LEMME FONDAMENTAL D'APRÈS NGÔ BAO-CHÂU

DAT JEAN-FRANÇOIS AND NGO DAC TUAN

1. Préliminaires

1.1. **Notations.** Soit k un corps fini à q éléments. Sauf mention contraire, tous les schémas et les champs considérés dans ce texte seront définis sur k.

Fixons une fois pour toutes X une courbe projective, lisse, géométriquement connexe sur k. On note $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et $\bar{X}$ le produit fibré $X \times_k \bar{k}$. Soit F le corps de fonctions de X, d'anneau des adèles $\mathbb{A}$; on note $\bar{F} = F \times_k \bar{k}$. Pour une place finie v de F, on note $v : F^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$ la valuation associé. Puis F_v sera la complétion de F par rapport à cette valuation, $\mathcal{O}_v$ sera l'anneau des entiers de F_v, k_v sera son corps résiduel et $\deg(v)$ le degré de l'extension k_v/k.

Soit $\mathbb{G}$ un groupe réductif déployé sur k. Fixons une fois pour toutes $\mathbb{T}$ un tore maximal déployé sur k de $\mathbb{G}$ et $\mathbb{B}$ un sous-groupe de Borel de $\mathbb{G}$ qui contient $\mathbb{T}$. Avec la donnée de $(\mathbb{T}, \mathbb{B})$, on notera $\mathbb{W}$ le groupe de Weyl de $\mathbb{G}$ et Φ (resp. Δ) l'ensemble des racines de $\mathbb{G}$ (resp. celui des racines simples). Les algèbres de Lie de $\mathbb{G}$, $\mathbb{T}$, et $\mathbb{B}$ seront notées $\mathbb{g}$, $\mathbb{t}$, et $\mathbb{b}$. On note ad l'action adjointe de $\mathbb{G}$ sur $\mathbb{g}$.

Pour chaque racine simple $\alpha \in \Delta$, on choisit un vecteur non nul x_α dans $\mathbb{g}_\alpha$. Il existe alors un unique vecteur non nul $x_{-\alpha}$ dans $\mathbb{g}_{-\alpha}$ tel que $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = \alpha^\vee$. On pose $x_+ = \sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha$ et $x_- = \sum_{\alpha\in\Delta} x_{-\alpha}$. La donnée de ces vecteurs est appelée *épinglage*.

Soit D un diviseur de X qui s'écrit sous la forme $D = 2D'$ où D' est un diviseur effectif de degré plus grand que g - le genre de la courbe X. On notera $\mathbb{t}_D = \mathbb{t} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D)$ et $\mathbb{g}_D = \mathbb{g} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D)$; ce sont les fibrés vectoriels sur X obtenus en tordant $\mathbb{t}$ et $\mathbb{g}$ par le diviseur D.

Désormais, on suppose que la caractéristique de k ne divise pas le cardinal du groupe de Weyl $\mathbb{W}$ de $\mathbb{G}$.

Exemple : $\mathbb{G} = \mathrm{GL}_n$. Dans ce cas, on prend pour $\mathbb{T}$ le sous-groupe des matrices diagonales et pour $\mathbb{B}$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. L'algèbre de Lie $\mathbb{g}$ (resp. $\mathbb{t}$ et $\mathbb{b}$) est l'algèbre des matrices carrées de taille n (resp. la sous-algèbre des matrices diagonales et des matrices triangulaires supérieures de taille $n \times n$). L'ensemble Φ est l'ensemble des caractères $\alpha_{i,j}$: $\mathrm{diag}(t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{T} \mapsto t_i t_j^{-1}$ pour $i \neq j$, et le sous-ensemble Δ est constitué des $\alpha_{i,i+1}$ pour $i = 1, \cdots, n-1$. L'épinglage est donné par les matrices $x_{i,j}$ ayant une seule entrée non nulle et égale à 1 à la position (i, j). Le groupe $\mathbb{W}$ est le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Un élément $w \in \mathfrak{S}_n$ envoie l'élément $t = \mathrm{diag}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ de $\mathbb{t}$ sur l'élément $\mathrm{diag}(t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \ldots, t_{\sigma(n)})$.

[1]Date: 2 février 2009.

