. lemme 10.3).

On en déduit que

$$J^G(f) = |\operatorname{Out}_G(H)|^{-1} \sum_{X^* \in \Sigma_{\mathrm{ell}}(\mathfrak{g}^*)} \sum_{\kappa \in \mathcal{K}(T_{X^*}, G^*, F)} \sum_{Y \in \Sigma_G(\mathfrak{h})(X^*, \kappa)} \prod_{v \in V} I_Y^{G_v, H_v}(f_v)$$

On va faire un calcul analogue pour le groupe $H$. Il résulte du fait que le support de $f_u^H$ est dans les éléments $G$-réguliers que l'on peut écrire

$$J^G(f) = \tau(H) \sum_{Y \in \Sigma_{G,\mathrm{ell}}(\mathfrak{h})} \sum_{\kappa \in \mathcal{K}(T_Y, H, F)} I_Y^{H,\kappa}(f^H).$$

Soit $Y \in \Sigma_{G,\mathrm{ell}}(\mathfrak{h})$ et $\kappa \in \mathcal{K}(T_Y, H, F)$. On a défini au §11.6 des éléments $\kappa_v \in \mathcal{K}(T_Y, H, F_v)$ pour toute place $v$. On vérifie que

$$I_Y^{H,\kappa}(f^H) = \prod_{v \in V} I_Y^{H,\kappa_v}(f_v^H).$$

Donc si ce produit n'est pas nul, en particulier $I_Y^{H,\kappa_u}(f_u^H)$ ne l'est pas non plus ce qui force $\kappa_u = 1$ (cf. condition 4 de la proposition 11.2.) Comme $T_Y$ est $F$-elliptique et même $F_u$-elliptiques (cela résulte de la construction de $f_u$ et de la condition 3 du §11.5), on voit facilement (avec la dualité de Tate-Nakayama par exemple) que l'application

$$\mathcal{K}(T_Y, H, \mathbb{A}_F/F) \to \mathcal{K}(T_Y, H, F_u)$$

est injective. Par conséquent, on a $\kappa = 1$. On en déduit immédiatement que

$$J^H(f^H) = \tau(H) \sum_{Y \in \Sigma_{G,\mathrm{ell}}(\mathfrak{h})} \prod_{v \in V} S_Y^{H_v}(f_v^H)$$

En utilisant les propriétés de transfert entre les fonctions $f_v$ et $f_v^H$ et en particulier le lemme fondamental, on écrit

$$J^H(f^H) = \tau(H)\, c^S \sum_{Y \in \Sigma_{G,\mathrm{ell}}(\mathfrak{h})} \prod_{v \in V} I^{G_v, H_v}(Y, f_v).$$

Il suffit d'utiliser le fait que $\Sigma_{G,\mathrm{ell}}(\mathfrak{h})$ est la réunion disjointe des $\Sigma_{G,\mathrm{ell}}(\mathfrak{h})(X^*, \kappa)$ lorsque $X^* \in \Sigma_{\mathrm{ell}}(\mathfrak{g}^*)$ et $\kappa \in \mathcal{K}(T_{X^*}, G^*, F)$ pour conclure.

□

**11.13. Raffinement des conditions aux places archimédiennes.** — On peut supposer de plus (cf. [9] lemme 10.7) que les fonctions archimédiennes sont choisies de sorte qu'on ait

1. pour tout $v \in V_\infty$,
$$I_{\varphi_v^{-1}(X_0^*)}(\hat{f}_v) \neq 0 \;;$$
2. soit $X \in \mathfrak{g}^*(F)$. Si en toute place $v$, $\varphi_v^{-1}(X_v)$ est conjugué par un élément de $G(\bar{F}_v)$ à un élément du support de $\hat{f}_v$, alors $X$ est stablement conjugué à $X_0^*$ ;
3. soit $Y \in \mathfrak{h}(F)$. Si en toute place $v$, $Y$ est conjugué par un élément de $H(\bar{F}_v)$ à un élément du support de $\hat{f}_v^H$, alors $Y \to X_0^*$ ;

Bien sûr, on continue de supposer que $f^H$ est un transfert de $f$ donc $\hat{f}^H$ est un transfert de $\hat{f}$ (cf.théorème 9.2).

