Identités de caractères en la place archimédienne

Laurent Clozel

1. Le but de ce chapitre est d'expliciter les identités du titre, dans deux cas qui nous seront utiles. Le groupe de base est toujours un groupe unitaire réel, soit

$$G = U(p,q) \qquad (p+q=n)\,.$$

Dans le premier cas G est quasi–déployé (soit $p=q$, ou $q=q+1$). On considère le changement de base entre $G(\mathbb{R})$ et $G(\mathbb{C})$. La conjugaison complexe σ opère sur $G(\mathbb{C})$ et sur ses représentations. Si Π est une représentation irréductible tempérée σ–stable de $G(\mathbb{C})$:

$$\Pi \cong \Pi \circ \sigma\,,$$

le choix d'un opérateur d'entrelacement A_σ entre Π et $\Pi\circ\sigma$ définit un caractère tordu $\Theta_{\Pi,\sigma}$. On normalise A_σ par $A_\sigma^2 = 1$; pour $\varphi \in C_c^\infty(G)$,

$$\Theta_{\Pi,\sigma}(\varphi) = \mathrm{trace}(\Pi(\varphi)A_\sigma)\,.$$

Noter que la définition du membre de droite nécessite le choix d'une mesure de Haar dg sur G ; $\varphi\, dg$ est alors une densité de sorte que $\Theta_{\Pi,\sigma}$ est donc une fonction généralisée sur $G(\mathbb{C})$, qui ne dépend plus d'aucun choix. On sait que $\Theta_{\Pi,\sigma}$ est une fonction C^∞ en les éléments de norme régulière.

Soit ${}^LG$ le groupe dual de G sur $\mathbb{R}$, ${}^LG = \widehat{G} \rtimes W_\mathbb{R}$, et soit ${}^LG/\mathbb{C} = G \times W_\mathbb{C}$ le groupe dual de $G/\mathbb{C}$. Soit $\varphi_0 : W_\mathbb{C}^\times \longrightarrow \widehat{G}$ un paramètre de Langlands **tempéré** (= dont l'image est d'adhérence compacte). Si φ_0 provient de $\varphi : W_\mathbb{R} \longrightarrow^L G$ par restriction, φ définit un L–paquet $\Pi_\mathbb{R}$ (tempéré) de représentation de $G(\mathbb{R})$; de même φ_0 définit une représentation irréductible Π de $G(\mathbb{C}) = GL(n,\mathbb{C})$, qui est σ–stable.

Soit $g \in G(\mathbb{C})$, dont la norme $\mathcal{N}g \in G(\mathbb{R})$ (définie à conjugaison stable près) est fortement régulière. On sait depuis longtemps que

$$\Theta_{\Pi,\sigma}(g) = \varepsilon\, \Theta_{\Pi_{\mathbb{R}}}(\mathcal{N}g)$$

où $\Theta_{\Pi_{\mathbb{R}}} = \sum_{\pi \in \Pi_{\mathbb{R}}} \Theta_\pi$ (la somme étant d'ailleurs sans multiplicité dans le cas réel) et $\varepsilon = \pm 1$ est un signe qui dépend du choix de A_σ. Ce signe est explicité dans [6] – pour un choix de A_σ dépendant de la théorie du K–type minimal – et dans [7] – pour des représentations Π cohomologiques, et à l'aide d'une définition cohomologique de A_σ.

Rappelons que G est quasi–déployé. Il existe alors une normalisation naturelle A_σ^W de A_σ, qui résulte de l'existence d'un modèle de Whittaker (§1). Nous allons démontrer :

Théorème 1.— *Si $A_\sigma = A_\sigma^W$ est normalisé par le modèle de Whittaker,*

$$\Theta_{\Pi,\sigma}(g) = \Theta_{\Pi_{\mathbb{R}}}(\mathcal{N}g)$$

pour tout $g \in G(\mathbb{C})$ de norme fortement régulière.

Si le groupe unitaire G est remplacé par $GL(n)/\mathbb{R}$, ceci avait été démontré dans [1].

Le second cas qui nous intéresse est l'endoscopie. Ici G est (unitaire) arbitraire et H en est un groupe endoscopique elliptique. On sait que

$$H = U^*(a) \times U^*(b)\,, \qquad a + b = n$$

où $U^*(a)$ désigne le groupe unitaire quasi–déployé de rang (absolu) a. On suppose fixé un plongement admissible ${}^LH \longrightarrow {}^LG$ (vide infra). Soit $\varphi : W_{\mathbb{R}} \longrightarrow {}^LH$ le paramètre de Langlands d'un L–paquet de séries discrètes de $H(\mathbb{R})$. On suppose que le composé $\varphi_G : W_{\mathbb{R}} \longrightarrow {}^LG$ est encore discret, i.e., définit un L–paquet de séries discrètes $\Pi_{\mathbb{R}}(\varphi_G)$. Shelstad a alors démontré une identité liant, en des éléments associés, le caractère stable (sur $H(\mathbb{R})$) défini par φ et une certaine combinaison linéaire de caractères du L–paquet $\Pi_{\mathbb{R}}(\varphi_G)$. Notre travail, modeste, est de l'expliciter. Dans ce cas, à la différence du changement de base, l'identité dépend d'une application (en fait, une correspondance) $f_G \rightsquigarrow f_H$ entre fonctions C_c^∞ sur G et H : celle–ci dépend à son tour d'un choix de facteurs de transfert locaux. Nous espérons que le choix fait ici sera compatible avec les arguments globaux. Notre exposition suit entièrement Kottwitz [12] : pour les groupes unitaires, on peut le paraphraser de façon simple et explicite.

2. L'identité de changement de base.

Tout d'abord, le Théorème 1 se réduit aisément au cas soù $\varphi : W_{\mathbb{R}} \longrightarrow {}^L G$ définit un L–paquet de séries discrètes pour $G(\mathbb{R})$. Dans le cas contraire, en effet, φ définit un L–paquet de séries discrètes pour $M(\mathbb{R})$ où $P(\mathbb{R}) = M(\mathbb{R})N(\mathbb{R})$ est un parabolique cuspidal réel. L'opérateur d'entrelacement "s'induit" de façon évidente ([6], Ch. 8), ainsi que le modèle de Whittaker ; on est ramené au cas d'un groupe unitaire de rang inférieur ou bien de $GL(1,\mathbb{C})$ plongé dans $GL(1,\mathbb{C})^2$, son complexifié, cas évident ...

Si φ est un tel paramètre "discret", rappelons que φ est donné sur $\mathbb{C}^\times$ par

$$z \longmapsto \mathrm{diag}((z/\overline{z})^{p_1}, \ldots, (z/\overline{z})^{p_n})$$

où $p_i \in \frac{n-1}{2} + \mathbb{Z}$ et $p_i \neq p_j$ (cf. e.g. [2], Ch. 5). La représentation Π est la série principale unitaire induite de $(z_1, \ldots z_n) \longmapsto (z_1/\overline{z_1})^{p_1}, \ldots, (z_1/\overline{z_1})^{p_n}$.