1.2. **Morphisme de Chevalley.** On considère l'action adjointe de $\mathbb{G}$ sur $\mathbb{g}$ et on s'intéresse à l'algèbre $k[\mathbb{g}]^{\mathbb{G}}$ des fonctions $\mathbb{G}$-invariantes sur $\mathbb{g}$. En restreignant à $\mathbb{t}$, on obtient un homomorphisme $k[\mathbb{g}]^{\mathbb{G}} \longrightarrow k[\mathbb{t}]^W$ et on vérifie que c'est en fait un isomorphisme. De plus, on montre que $k[\mathbb{g}]^{\mathbb{G}}$ est une algèbre de polynôme, c'est-à-dire il existe des fonctions régulières homogènes $a_1, a_2, \ldots, a_r$ de degré $d_1, d_2, \ldots, d_r$ dans $k[\mathbb{g}]^{\mathbb{G}}$ telles que $k[\mathbb{g}]^{\mathbb{G}} = k[a_1, a_2, \ldots, a_r]$. Bien que le choix des fonctions homogènes $a_1, a_2, \ldots, a_r$ ne soit pas unique, les entiers $d_1, d_2, \ldots, d_r$ sont uniques à une permutation près. On les appelle les exposants de Kostant de $\mathbb{G}$.

On définit $\mathbb{c} = \operatorname{Spec} k[\mathbb{g}]^{\mathbb{G}} = \operatorname{Spec} k[\mathbb{t}]^W$ et une action de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{c}$ via les exposants de Kostant:

$$t \circ (a_1, a_2, \ldots, a_r) = (t^{d_1} a_1, t^{d_2} a_2, \ldots, t^{d_r} a_r).$$

On considère le morphisme naturel dit "caractéristique de Chevalley" $\chi : \mathbb{g} \longrightarrow \mathbb{c}$. Si $\mathbb{G}_m$ agit sur $\mathbb{g}$ par l'homothétie et sur $\mathbb{c}$ via ses exposants de Kostant, χ est $\mathbb{G}_m$-équivariant, de sorte qu'on a un 1-morphisme de champs :

$$\chi : [\mathbb{g}/(\mathbb{G} \times G_m)] \longrightarrow [\mathbb{c}/\mathbb{G}_m].$$

On va rappeler maintenant la construction due à Kostant d'une section de $\chi : \mathbb{g} \longrightarrow \mathbb{c}$. On a déjà construit un vecteur non nul $x_+ \in \mathbb{g}$; on note $\mathbb{g}^{x_+}$ le centralisateur de x_+ dans $\mathbb{g}$. Alors la restriction de $\mathbb{g} \longrightarrow \mathbb{c}$ au sous-espace $x_- + \mathbb{g}^{x_+}$ est un isomorphisme. L'inverse de cet isomorphisme sera appelé la section de Kostant de $\mathbb{g}$. Notons que cela permet de munir $\mathbb{c}$ d'une structure d'espace affine sous $\mathbb{g}^{x_+}$, et même d'espace vectoriel avec l'origine évidente. Cette structure d'espace vectoriel est compatible à l'action de $\mathbb{G}_m$ définie ci-dessus.

Exemple : $\mathbb{G} = \mathrm{GL}_n$. Dans ce cas, $\mathbb{c}$ est l'espace affine des polynômes unitaires de degré n, et χ envoie une matrice A sur son polynôme caractéristique $\det(X.I_n - A)$. Plus explicitement, l'espace des polynômes unitaires de degré n est isomorphe à $\mathbb{A}^n$ via $(a_1, \cdots, a_n) \mapsto X^n - a_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_0$. Identifiant donc $\mathbb{c}$ à $\mathbb{A}^n$, χ envoie une matrice carrée A de taille n sur le n-uplet

$$a = (\mathrm{tr}(A), \mathrm{tr}(\wedge^2 A), \cdots, \mathrm{tr}(\wedge^n A)).$$

En particulier les exposants de Kostant sont $d_1 = 1, d_2 = 2, \cdots, d_n = n$. Bien que ce ne soit pas tout à fait la section de Kostant, χ a une section bien connue qui envoie un polynôme sur sa matrice "compagnon". La matrice associée à $a = (a_1, \cdots, a_n)$ est la suivante :

$$\epsilon(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & (-1)^{n-1} a_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & (-1)^{n-2} a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

1.3. **Lieux réguliers. Centralisateurs réguliers.** Pour toute racine $\alpha \in \Phi$, on dispose d'une flèche $\mathrm{d}\,\alpha : \mathbb{t} \longrightarrow k$. Le discriminant $\mathfrak{D} = \prod_{\alpha \in \Phi} \mathrm{d}\,\alpha$ est une fonction régulière $\mathbb{W}$-invariante sur $\mathbb{t}$, donc elle est une fonction régulière sur $\mathbb{c}$ et définit un diviseur sur $\mathbb{c}$ noté $\mathfrak{D}$. On montre aisément que c'est un diviseur réduit, cf. [2, Lemme 1.10.1]. Le complémentaire de ce diviseur sera appelé l'ouvert des éléments semisimples réguliers de $\mathbb{c}$ et on le note $\mathbb{c}^{\mathrm{rs}}$.