**11.14. Utilisation de la formule sommatoire de Poisson.** — Celle-ci se traduit par l'identité suivante : pour tout $x \in G(\mathbb{A})$

$$\sum_{X \in \mathfrak{g}(F)} f(\operatorname{Ad}(x)^{-1}X) = \sum_{X \in \mathfrak{g}(F)} \hat{f}(\operatorname{Ad}(x)^{-1}X).$$

D'après la forme du support de $f_u$, on voit que la somme de gauche porte effectivement sur les $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{ell}}(F)$. Vu les considérations du paragraphe précédent, la somme de droite porte elle aussi uniquement sur les $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{ell}}(F)$. Par intégration sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$ (cf. théorème 10.1), on obtient l'égalité

$$J^G(f) = J^G(\hat{f}). \tag{11.2}$$

Le même raisonnement donne aussi

$$J^H(f^H) = J^H(\hat{f}^H). \tag{11.3}$$

**11.15. Calcul de $J^G(\hat{f})$.** — On a le lemme suivant.

**Lemme 11.4**. — *On a l'égalité*

$$J^G(\hat{f}) = \tau(G^*) I_{X_0^*}^{\kappa_0}(\hat{f}).$$

**Démonstration.** — On utilise la pré-stabilisation de $J^G(\hat{f})$. Comme on a plus la condition 2 du paragraphe 11.13, on aboutit à

$$J^G(\hat{f}) = \tau(G^*) \sum_{\kappa \in \mathcal{K}(T_{X_0^*}, G^*, F)} I_{X_0^*}^{\kappa}(\hat{f}).$$

Soit $\kappa \in \mathcal{K}(T_{X_0^*}, G^*, F)$ tel que $I_{X_0^*}^{\kappa}(\hat{f}) \neq 0$. Soit $(H', \kappa', \xi)$ et $Y \in \mathfrak{h}'_{G-\mathrm{reg}}(F)$ tel que $Y \to X_0^*$ et $\kappa'_Y = \kappa$ (cf. lemme 10.3). On a donc

$$I_{X_0^*}^{\kappa}(\hat{f}) = \prod_{v \in V} I_Y^{G_v, H'_v}(\hat{f}_v).$$

Or puisque $I_Y^{G_u, H'_u}(\hat{f}_u) \neq 0$, on voit d'après la condition 5 de la proposition 11.2 que $\kappa_{0,u} = \kappa_u$. Comme le tore $T_{X_0^*}$ est $F$-elliptique et $F_v$-elliptique, on sait (voir plus haut) que l'application de localisation des caractères endoscopiques est injective. Par conséquent, on a

$$\kappa_0 = \kappa$$

ce qu'il fallait démontrer. □

**11.16. Calcul de $J^H(\hat{f}^H)$.** — On a le lemme suivant.

**Lemme 11.5**. — *On a l'égalité*

$$J^H(\hat{f}^H) = \tau(H) \sum_{Y \in \mathcal{Y}_0} \prod_{v \in V} S_Y^{H_v}(\hat{f}_v^H).$$

**Démonstration.** — On utilise la pré-stabilisation de $J^H(\hat{f}^H)$. Celle-ci se traduit par l'égalité

$$J^H(\hat{f}^H) = \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \sum_{\kappa \in \mathcal{K}(T_Y, H, F)} I_Y^{\kappa}(\hat{f}^H).$$

Soit $Y \in \mathcal{Y}$ et $\kappa \in \mathcal{K}(T_Y, H, F)$ tels que $I_Y^{\kappa}(\hat{f}^H) \neq 0$. On a

$$I_Y^{\kappa}(\hat{f}^H) = \prod_{v \in V} I_Y^{\kappa_{Y,v}}(\hat{f}_v^H).$$

Il résulte de la condition 6 de la proposition 11.2 que $Y \in \mathcal{Y}_0$ et $\kappa_u = 1$. D'où toujours par le même argument d'injectivité $\kappa = 1$. Le produit ci-dessus est donc composé d'intégrales orbitales stables. □