Nous allons utiliser un argument global. Soit E/F une extension quadratique CM d'un corps totalement réel. Le groupe unitaire G/F sera défini par

$$G(F) = \{g \in GL(n,E) : J_0 \, {}^t\overline{g}^{-1} J_0^{-1} = g\}$$

où J_0 est la matrice

$$\begin{pmatrix} & & & & & \iddots \\ & & & & \iddots & \\ & & & -1 & & \\ & & 1 & & & \\ & -1 & & & & \\ 1 & & & & & \end{pmatrix}$$

Il est quasi–déployé ; de plus, l'automorphisme

$$\sigma : g \longmapsto J_0 \, {}^t\overline{g}^{-1} J_0^{-1}$$

de $G(E)$ stabilise le sous–groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures, ainsi qu'un épinglage de celui–ci. En particulier, le caractère

$$\psi : n = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & x_{n-1} \\ & & & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \alpha(x_1 + \cdots + x_{n-1})$$

de $N(\mathbb{A}_E)$, où N est le sous–groupe unipotent supérieur de $GL(n)$ et α : $\mathbb{A}_E \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ est un caractère additif non trivial stable par $\mathrm{Gal}(E/F)$, et invariant par σ. Des considérations analogues s'appliquent évidemment en toutes les places, finies ou infinies.

Notons par ailleurs λ le paramètre $(p_1, \dots p_m)$, qui paramètre donc aussi un L–paquet de représentations unitaires de $G(\mathbb{R})$, ainsi qu'une représentation irréductible de dimension finie de la forme compacte $G_c(\mathbb{R}) = U(n)$. (λ est le paramètre d'Harish-Chandra du caractère infinitésimal de la représentation). On note θ_λ son caractère.

On sait qu'il existe une fonction $\varphi \in C_c^\infty(G(\mathbb{C}))$ qui est un pseudo–coefficient de $\Pi = \Pi_\lambda$, i.e., telle que pour toute représentation tempérée σ–stable $\mathbf{P}$ irréductible de $G(\mathbb{C})$, munie de $A_\sigma^{\mathbf{P}}$

$$\mathrm{trace}(\mathbf{P}(\varphi)A_\sigma^{\mathbf{P}}) = 0 \quad (\mathbf{P} \not\cong \Pi)$$
$$\mathrm{trace}(\Pi(\varphi)A_\sigma) = 1$$

Dans [8] on démontre par voie cohomologique le résultat suivant. Rappelons que pour $\sigma \in G(\mathbb{C})$, de norme **semi–simple** $\mathcal{N}\delta \in G(\mathbb{R})$, on peut définir l'intégrale orbitale tordue stable

$$STO_\delta(\varphi, dg_{\mathbb{C}}, di) = \sum_{\delta'} e(\delta')TO_{\delta'}(\varphi, dg_{\mathbb{C}}, di')$$

où la somme de droite porte sur les classes de conjugaison (tordue) dans la classe stable de δ, di' est une mesure de Haar (positive) sur le centralisateur tordu I' de δ', (associée de façon unique à une mesure di sur $I = I(\delta)$) et les $e(\delta')$ sont des signes définis par Kottwitz.

Si $\mathcal{N}\delta$ est un élément elliptique de $G(\mathbb{R})$, on peut le considérer comme une classe de conjugaison dans $G_c(\mathbb{R})$. Le centralisateur tordu I est alors un produit de groupes unitaires. Sur un groupe unitaire, il existe une mesure positive distinguée, telle que le degré formel de chaque série discrète de caractère infinitésimal égal à celui de la représentation triviale soit égal à 1. On calculera STO_δ à l'aide de cette mesure, notée di (et des di' associées). Soit par ailleurs I_c la forme compacte de I.

Théorème 2.1.— *Soit $A_\sigma : \Pi \cong \Pi \circ \sigma$ un entrelacement involutif, et φ un pseudo–coefficient associé (pour la mesure $dg_{\mathbb{C}}$). Si $\delta \in G(\mathbb{C})$ est de norme semi–simple,*

$$(i) \qquad STO_\delta(\varphi) = 0 \qquad (\mathcal{N}\delta \quad \textit{non elliptique})$$

(ii) $$STO_\delta(\varphi, dg_{\mathbb{C}}, di) = \varepsilon\ e(I_c)\theta_\lambda(\mathcal{N}\delta)$$

$$(\mathcal{N}\delta \ \textit{elliptique})$$

où le signe $\varepsilon = \pm 1$ *dépend de* A_σ.

Ce résultat est démontré dans [8]. La comparaison avec cette référence appelle deux remarques. Le résultat de [8] ne comporte pas de signe, mais un facteur $d(G) = 2^n$. Dans [8], φ est remplacée par une fonction d'Euler-Poincaré, asssociée à un choix arbitraire (involutif) A d'opérateur d'entrelacement. La comparaison entre celle-ci et notre pseudo-coefficient introduit un signe, ainsi que le scalaire $d(G)$, égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré de σ opérant dans la cohomologie de Π, égal à 2^n comme le montre le calcul de [7].

On précisera ce résultat après la démonstration du Théorème 1.

Nous appliquons ce théorème à toutes les représentations Π_λ ; chacune étant générique admet un vecteur de Whittaker, i.e., un vecteur–distribution ν dans l'espace dual de $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\Pi)$ tel que

$$< \nu, nv >= \psi(n) < \nu, v >$$

($v \in \mathfrak{H}$, $n \in N(\mathbb{C})$). Puisque ν est unique à un scalaire près, on peut choisir uniquement A_σ tel que $A_\sigma^* \nu = \nu$. C'est l'opérateur **Whittaker–normalisé** A_σ^w.

On aura besoin d'une construction analogue en une place p–adique v de F. On suppose celle–ci décomposée, donc $G(E_v)$ est isomorphe à $GL(n, F_v) \times GL(n, F_v)$, σ opérant par

$$(g_1, g_2) \longmapsto (\theta_0(g_2),\ \theta_0(g_1))$$

où $\theta_0(g) = J_0\ {}^t g^{-1} J_0^{-1}$. Alors σ stabilise le sous–groupe de Borel (produit), ainsi que ψ.

Soit τ une représentation supercuspidale de $GL(n, F_v)$. Alors $\tau \otimes (\tau \circ \theta_0)$ est stable par σ, l'opérateur d'entrelacement étant simplement

$$A_\sigma : (v, w) \longmapsto (w, v)\,.$$

Il opère par 1 sur l'espace des vecteurs de Whittaker de $\tau \otimes (\tau \circ \theta_0)$. Soit φ_1, φ_2 deux fonctions C_c^∞ sur $GL(n, F_v)$. On vérifie aussitôt que pour $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$:

$$tr(A_\sigma(\tau \otimes \tau^{\theta_0})(\varphi)) = tr(\tau(\xi))$$

où
$$\xi(g) = \int \varphi_1(g_1)\varphi_2(\theta_0(g_1^{-1}g))dg_1\,.$$

En particulier cette trace est ≥ 0 si $\varphi_2(g) = \overline{\varphi}_1(\theta_0 g^{-1})$; elle est > 0 si de plus $\tau(\varphi_1) \neq 0$. Choisissons ainsi φ, on a

$$STO_1(\varphi) = TO_1(\varphi) = \int_{G^2/I} \varphi(g_1 g_2^{-\theta_0}, g_2 g_1^{-\theta_0})$$

où on a écrit pour un instant $G = GL(n, F_v)$, et $I = \{g, g^{\theta_0}\} \subset G^2$. Si $\varphi_2(g) = \overline{\varphi}_1(\theta_0 g^{-1})$, cette intégrale s'écrit aussi (en prenant $g_2 = 1$)

$$\int_G \varphi_1 \otimes \varphi_2(g_1, g_1^{-\theta_0}) = \int_G \varphi_1(g_1)\overline{\varphi}_1(g_1)dg_1 > 0\,.$$

Soit A_σ l'endomorphisme de $L^2_{cusp}(G(E)\backslash G(\mathbb{A}_E))$ donné par $h(x) \mapsto h(\sigma x)$.