On a vu que le schéma $\mathbb{c}$ est le schéma quotient de $\mathbb{t}$ par l'action du groupe fini $\mathbb{W}$. Le morphisme $\mathbb{t} \longrightarrow \mathbb{c}$ est donc fini et plat. De plus, au-dessus de l'ouvert régulier $\mathbb{c}^{\mathrm{rs}}$, $\mathbb{t}_{|\mathbb{c}^{\mathrm{rs}}}$ est étale galoisien de groupe de Galois $\mathbb{W}$. Si l'on considère l'action de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{t}$ par l'homothétie et sur $\mathbb{c}$ via les exposants de Kostant, ce morphisme est $\mathbb{G}_m$-équivariant.

On considère le schéma en groupes des centralisateurs I au-dessus de $\mathbb{g}$ défini par

$$I = \{(g, x) \in \mathbb{G} \times \mathbb{g} : \mathrm{ad}(g)x = x\}.$$

Il n'est pas lisse au-dessus de $\mathbb{g}$, ni même plat. On définit l'ouvert régulier $\mathbb{g}^{\mathrm{reg}}$ de $\mathbb{g}$ comme suit. Un $\bar{k}$-point x de $\mathbb{g}$ est dans $\mathbb{g}^{\mathrm{reg}}(\bar{k})$ si et seulement si son centralisateur I_x est de dimension minimale, c'est-à-dire $\dim I_x = \operatorname{rang} G$. On montre qu'au-dessus de cet ouvert $\mathbb{g}^{\mathrm{reg}}$, $I_{|\mathbb{g}^{\mathrm{reg}}}$ est un schéma en groupes commutatifs lisse. Par la descente fidèlement plate, $I_{|\mathbb{g}^{\mathrm{reg}}}$ descend en un schéma en groupes commutatifs lisse J sur $\mathbb{c}$ via le morphisme de Chevalley $\chi : \mathbb{g} \longrightarrow \mathbb{c}$. On obtient donc un isomorphisme G-équivariant $\chi^* J \longrightarrow I$ sur $\mathbb{g}^{\mathrm{reg}}$. Puis, Ngô montre que cet isomorphisme s'étend en un homomorphisme $\chi^* J \longrightarrow I$ sur tout l'espace $\mathbb{g}$. Notons que J est un tore au-dessus du lieu semi-simple régulier $\mathbb{c}^{\mathrm{rs}}$, mais peut avoir des fibres non connexes et une partie additive le long du diviseur $\mathfrak{D}$.

Exemple : $\mathbb{G} = \mathrm{GL}_n$. Dans ce cas, $\mathbb{c}^{\mathrm{rs}}$ est le lieu des polynômes unitaires de degré n qui sont séparables (sans racines multiples). Si $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathfrak{c}(\bar{k}) = \bar{k}^n$ représente le polynôme unitaire $P_a = t^n - a_1 t^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n$, alors, J_a est le groupe des éléments inversibles de l'algèbre $\bar{k}[T]/P_a$. Soit $A \in \mathfrak{g}(\bar{k})$ une matrice de caractéristique a; on fait agir $\bar{k}[T]$ sur $\mathfrak{g}(\bar{k})$ de manière suivante: l'action des éléments de $\bar{k}$ est par la multiplication et l'action de T est par la multiplication avec la matrice A à droite. La flèche obtenue n'est rien d'autre que l'homomorphisme $J_a \longrightarrow I_A$. On vérifie sans peine que si A est régulier, c'est un isomorphisme.

1.4. **Formes quasi-déployées de $\mathbb{G}$ sur X.** Le lemme fondamental concerne des groupes quasi-déployés sur un corps local. Ce sont des formes "extérieures" de groupes déployés. De même ici, on doit considérer des formes extérieures de $\mathbb{G}$ sur X. Une telle forme est donnée par un morphisme