**11.17. Conclusion.** — Il résulte des lemmes 11.4 et 11.5 ci-dessus, de la proposition 11.3 et des égalités (11.2) et (11.3) qu'on a l'égalité

$$\sum_{Y\in\mathcal{Y}_0}\prod_{v\in V} S_Y^{H_v}(\hat{f}_v^H) = c^S|\operatorname{Out}_G(H)|I_{X_0^*}^{\kappa_0}(\hat{f}) \tag{11.4}$$

Posons

$$c^w = \prod_{v\in V-V_\infty, v\neq w} c_s.$$

En utilisant le lemme fondamental, les propriétés des fonctions $f_v$ aux places finies $v\in S$ distinctes de $w$ (propriété 7 de la proposition 11.2) et les propriétés de $f_v$ aux places archimédiennes, on obtient que pour tout $Y\in\mathcal{Y}_0$

$$\prod_{v\in V} S_Y^{H_v}(\hat{f}_v^H) = c^w S_Y^{H_w}(\hat{f}_w^H)\prod_{v\in V, v\neq w} I_Y^{G_v,H_v}(\hat{f}_v).$$

Soit $v\in V$, $v\neq w$. Soit $X\in\mathfrak{g}(F_v)$ tel $Y\to X_0$. Il revient au même de demander que $X$ et $X_0^*$ ont même image dans $\mathfrak{c}$. En particulier, la condition précédente ne dépend pas du choix de $Y\in\mathcal{Y}_0$. Alors pour tout $X\in\mathfrak{g}(F_v)$ tel que $Y\to X$, on a (cf. l.7.2 du 7.4)

$$\begin{aligned}\Delta_v(Y,X) &= \Delta_v(Y,X_0)\langle\kappa_{Y,v},\operatorname{inv}(X^*;X,X_0)\rangle\\ &= \Delta_v(Y,X_0)\langle\kappa_{0,v},\operatorname{inv}(X^*;X,X_0)\rangle\\ &= \frac{\Delta_v(Y,X_0)}{\Delta_v(Y_0,X_0)}\Delta_v(Y_0,X)\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$I_Y^{G_v,H_v}(\hat{f}_v) = \frac{\Delta_v(Y,X_0)}{\Delta_v(Y_0,X_0)} I_{Y_0}^{G_v,H_v}(\hat{f}_v).$$

En utilisant la formule du produit pour les facteurs de transfert (cf. §10.7), on aboutit à

$$\prod_{v\in V, v\neq w} I_Y^{G_v,H_v}(\hat{f}_v) = \frac{\Delta_w(Y_0,X_0)}{\Delta_w(Y,X_0)}\prod_{v\in V, v\neq w} I_{Y_0}^{G_v,H_v}(\hat{f}_v)$$

**Lemme 11.6**. — *Pour $Y\in\mathcal{Y}_0$, on a l'égalité*

$$S_{Y_0}^{H_w}(\hat{f}_w^H) = \frac{\Delta_w(Y_0,X_0)}{\Delta_w(Y,X_0)} S_Y^{H_w}(\hat{f}_w^H)$$

**Démonstration.** — Esquissons une démonstration (pour plus de détails, cf. section 3 de [9]). Puisque $\kappa_Y = \kappa_{Y_0}$, il existe un automorphisme $i$ de $(H,\kappa,\xi)$ qui envoie $Y_0$ sur $Y$ (cf. lemme 10.3). On démontre (cf. lemme 2.4 de [9]) qu'il existe une constante $\delta\neq 0$ tel que pour tout $Z\in\mathfrak{h}_{G-\mathrm{reg}}(F_w)$ et tout $X\in\mathfrak{g}(F_w)$ tel que $Z\to X$ on ait