Sur $G(\mathbb{A}_E) = GL(n, \mathbb{A}_E)$ considérons une fonction φ de la forme

$$\bigotimes_{v|\infty} \varphi_{\lambda_v} \bigotimes \varphi_v \bigotimes \bigotimes_{\substack{w \neq v \\ w \nmid \infty}} \varphi_w$$

où les φ_w sont les fonctions unité de l'algèbre de Hecke. On suppose que pour $v \mid \infty, \phi_v$ est un pseudo-coefficient pour Π_λ et pour l'opérateur d'entrelacement Wh-normalisé. On a choisi F et E de façon que $\dim(F)$ soit assez grand – $\dim \geq 2$ suffit, voir l'article de Labesse [13] – et que E/F soit partout non ramifié aux places finies. D'après Labesse [13], la formule des traces tordue pour $G(\mathbb{A}_E)$, A_σ se stabilise. Pour $\underline{\lambda} = (\lambda_v)$ donné, elle donne simplement

$$\mathrm{trace}(R(\varphi)A_\sigma) = \sum_\pi \mathrm{trace}(\pi(\varphi)A_\sigma) = \sum_\delta STO_\delta(\varphi)$$

où la somme porte sur un ensemble fini de classes de conjugaison (stable) elliptiques dans $G(E)$. La représentation R est celle de $G(\mathbb{A}_E)$ sur les formes cuspidales sur $A_G G(E)\backslash G(\mathbb{A}_E)$, $A_G \cong \mathbb{R}_+^\times$ étant la composante neutre du centre déployé...Bien sûr, les termes discrets non cuspidaux de la formule des traces d'Arthur sont annulés par le choix de φ_v. Les π sont cuspidales et σ–stables. Pour disposer des résultats d'Arthur utilisés par Labesse, il faut savoir en fait que toutes les intégrales orbitales tordues des $\phi_v(v \mid \infty)$ en des éléments non (σ)-semi-simples s'annulent. Ceci a été démontré par Chenevier et Renard [5] . (On pourrait aussi rajouter une place finie et introduire une représentation de Steinberg en cette place, cf. [4] .

L'opérateur A_σ préserve $N(\mathbb{A}_E)$ ainsi que la fonctionnelle de Whittaker,

$$h \longmapsto \int_{N(E)\backslash N(\mathbb{A}_E)} h(n)\psi(n)dn\,.$$

Soit π l'une des représentations telles que $\mathrm{trace}(\pi(\varphi)A_\sigma) \neq 0$. Alors, π étant générique, on a nécessairement

$$\pi = \bigoplus_{v|\infty} \Pi_{\lambda_v} \otimes (\tau \otimes \tau^{\theta_0}) \otimes \bigotimes_w \pi_w$$

où les π_w sont non–ramifiées (et génériques). Pour celles–ci, l'opérateur d'entrelacement Whittaker–normalisé opère par 1 sur le vecteur non–ramifié. L'opérateur $A_\pi = A_\sigma \mid_\pi$ global est donc simplement un produit fini

$$\bigotimes_{v|\infty} A_v \bigotimes A_{\tau\otimes\tau^{\theta_0}}\,.$$

d'opérateurs Whittaker–normalisés. D'après notre choix des φ_v, la trace tordue, pour tout π, est (strictement) positive.

La somme $\sum\limits_\delta$ contient la classe unité :

$$\begin{aligned}\sum_\delta &= STO_1(\varphi) + \sum_{\delta'} STO_\delta(\varphi)\\ &= c\ e(G_c)^r \prod_{i=1}^r \varepsilon(\lambda_i) \prod_{i=1}^r \theta_{\lambda_i}(1)\ STO_1(\varphi_v) \qquad (2.1)\\ &\quad + \sum_{\delta'} c(\delta') \prod_{i=1}^r \varepsilon(\lambda_i)\theta_{\lambda_i}(\mathcal{N}\delta'_i)\end{aligned}$$

Les signes $\epsilon(\lambda_i$ sont définis par le Théorème 2.1(ii) et l'opérateur Wh-normalisé.Les constantes c, $STO_1(\varphi_v)$ sont > 0. Elles ne dépendent pas de $\underline{\lambda}$, non plus que les $c(\delta')$ (rappelons que les φ_{λ_i} peuvent être prises à support dans un compact **fixe**, de suite que les sommes sont uniformes pour $\underline{\lambda}$ variable). Enfin, r est le degré $[F:\mathbb{Q}]$.

Supposons $r = [F : \mathbb{Q}]$ impair, ce qui est loisible ; pour simplifier on supposera $r = 3$. Fixons λ_1. Si λ_2, λ_3 tendent vers l'infini "loin des murs", l'argument de ([4], §3) montre que la somme (2.1) est équivalente à son "terme constant" indexé par $\delta = 1$. Puisqu'elle est positive,

$$\eta(\lambda_1)\eta(\lambda_2)\eta(\lambda_3) > 0 \qquad (\lambda_2, \lambda_3 \gg 0)$$

où on a posé $\eta(\lambda) = e(G_c)\varepsilon(\lambda)$. Prenant $\lambda_2 = \lambda_3$ on voit que $\eta(\lambda_1) = 1$.

Revenons au Théorème 2.1. Si A_σ est Wh–normalisé, on a donc $\varepsilon = e(G_c) = (-1)^{q_G}$ où $2q_G$ est la dimension réelle de l'espace symétrique de $G(\mathbb{R})$ – donc $q_G = a^2$ ou $a(a+1)$ selon la parité de n. Par ailleurs, pour δ régulier, $STO_\delta(\varphi) = \varepsilon\theta_\lambda(\mathcal{N}\delta) = \varepsilon$ si λ est associé à la représentation triviale de $U(n)$.

Fixons ainsi λ. Soit A'_σ l'opérateur d'entrelacement tel que l'identité de caractères du Théorème 1 soit vraie, **sans signe**. Si $\varphi \in C_c(G(\mathbb{C}))$, trace$(\Pi(\varphi)A'_\sigma$ s'obtient, par intégration de Weyl – nous n'écrirons pas la formule explicite – des intégrales orbitales tordues de φ contre le caractère tordu $\Theta_{\Pi,\sigma}$ (défini par A'_σ). Celui–ci est égal à $\Theta_{\Pi_\mathbb{R}} \circ \mathcal{N}g$ (notation du Théorème 1) donc, d'après Harish–Chandra, à $(-1)^{q_G}$ (cf. [8]). Il est stable, donc trace$(\Pi(\varphi)A'_\sigma)$ s'écrit encore comme l'intégrale contre $(-1)^{q_G}$ des intégrales tordues stables. Si maintenant φ est le pseudo–coefficient associé à A'_σ, celles–ci sont égales d'après le Théorème 2.1 à ε où $\varepsilon = \varepsilon(A'_\sigma)$. Puisque la trace tordue est égale à 1, il en résulte que $\varepsilon = (-1)^{q_G}$. Par conséquent $\varepsilon(A'_\sigma) = \varepsilon(A^W_\sigma)$, donc $A'_\sigma = A^W_\sigma$ ce qui démontre le Théorème 1.

Corollaire 2.2.— *Si $A_\sigma = A^W_\sigma$, les identités du Théorème* 2.1 *sont vraies, avec $\varepsilon = (-1)^{q_G}$.*

Remarque : L'identité obtenue est compatible avec les faits suivants :

(1) L'opérateur d'entrelacement global, $h(x) \longmapsto h(\sigma(n))$ (h = fonction sur $G(E)A\backslash G(\mathbb{A}_E)$) est Whittaker–normalisé.

Si φ_λ est un pseudo–coefficient de Π_λ pour A^W (en toutes les places) et f_λ un pseudo–coefficient de la représentation associée (en fait un L–paquet) Π_λ de $G(F_\infty)$, l'identité de formules des traces de Labesse ([13], § 9) montre que la somme (dans l'espace des formes automorphes sur G).

$$\sum_\pi \text{trace } \pi(f)$$

est positive s'il n'intervient que des représentations qui sont des séries discrètes à l'infini. C'est le cas si λ est suffisamment régulier. Dans les autres cas, l'analyse est beaucoup plus délicate et elle est ici remplacée par l'argument de [**?**].

(2) En une place réelle, $\varphi = \varphi_\lambda$ et f_λ sont alors associées au sens de Shelstad [19] et Clozel–Delorme (i.e., vérifient les bonnes identités d'intégrales orbitales, sans signe). Alors $STO_1(\varphi) = f_\lambda(1) = \sum_{\pi'_\lambda} \deg(\pi'_\lambda) = \theta_\lambda(1)$ (où le

L–paquet $\pi_\lambda = \{\pi'_\lambda\}$). Cette formule avait été démontrée par Bouaziz [3]

3. Une identité endoscopique (cas tempéré)

3.1. Dans ce paragraphe $G = U(p,q)$, $p+q=n$. Le groupe dual de G est

$$^L G = \widehat{G} \rtimes W_{\mathbb{R}}$$

où $\widehat{G} = GL(n,\mathbb{C})$, $W_{\mathbb{R}}$ opère via $\Gamma_{\mathbb{R}} = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, la conjugaison complexe c opérant par

$$g \longmapsto J_0^n \; {}^t g^{-1} (J_0^n)^{-1}$$

où l'on a noté J_0^n la matrice J_0 du § 2.

Rappelons la description des groupes endoscopiques elliptiques (cf. Rogawski [16], § 4.6). Ce sont les groupes

$$H = U^*(a) \times U^*(b)$$

où U^* est le groupe unitaire **quasi–déployé** et $a+b=n$. On a donc de nouveau

$$^L H = GL(a,\mathbb{C}) \times GL(n,\mathbb{C}) \rtimes W_{\mathbb{R}} = \widehat{H} \rtimes W_{\mathbb{R}}$$

où $W_{\mathbb{R}}$ opère comme ci–dessus, par les deux matrices J_0^a et J_0^b. On définit un "plongement" $\xi :^L H \longrightarrow^L G$, i.e., un homomorphisme de L–groupes, de la façon suivante :

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{array}{c} \widehat{H} \longrightarrow \widehat{G} \text{ est simplement le plongement de} \\ GL(a) \times GL(b) \text{ dans } GL(n) \text{ par des matrices diagonales par blocs} \end{array}$$

Soit $W_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^\times \coprod j\mathbb{C}^\times$, où $j^2 = -1$ et $jzj^{-1} = \overline{z}$ $(z \in \mathbb{C}^\times)$. Pour $w \in W_{\mathbb{R}}$, soit

$$\xi(w) = (\psi(w), w) \in \widehat{G} \times W_{\mathbb{R}}\,.$$

Si $w = z \in \mathbb{C}^\times$, w opère trivialement sur $\widehat{G}$ et $\widehat{H}$ et on doit donc avoir

$$\text{(3.2)} \qquad \xi(z) = (\mu_1(z), \mu_2(z), z)$$

où μ_i est un caractère de $\mathbb{C}^\times$, identifié à une matrice scalaire de taille a (resp. b). Vu l'action de j sur $\widehat{H}$ et $\widehat{G}$, on doit avoir

$$\xi(j) = (z(J_0^a \times J_0^b)(J_0^n)^{-1},\ j)$$

où $z \in \mathbb{C}^\times$ et $J_0^a \times J_0^b$ est la matrice diagonale par blocs. Modulo la notion naturelle d'équivalence des données endoscopiques on peut supposer

$$\xi(j) = ((J_0^a \times J_0^b)(J_0^n)^{-1},\ j)\,. \tag{3.3}$$

Sur l'image de (3.2), $\xi(j)$ opère par conjugaison par

$$(\mu_1, \mu_2, z) \longmapsto (\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \overline{z})$$

donc les caractères μ_i doivent vérifier $\mu_i(z\overline{z}) = 1$. Un tel caractère s'écrit $z \longmapsto z^{p_i}(\overline{z})^{-p_i}$, avec $p_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Par ailleurs on vérifie que

$$\xi(-1) = \xi(j)^2 = ((-1)^{a+n}, (-1)^{b+n}, -1)$$

où les deux premiers éléments représentent des matrices scalaires par blocs. On a donc enfin $p_1 = \alpha$, $p_2 = \beta$ avec

$$2\alpha \equiv a + n\ [2], \qquad 2\beta \equiv b + n\ [2]\,. \tag{3.4}$$

Un choix naturel est $p_1 = \frac{a+n}{2}$, $p_2 = \frac{b+n}{2}$. En prévision du cas global, on évitera cependant de restreindre le choix.

Il y a une dernière donnée associée à H. En général un groupe endoscopique est défini par $s \in \widehat{G}$ (un élément semi–simple), $\widehat{H} = \mathrm{Cent}(s, \widehat{G})$, et une structure de L–groupe ${}^LH$ (étendant $\widehat{H}$) vérifiant certaines conditions [10] et [16]. Ici on a pris

$$s = \begin{pmatrix} 1_a & \\ & -1_b \end{pmatrix} \in \widehat{G}\,. \tag{3.5}$$

3.2. Rappelons, pour les groupes unitaires, la paramétrisation de Langlands pour les L–paquets de séries discrètes. Soit donc $G = U(p, q)$ – ceci s'appliquera aussi aux groupes endoscopiques $U^*(a) \times U^*(b)$, de sorte que le L–groupe a été décrit en 3.1. On considère ${}^LG$ construit à partir de $\widehat{T}$, $\widehat{B}$ où $\widehat{T}$ est le tore diagonal et $\widehat{B}$ le Borel standard ; noter que l'action de $W_\mathbb{R}$ préserve $(\widehat{T}, \widehat{B})$; $j \in W_\mathbb{R}$ opère par conjugaison sur $\widehat{T}$ par

$$(t_1, \dots t_n) \longmapsto (t_n^{-1}, \dots t_1^{-1})\,.$$

On considère des homomorphismes continus

$$\varphi = \varphi_G : W_\mathbb{R} \longrightarrow^L G$$

commutant avec la projection sur $W_{\mathbb{R}}$, et dont l'image n'est contenue dans aucun parabolique (paramètres elliptiques). L'image de $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times$ est contenue dans un tore maximal de $\widehat{G}$, donc à conjugaison près dans $\widehat{T}$. Langlands démontre alors (voir [2], Ch. 5) que $\varphi\,|_{\mathbb{C}^\times}$ est de la forme

$$z \longmapsto ((z/\overline{z})^{p_1}, \ldots, (z/\overline{z})^{p_n}\,;\, z) \tag{3.6}$$

avec $p_i \in \frac{n-1}{2} + \mathbb{Z}$, p_i distincts,

$$j \longmapsto (J_0^{-1}\,;\, j)$$

A conjugaison près dans ${}^LG$, on peut supposer

$$p_1 > p_2 > \cdots > p_n\,. \tag{3.7}$$ [1]

Nos groupes unitaires, $G = U(p,q)$, sont tous définis par la matrice hermitienne

$$\begin{pmatrix} 1_p & \\ & -1_q \end{pmatrix}$$

et G contient donc le tore compact $T_G \cong U(1)^n$ des matrices diagonales.