$$\Delta_w(i(Z),X) = \delta\Delta_w(Z,X). \tag{11.5}$$

En particulier, comme $f_w^H$ est par définition un transfert de $f$, on obtient : pour tout $Z\in\mathfrak{h}_{G-\mathrm{reg}}(F_w)$

$$S_{i(Z)}^{H_w}(f_w^H) = \delta S_Z^{H_w}(f_w^H).$$

On remarque ensuite que l'isomorphisme $i$ préserve la forme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $\mathfrak{h}(F_w)$. On en déduit qu'elle préserve aussi les fonctions $\hat{\imath}^{H_w}$. En utilisant le théorème 6.3, on aboutit à l'égalité

$$S_{i(Z)}^{H_w}(\hat{f}_w^H) = \delta S_Z^{H_w}(\hat{f}_w^H).$$

pour tout $Z \in \mathfrak{h}_{G-\mathrm{reg}}(F_w)$. Pour conclure, il suffit d'évaluer $\delta$ (prendre $(Z,X) = (Y_0, X_0)$ dans (11.5). $\square$

En utilisant le lemme précédent, on a donc

$$\prod_{v\in V} S_Y^{H_v}(\hat{f}_v^H) = c^w S_{Y_0}^{H_w}(\hat{f}_w^H) \prod_{v\in V, v\neq w} I_{Y_0}^{G_v,H_v}(\hat{f}_v).$$

En particulier, ce produit ne dépend pas de $Y_0$. L'égalité (11.4) devient

$$c^w S_{Y_0}^{H_w}(\hat{f}_w^H) \prod_{v\in V, v\neq w} I_{Y_0}^{G_v,H_v}(\hat{f}_v) = c^S I_{X_0^*}^{\kappa_0}(\hat{f}).$$

Comme on a aussi

$$I_{X_0^*}^{\kappa_0}(\hat{f}) = \prod_{v\in V} I_{Y_0}^{G_v,H_v}(\hat{f}_v)$$

on en déduit que

$$\left(c^w S_{Y_0}^{H_w}(\hat{f}_w^H) - c^S I_{Y_0}^{G_w,H_w}(\hat{f}_w)\right) \prod_{v\in V, v\neq w} I_{Y_0}^{G_v,H_v}(\hat{f}_v) = 0.$$

On a tout fait pour que le second facteur soit non nul on a donc

$$c^w S_{Y_0}^{H_w}(\hat{f}_w^H) = c^S I_{Y_0}^{G_w,H_w}(\hat{f}_w)$$

et cette égalité est vraie aussi en $Y_w$ (cf. le choix de $\Omega_w$ au §11.4) d'où (11.1).

# Références


[1] A. Bouaziz. Intégrales orbitales sur les algèbres de lie réductives. *Invent. math.*, 115 :163–207, 1994.

[2] Harish-Chandra. *Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups. Notes by S. DeBacker and P.J. Sally Jr*, volume 16 of *Univ. Lect. Series.* Amer. Math. Soc., 1999.

[3] R. Kottwitz. Stable trace formula : elliptic singular terms. *Math. Ann.*, 275 :365–399, 1986.

[4] R. Kottwitz. Transfer factors for Lie algebras. *Represent. Theory*, 3 :127–138 (electronic), 1999.

[5] J.-P. Labesse. Cohomologie, stabilisation et changement de base. *Astérisque*, (257) :vi+161, 1999. Appendice A par L. Clozel et J.-P. Labesse, et Appendice B par L. Breen.

[6] R. Langlands. *Les débuts d'une formule des traces stable*, volume 13 of *Publications Mathématiques de l'Université Paris VII.* Université de Paris VII U.E.R. de Mathématiques, Paris, 1983.

[7] R. Langlands and D. Shelstad. On the definition of transfer factors. *Math. Ann.*, 278 :219–271, 1987.

[8] J.-L. Waldspurger. Une formule des traces locale pour les algèbres de Lie $p$-adiques. *J. Reine Angew. Math.*, 465 :41–99, 1995.

[9] J.-L. Waldspurger. Le lemme fondamental implique le transfert. *Compositio Math.*, 105 :153–236, 1997.