Soit H un groupe endoscopique (elliptique) de G, muni d'un plongement

$$\xi : {}^L H \longrightarrow {}^L G\,.$$

Soit $\varphi_H : W_{\mathbb{R}} \longrightarrow {}^L H$ le paramètre d'un L–paquet de séries discrètes pour H. Par composition φ_H définit $\varphi_G = \xi \circ \varphi_H : W_{\mathbb{R}} \longrightarrow {}^L G$. Ce paramètre n'est pas nécessairement elliptique : si les paramètres pour $H = U^*(a) \times U^*(b)$ sont $(p_1, \ldots p_a, q_1, \ldots q_b)$, les paramètres pour G sont $(p_i + \alpha,\ q_j + \beta)$. Noter toutefois que d'après (3.6) $p_i + \alpha,\ q_j + \beta \equiv \frac{n-1}{2}\ [1]$, et que le paramètre image est elliptique quitte à changer α ou β, ce qui revient à tordre les représentations de H considérées par un caractère abélien de $H(\mathbb{R})$.

Supposons donc φ_G elliptique, il lui est donc associé un L–paquet $\Pi(\varphi_G)$ de séries discrètes.

Dans cette situation, par ailleurs, il existe une correspondance

$$f \rightsquigarrow f_H$$

[1] On associe à φ le L–paquet $\Pi_G(\varphi)$ de séries discrètes déjà considéré dans le § 2 (là pour le groupe quasi–déployé) ; cf. Harris [9].

envoyant les fonctions C_c^∞ sur $G(\mathbb{R})$ – disons, K–finies – vers celles sur $H(\mathbb{R})$. L'image de f n'est pas unique, mais ses intégrales orbitales stables sont spécifiées ; en les éléments semi–simples réguliers, $\gamma \in G(\mathbb{R})$, $\gamma_H \in H(\mathbb{R})$, associés par la conjugaison stable,

$$SO_{\gamma_H}(f_H) = \sum_{\gamma \sim \gamma_H} \Delta_\infty(\gamma_H, \gamma) O_\gamma(f).$$

On a choisi des mesures de Haar sur $G(\mathbb{R})$ et $H(\mathbb{R})$; les "dénominateurs" des intégrales orbitales, i.e., les mesures de Haar sur les centralisateurs des γ et des conjugués stables de γ_H , sont choisis de façon compatible.

On dit que Δ_∞ est un **facteur de transfert**.

L'existence des facteurs de transfert, et de f_H, a été démontrée par Shelstad. Le facteur de transfert n'est pas unique ; le point essentiel pour la formule des traces est l'existence d'une famille de facteurs locaux (en toutes les places) satisfaisant une formule du produit (Langlands–Shelstad [14]). Voir aussi [15].

Supposons donnée la correspondance, et revenons à nos paramètres $\varphi_H \rightsquigarrow \varphi_G$. Soit Θ_{φ_H} le caractère stable associé :

$$\Theta_{\varphi_H}(h) = \sum_{\pi \in \Pi(\varphi_H)} \Theta_\pi(h)$$

($h \in H(\mathbb{R})$ régulier), $\Pi(\varphi_H)$ étant un L–paquet de séries discrètes – donc ici pour $U^*(a) \times U^*(b)$. On sait que Θ_{φ_H} est invariant par conjugaison stable (Shelstad [17]). Donc $(\Theta_{\varphi_H}, f^H)$ est une fonction bien définie de $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{R}))$ – disons, K–finie. Nous allons énoncer (suivant Shelstad) une identité explicite

$$(\Theta_{\varphi_H}, f^H) = \sum_{\pi \in \Pi_G(\varphi)} \Delta_\infty(\varphi_H, \pi)(\Theta_\pi, f)\,. \tag{3.8}$$

(Les notations sont celles de Kottwitz [10]). L'identité dépend évidemment du choix des facteurs de transfert, qu'il nous faudra spécifier.

Revenons sur la condition (3.7). Si elle est vérifiée pour les deux facteurs de φ_H (i.e., $p_1, \dots p_a$ et $q_1, \dots q_b$) elle ne l'est pas toujours pour φ_G. On verra que la forme de (3.8) dépend en fait des positions relatives des paramètres (p_i, q_i).

Revenons à notre groupe unitaire $U(p,q) = G$, muni de son tore diagonal T. L'ensemble $\mathcal{B}$ des sous–groupes de Borel de $G(\mathbb{C}) = GL(n, \mathbb{C})$ contenant

T est en bijection avec le groupe de Weyl $\Omega = \mathfrak{S}_n$, l'élément neutre correspondant au Borel standard B_0. Par ailleurs

$$^L T = (\mathbb{C}^\times)^n \rtimes W_\mathbb{R} = \widehat{T} \rtimes W_\mathbb{R}$$

$c \in \Gamma_\mathbb{R}$ opérant par $(t_i) \longmapsto (t_i^{-1})$. On construit un plongement

$$\eta_0 : {}^L T \longrightarrow {}^L G$$

en envoyant $\widehat{T}$ diagonalement dans $GL(n, \mathbb{C})$, en posant

$$\eta_0(z) = ((z/\overline{z})^{\frac{n-1}{2}}, (z/\overline{z})^{\frac{n-3}{2}}, \dots (z/\overline{z})^{\frac{1-n}{2}}, z) \in \widehat{G} \times \mathbb{C}^\times, \tag{3.9}$$

$$\eta_0(j) = (J_0^n, j)\,.$$

On pourra remarquer que $\eta_0|_{W_\mathbb{R}}$ est défini par le paramètre de Langlands de la “plus petite série discrète”, cf. (3.6). Plus généralement, si $B = \omega B_0 \in \mathcal{B}$, on définit η_B par permutation des coordonnées (de $\widehat{T}$).

Soit H un groupe endoscopique pour G. Alors $\mathcal{B}_H$ est formé des paires de Borel dans $GL(a) \times GL(b)$, et on obtient de même des plongements

$$\eta^H_{B',B''} : \ {}^L T \longrightarrow {}^L H\,,$$

en particulier η_0^H ($\neq \eta_0^G$!). La différence entre η_0^H et η_0^G définit un caractère de $T(\mathbb{R})$, de la façon suivante. Ils coïncident sur $\widehat{T}$, donc si l'on pose

$$\xi \circ \eta_0^H(w) = \eta_0^G(w) a(w) \qquad (w \in W_\mathbb{R})\,,$$

$a(w)$ est un élément de $\widehat{T}$ qui par construction est un 1–cocycle. On a en fait

$$a(w) = ((z/\overline{z})^\alpha (z/\overline{z})^{\frac{a-n}{2}}\,,\ (z/\overline{z})^\beta (z/\overline{z})^{\frac{n-b}{2}}) \quad (w = z \in \mathbb{C}^\times)$$

où le premier terme est répété a fois et le second b fois. Il n'est pas nécessaire de calculer $a(j)$: par dualité de Langlands, cet élément de $H^1(W_\mathbb{R}, \widehat{T})$ définit le caractère

$$\chi_0 : (t_1, \dots t_n) \longmapsto t_1^{\mathfrak{a}} \dots t_a^{\mathfrak{a}}\ t_{a+1}^{\mathfrak{b}} \dots t_{a+b}^{\mathfrak{b}} \quad (t_i \in U(1))$$

où $\mathfrak{a} = \alpha + \frac{a-n}{2}$, $\mathfrak{b} = \beta + \frac{n-b}{2}$. Noter que $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sont entiers d'après (3.6). Si $\alpha = \frac{a+n}{2}$, $\beta = \frac{b+n}{2}$ on a

$$\mathfrak{a} = a\,, \qquad \mathfrak{b} = n\,.$$

Noter que le choix de $B = B_0 \in \mathcal{B}$ détermine B_H (comme $B \cap H(\mathbb{C})$). A partir des données ci–dessus on peut alors donner une première expression pour le facteur de transfert $\Delta = \Delta_\infty$.

DÉFINITION 3.1.— *On pose, pour $\gamma_H = \gamma \in T$ (identifié à un tore de H ou G) :*

$$\Delta_0(\gamma_H, \gamma) = (-1)^{q(G)+q(H)} \chi_0(\gamma) \Delta_{B_0}(\gamma^{-1}) \Delta_{B_0^H}(\gamma_H^{-1})^{-1} \,.$$

Les coefficients $q(G)$, $q(H)$ sont comme dans le §2 les demi–dimensions des espaces symétriques réels. Les discriminants sont définis, pour tout $B \in \mathcal{B}$

$$\Delta_B(\gamma) = \prod_\alpha (1 - \alpha(\gamma)^{-1}) \tag{3.10}$$

où α parcourt les racines de (B, T), et de même pour B^H.

Cette expression est due à Kottwitz ([10], p. 184). Il est peut-être charitable de faire (contrairement à Kottwitz) remarquer au lecteur le point suivant. On a bien écrit "$\gamma_H = \gamma$". La condition peut paraître peu naturelle puisque le facteur de transfert est défini pour tout couple d'éléments stablement conjugués. Le facteur de transfert est bien défini par la formule indiquée (modulo les identifications spécifiées) *pour* $\gamma_H = \gamma$. Si on change γ_H dans sa classe stable, le facteur se transforme de façon compatible avec le formalisme de Langlands-Shelstad.

Nous pouvons maintenant expliciter l'égalité (3.8) dans le cas le plus simple. Disons que le paramètre φ_G est **en position dominante** s'il vérifie (3.7) :

$$z \longmapsto \operatorname{diag}((z/\overline{z})^{p_1}, \dots (z/\overline{z})^{p_n}) \qquad (z \in \mathbb{C}^\times)\,,$$
$$p_1 > \cdots > p_n \,.$$

Dans les discussions qui suivent, il sera nécessaire de distinguer le dual $\widehat{T}$ du tore anisotrope (de G ou H) et le tore de référence de $\widehat{G}$ et de $\widehat{H}$, que l'on note $\widehat{S}$.

Rappelons la paramétrisation des séries discrètes de G associées à un paramètre elliptique φ. Notons $\Omega = \mathfrak{S}_n$ le groupe de Weyl de $(G_\mathbb{C}, T_\mathbb{C})$ et $\Omega_\mathbb{R} = \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$ le groupe de Weyl de $(G_\mathbb{R}, T_\mathbb{R})$. Soit $B \in \mathcal{B}$.

Il existe un unique isomorphisme $\widehat{T} \longrightarrow \widehat{S}$ (admissible du point de vue du L–groupe, i.e. ici réalisé par un élément $\omega \in \mathfrak{S}_n$, opérant sur $(\mathbb{C}^\times)^n = \widehat{T} = \widehat{S}$)

envoyant les racines positives de B sur les racines positives de $(\widehat{S}, \widehat{B})$. Pour tout B, on a construit

$$\eta_B : {}^L T \longrightarrow {}^L G\,;$$

η_0 est donné par (3.9) et, si $B = \omega B_0$ ($\omega \in \mathfrak{S}_n$),

$$\eta_B(z) = \eta_0(\omega^{-1} z)\,.$$

On définit un paramètre $\varphi : W_{\mathbb{R}} \longrightarrow {}^L T$ par

$$\varphi = \eta_B \circ \varphi_B\,. \tag{3.11}$$

Si $B = B_0$ et si φ_G vérifie (3.7) on a donc simplement

$$\varphi(z) = 1 \qquad (z \in \mathbb{C}^\times)\,.$$

Soit χ_B le caractère de $T(\mathbb{R})$ associé à φ_B.

Pour tout $B \in \mathcal{B}$, il existe alors une unique représentation $\pi(\varphi, B)$ dans le L–paquet associé à φ dont le caractère est donné pour $\gamma \in T(\mathbb{R})$ régulier par

$$(-1)^{q(G)} \sum_{\omega \in \Omega_{\mathbb{R}}} \frac{\chi_{\omega B}(\gamma)}{\Delta_{\omega B}(\gamma)}$$

où le dénominateur a été défini en (3.10).

Il est clair que $\pi(\varphi, \omega B) = \pi(\varphi, B)$ si $\omega \in \Omega_{\mathbb{R}}$. On vérifie que les caractères associés aux éléments de $\Omega_{\mathbb{R}} \backslash \Omega$ sont distincts. On obtient ainsi la paramétrisation usuelle du L–paquet par $\mathfrak{S}_n / \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$ (prendre $\pi(\varphi, \omega^{-1} B)$), c'est–à–dire classiquement par les orbites du groupe de Weyl complexe dans l'ensemble des orbites du groupe de Weyl compact sur les (demi)–caractères réguliers de T.

Remarque.- Si $G = U(1, q)$, le L-paquet est paramétré par $\mathfrak{S}_{q+1} / \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_q = \{1, ..., q+1\}$ via $\sigma \mapsto \sigma.1$; notons $\pi_1, ..., \pi_{q+1}$ les représentations associées. On sait alors que, pour un choix convenable d'une structure holomorphe sur l'espace symétrique de G, π_1 est une série discrète holomorphe, π_{q+1} est antiholomorphe ; enfin $\pi_{\frac{q+2}{2}}$ (q pair) ou $\pi_{\frac{q+1}{2}}, \pi_{\frac{q+3}{2}}$ (q impair) admettent des modèles de Whittaker.

Nous devons enfin définir l'ingrédient essentiel de la formule (3.8). Considérons de nouveau $T \subset G$; soit T_{sc} l'intersection de T avec $G_{der} = SU(p, q)$. Les groupes de Weyl Ω et $\Omega_{\mathbb{R}}$ coïncident pour G et G_{der}. Si $\Omega \in \Omega$, soit

$g \in G_{der}(\mathbb{C})$ un représentant de ω (donc g appartient au normalisateur de $T_{sc}(\mathbb{C})$). Puisque $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ laisse T invariant,

$$\sigma \longmapsto g\sigma(g)^{-1} \qquad (\sigma \in \Gamma_{\mathbb{R}})$$

définit un 1–cocycle de $\Gamma_{\mathbb{R}}$ à valeurs dans $T_{sc}(\mathbb{C})$. Soit $a(\omega) \in H^1(\mathbb{R}, T)$ l'élément qui s'en déduit. On vérifie que $\omega \longmapsto a(\omega)$ est de nouveau un 1–cocycle, i.e.

$$a(\omega_1\omega_2) = a(\omega_1) + \omega_1 a(\omega_2)\,. \tag{3.12}$$

Rappelons par ailleurs que $H^1(\mathbb{R}, T)$ est dual du groupe $\pi_0(\widehat{T}^{\Gamma_{\mathbb{R}}}) = \widehat{T}^{\Gamma_{\mathbb{R}}} = (\pm 1)^n$ puisque $\Gamma_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ opère sur $\widehat{T}$ par $t \longmapsto t^{-1}$. Le groupe dual est donc $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

On calcule aisément $a(\omega)$ pour les transpositions $(i,j) \in \mathfrak{S}_n$. Si (i,j) appartient à $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$, c'est–à–dire si la racine associée est compacte, ω est réalisée dans $SU(p)$ ou $SU(q)$ et $a(\omega) = 0$. Si (i,j) est non compacte, $a(\omega)$ est l'élément

$$(0, \dots \underset{i}{1},\ 0 \dots, \underset{j}{1}, \dots 0) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n\,.$$

En particulier $a : \Omega \longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ est d'après (3.12) définie sur $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$[2]. On peut donc voir a comme fonction des sous–ensembles I de cardinal p de $\{1, \dots n\}$, en prenant $I_0 = \{1, \dots p\}$ comme point de base. Soit $I' = I_0 - I = \{i_1, \dots i_r\}$ et $I'' = I \cap \{p+1, \dots n\} = \{j_1, \dots j_r\}$. Alors $I = \omega_1 \dots \omega_r I_0$ où $\omega_\alpha = (i_\alpha, j_\alpha)$. Si $\omega = \omega_1 \dots \omega_r$, $a(I) = a(\omega) = a(\omega_1) + \dots + a(\omega_r)$ d'après (3.12), puisque $\omega_i a(\omega_j) = a(\omega_j)$, les transposition étant disjointes. On a donc enfin :

Lemme 3.2.— *Si $\omega \in \Omega$ et $I = \omega I_0$,*

$$a(\omega) = (\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n)$$

où

$$\begin{aligned} \varepsilon_i = 0 \quad &si \quad i \in (I \cap I_0) \cup (\{p+1, \dots, n\} - I) \\ \varepsilon_i = 1 \quad &si \quad i \in I_0 - I \cup (\{p+1, \dots, n\} \cap I) \end{aligned}$$

[2]Si $p = q$, le groupe naturel $GU(p,q)$ qui interviendra dans les problèmes de modules n'est pas connexe. On a alors $\Omega \supset \Omega_1 \supset \Omega_{\mathbb{R}}$ où Ω_1 est le groupe de Weyl du compact maximal $K_\infty \supsetneqq U(p) \times U(p)$; $\Omega_1 = \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_p \rtimes (\mathbb{Z}/2)$, $\mathbb{Z}/2$ opérant par $(\omega, \eta) \longmapsto (\eta, \omega)$. L'application passe au quotient **par** Ω_1.

Rappelons que l'on a identifié $\widehat{T}$ à $\widehat{S}$. Pour $\omega \in \Omega$, on peut donc définir $< a_\omega, s >$ puisque $s \in (\widehat{T})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$. Explicitement

$$(3.13) \qquad < a_\omega, s >= (-1)^{\#(I' \cup I'') \cap \{a+1,\ldots,n\}}\,.$$

On a alors :

THÉORÈME 3.3. (Shelstad, Kottwitz).— *Supposons $\varphi_G = \xi \circ \varphi_H$ en position dominante. Alors*

$$(\Theta_{\varphi_H}, f^H) = \sum_{\pi \in \Pi_G(\varphi)} \Delta_\infty(\varphi_H, \pi)(\Theta_\pi, f)$$

où

$$\Delta_\infty(\varphi_H, \pi) =< a_\sigma, s > \qquad \textit{si } \pi = \pi(\varphi, \sigma^{-1} B_0)$$

C'est le cas particiulier où ϕ_G est en position dominante de la formule donnée par Kottwitz [12], p.185.

Décrivons le cas général. La donnée endoscopique $\widehat{H} \subset \widehat{G}$ permet d'identifier (à conjugaison stable près) des tores elliptiques T_H et T_G de H et G. Nous supposons que T_H est le tore diagonal dans $U^*(a) \times U^*(b)$; l'isomorphisme $j : T_H \longrightarrow T_G$ ([12], p. 184) est simplement l'application identique. On se donne $\varphi_H : W_{\mathbb{R}} \longrightarrow^L H$ de la forme (3.6) (pour les deux facteurs), et $\varphi_G = \xi \circ \varphi_H$, donc

$$\varphi_G : z \longmapsto ((z/\overline{z})^{p_i+\alpha}, (z/\overline{z})^{q_j+\beta}) = ((z/\overline{z})^{r_1}, \ldots, (z/\overline{z})^{r_n})$$

pour $z \in \mathbb{C}^\times$. On ne peut pas supposer en général que $r = (r_1, \ldots r_n)$ – supposé régulier – est dominant. On supposera cependant que

$$(3.14) \qquad r_1 > \cdots > r_a, \qquad r_{a+1} > \cdots > r_b\,.$$

La construction des L–groupes fournit un isomorphisme $\widehat{T}_H \longrightarrow \widehat{S}_H$, associé au choix d'un sous–groupe de Borel B_H relatif à H. On suppose que celui–ci est associé aux racines positives usuelles de $T_H(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^\times)^a \times (\mathbb{C}^\times)^b$; on le note B_H^0 (racines dans $GL(a) \times GL(b)$) de sorte que

$$\widehat{T}_H = (\mathbb{C}^\times)^n \longrightarrow \widehat{S}_H = (\mathbb{C}^\times)^n$$

est l'application identique. Rappelons que par construction $\widehat{S}_H \longrightarrow \widehat{S}_G$ est aussi l'identité. Enfin $T_H = T_G$ donne dualement $\widehat{T}_H = \widehat{T}_G$.

La donnée de φ_H et φ détermine deux sous–groupes de Borel dans $\widehat{H}$ et $\widehat{G}$. Pour $\widehat{H}$, φ_H étant dominant, $\widehat{B}_H$ est le sous–groupe de Borel standard. Notons $\alpha_{ij} : t = (t_i) \longmapsto t_i t_j^{-1}$ $(i \neq j)$ une racine. Alors φ détermine un groupe de Borel $\widehat{B} \subset \widehat{G}$ par ses racines :

$$R(\widehat{B}, \widehat{S}) = \{\alpha_{ij} : r_i > r_j\}\,.$$

Noter que $R(\widehat{B}_H, \widehat{S}) \subset R(\widehat{B}, \widehat{S})$.

Dans les applications nécessitées par le livre, on supposera que $b = 1$, donc les autres racines de $R(\widehat{B}, \widehat{S})$ sont données par

$$\begin{array}{lcl} \alpha_{i,n} & : & i < n,\ r_i > r_n \\ -\alpha_{i,n} & : & i < n,\ r_i < r_n\,. \end{array}$$

L'isomorphisme $\widehat{T} = \widehat{S}_G$ implique une correspondance entre sous–groupes de Borel pour G et $\widehat{G}$. Vu le choix, déterminé par φ, de $\widehat{B}$, on définit donc un sous–groupe de Borel B de $G_{\mathbb{C}} = GL(n)/\mathbb{C}$ par

$$R(B, T) = (\alpha_{ij} : r_i > r_j)\,. \tag{3.15}$$

Pour écrire la généralisation du Théorème 3.3, nous devons définir les objets suivants.

Tout d'abord, le facteur de transfert Δ_0 de la Défnnition 3.1 va être remplacé par un facteur Δ_B associé à B (Δ_0 est Δ_{B_0}). Il est donné par la même formule :

$$\Delta_B(\gamma_H, \gamma) = (-1)^{q(h)+q(H)} \chi_B(\gamma) \Delta_B(\gamma^{-1}) / \Delta_{B_H}(\gamma^{-1})$$

où $B_H = B \cap H$ et χ_B est un caractère, dépendant de B, que nous ne préciserons pas ([12], p. 184). Puisque les facteurs de transfert doivent être intrinsèques “à une constante près”, il peut s'écrire en fonction de Δ_0. Soit $\sigma \in \Omega$. Alors il admet une décomposition de Kostant (B étant fixé)

$$\sigma = \sigma_H\ \sigma_*$$

où $\sigma \in \Omega_H = \mathfrak{S}_a \times \mathfrak{S}_b$, et $\sigma_*(B) \cap H = B \cap H$ (points complexes, bien sûr). Alors

$$\Delta_{\sigma(B)} = \det(\sigma_*) \Delta_B$$

où le déterminant est le signe usuel sur Ω. En particulier, si $\sigma(B)=B_0$,

$$\Delta_B = \det(\sigma_*)\Delta_0 \tag{3.16}$$

([12], p. 184). L'analogue dans le cas général du Théorème (3.3) est

$$(\Theta_{\varphi_H}, f^H) = \sum_\pi \Delta_\infty(\varphi_H,\pi)(\Theta_\pi, f)$$

où f et f^H **sont maintenant reliées par le facteur** Δ_B, et où il nous faut expliciter $\Delta_\infty(\varphi_H,\pi)$:

$$\Delta_\infty(\varphi_H, \pi(\varphi,\sigma^{-1}B)) = < a_\sigma, s >$$

où $\omega \in \Omega/\Omega_{\mathbb{R}}$. Noter que, si ce facteur est apparemment identique au précédent, nous avons changé la paramétrisation de $\Pi_G(\varphi)$. Soit $\omega \in \mathfrak{S}_n$ l'unique élément tel que

$$\omega B_0 = B\,.$$

Puisque $R(B,T)$ est donné par (3.15), ω est l'unique élément tel que $\omega^{-1}r$ est dominant. Alors

$$\Delta_\infty(\varphi_H, \pi(\varphi,\sigma^{-1}B_0)) = \Delta_\infty(\varphi_H,\pi(\varphi,\sigma^{-1}\omega^{-1}B)) = < a_{\omega\sigma}, s > \ .$$

Par ailleurs, si $\sigma=\omega^{-1}$, $\sigma B = B_0$, et $\sigma B\cap H = B_0\cap H = B\cap H$ puisque r était en position dominante pour H. Donc $\sigma=\sigma_*$ et, d'après (3.16),

$$\Delta_B = \det(\omega)\Delta_0\,.$$

On a donc enfin "démontré" l'identité générale (cf. Kottwitz, référence ci-dessus) :

Théorème 3.4 (Shelstad, Kottwitz).— *Soit φ_H en position dominante, $\varphi_G = \xi\circ\varphi_H$; soit $\omega\in\Omega$ l'unique élément tel que $\omega^{-1}r$ soit dominant. Alors*

$$(\Theta_{\varphi_H}, f^H) = \sum_\pi \Delta_\infty(\varphi_H,\pi)(\Theta_\pi, f)$$

où $\Delta_\infty(\varphi_H,\pi) = < a_{\omega\sigma}, s > \det(\omega)$

$$\textit{si} \qquad \pi = \pi(\varphi,\sigma^{-1}B_0)\,. \qquad\qquad (\sigma\in\Omega/\Omega_{\mathbb{R}})$$

Rappelons que $< a_{\omega\sigma}, s >$ est donné par (3.13). Cela ne rend pas son calcul évident. Il se simplifie si $b = 1$ et p ou $q = 1$. Par exemple, si $p = 1$ (Cf. ci-dessus, Remarque), de sorte que les représentations π sont paramétrées par $\{1, ..., q + 1\}$, si $\omega = 1$ et $b = 1$, le Lemme 3.2 donne

$$\Delta_\infty(\phi_H, \pi_i) = 1(i \neq q), -1(i = +1).$$

Références

[1] J. Arthur, L. Clozel, *Simple Algebras, base change and the advanced theory of the trace formule, Ann. of Math. Studies,* Princeton University Press, 1989.

[2] N. Bergeron, L. Clozel, *Spectre automorphe des variétés hyperboliques et applications topologiques, Astérisque* **303**, S.M.F., 2005.

[3] A. Bouaziz, *Formule d'inversion d'intégrales orbitales tordues*, Compositio Math. **81** (1992).

[4] G. Chenevier, L. Clozel, *Corps de nombres peu ramifiés et formes automorphes autoduales*, preprint.

[5] G. Chenevier, D. Renard, *On the vanishing of some non semisimple orbital integrals*, preprint.

[6] L. Clozel, *Changement de Base pour les représentations tempérées des groupes réductifs réels, Ann. Sc. É.N.S.,* **15**, (1982), 45–115.

[7] L. Clozel, *Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de $GL(n)$, Publ. IHES,* **73**, (1991), 97–145.

[8] L. Clozel, J.–P. Labesse, *Orbital integrals and distributions*, à paraître dans un volume en l'honneur de F. Shahidi.

[9] M. Harris, *ce volume.*

[10] R. Kottwitz, *Stable trace formula : elliptic singular terms,* Math. Ann. **275** (1986), 365–399.

[11] R. Kottwitz, *Tamagawa numbers, Ann. of Math.* **127** (1988), 629–646.

[12] R. Kottwitz, *Shimura varieties and λ–adic representations, in* Clozel, Milne *eds., Automorphic forms, Shimura varieties, and L–functions* (vol. I), Perspectives in Math., vol. 10, Academic Press, 1988, p. 161–209.

[13] J.–P. Labesse, *Changement de base et séries discrètes, ce volume.*

[14] R.P. Langlands, D. Shelstad, *On the definition of transfer factors,* Math. Ann. **278** (1987), 219–271.

[15] D. Renard, *ce volume.*

[16] J. Rogawski, *Automorphic representations of unitary groups in three variables*, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 1996.

[17] D. Shelstad, *Characters and inner forms of a quasi–split group over* $\mathbb{R}$*,* Compositio Math. **39** (1979, 11–45.

[18] D. Shelstad, *L–indistinguishability for real groups,* Math. Ann. **259** (1982), 385–430.

[19] D. Shelstad, *Base change and a matching theorem for real groups, Non commutative Harmonic analysis and Lie groups,* Springer LN 880 (1981), 425–482.