$$\rho : \pi_1(X, x) \longrightarrow \mathrm{Out}(\mathbb{G})$$

(le groupe discret des automorphismes extérieurs de $\mathbb{G}$). Plus précisément, la forme G de $\mathbb{G}$ sur X associée à ρ s'obtient en choisissant un revêtement Galoisien (X_ρ, x_ρ) de (X, x) de groupe noté Θ_ρ et tel que ρ se factorise par $\pi_1(X, x) \longrightarrow \Theta_\rho$, puis en tordant $\mathbb{G}$ par ce torseur. On a donc $G = \mathbb{G} \times^{\Theta_\rho} X_\rho$. Comme $\mathrm{Out}(\mathbb{G})$ s'identifie au sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ qui préserve la paire $(\mathbb{T}, \mathbb{B})$ et l'épinglage des x_α, toutes les constructions précédentes peuvent être tordues pour donner une paire (T, B) dans G au-dessus de X, un groupe de Weyl W, des algèbres de Lie $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{g}$, un quotient $\mathfrak{c} = \mathfrak{t}/W$, son lieu régulier $\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}$, le morphisme de Chevalley $\chi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{c}$, une section de Kostant $\varepsilon : \mathfrak{c} \longrightarrow \mathfrak{g}$ de ce morphisme, ainsi qu'un centralisateur régulier J commutatif et lisse au-dessus de $\mathfrak{c}$ et un morphisme $\chi^* J \longrightarrow I$ de schémas en groupes au-dessus de $\mathfrak{g}$. On remarque que $\mathfrak{c}$ s'identifie au quotient

$$\mathfrak{c} = (\mathbb{t} \times X_\rho)/(\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho).$$

Exemple : groupes unitaires. Pour $\mathbb{G} = \mathrm{GL}_n$, on a $\mathrm{Out}(\mathbb{G}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donc une forme de $\mathbb{G}$ est donnée par un revêtement étale X_ρ de degré 2. L'élément non trivial de $\mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ préservant l'épinglage qu'on a fixé plus haut est donné par $g \mapsto \Phi_n{}^t g^{-1} \Phi_n^{-1}$ où Φ_n est la matrice antidiagonale. La forme associée à X_ρ est le schéma en groupes qui à un X-schéma S associe

$$U_{X_\rho/X}(n)(S) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\Gamma(S \times_X X_\rho, \mathcal{O}_{S\times_X X_\rho})), \Phi_n \tau({}^t g^{-1})\Phi_n^{-1} = g\}$$

où τ est l'automorphisme non-trivial de X_ρ. C'est un groupe unitaire sur X, qui devient isomorphe au groupe constant GL_n après extension à X_ρ.

1.5. **Constructions sur le groupe dual.** Soit $\hat{\mathbb{G}}$ le groupe dual de $\mathbb{G}$ sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$. Sa donnée radicielle s'obtient à partir de celle de $\hat{\mathbb{G}}$ en échangeant racines et coracines. Il vient avec une paire $(\hat{\mathbb{T}}, \hat{\mathbb{B}})$ et même un épinglage $(\hat{x}_\alpha)_\alpha$, et on a $\mathrm{Out}(\mathbb{G}) = \mathrm{Out}(\hat{\mathbb{G}})$.

Soit κ un élément de $\hat{\mathbb{T}}$. On note $\hat{\mathbb{H}} = \hat{\mathbb{H}}(\kappa)$, resp. $\pi_0(\kappa)$, la composante neutre, resp. le groupe des composantes, du centralisateur de κ dans $\hat{\mathbb{G}} \rtimes \mathrm{Out}(\mathbb{G})$. Le groupe $\hat{\mathbb{H}}$ est réductif, contient la paire de Borel $(\hat{\mathbb{T}}, \hat{\mathbb{B}} \cap \hat{\mathbb{H}})$ et est muni de l'épinglage induit par celui de $\hat{\mathbb{G}}$. Le groupe $\pi_0(\kappa)$ est muni de morphismes évidents

$$\mathrm{Out}(\hat{\mathbb{G}}) \longleftarrow \pi_0(\kappa) \longrightarrow \mathrm{Out}(\hat{\mathbb{H}}).$$

D'après [2, 1.9.8], on peut alors prolonger l'inclusion $\mathbb{W}_{\hat{\mathbb{H}}} \hookrightarrow \mathbb{W}_{\hat{\mathbb{G}}}$ en un morphisme

$$\mathbb{W}_{\hat{\mathbb{H}}} \rtimes \pi_0(\kappa) \longrightarrow \mathbb{W}_{\hat{\mathbb{G}}} \rtimes \pi_0(\kappa)$$

compatible avec l'action sur $\hat{\mathbb{T}}$ et la projection sur $\pi_0(\kappa)$.

Au groupe $\hat{\mathbb{H}}$ correspond un groupe réductif déployé $\mathbb{H}$ sur k, muni d'une paire $(\mathbb{T}_\mathbb{H}, \mathbb{B}_\mathbb{H})$ et d'un épinglage, ainsi que d'un isomorphisme $\mathbb{T}_\mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}$ compatible avec le morphisme $\mathbb{W}_\mathbb{H} \rtimes \pi_0(\kappa) \longrightarrow \mathbb{W}_\mathbb{G} \rtimes \pi_0(\kappa)$ évoqué ci-dessus. En particulier, cet isomorphisme induit un morphisme de *transfert*

$$\nu : \mathbb{c}_\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{c}$$

compatible avec l'action de $\pi_0(\kappa)$.

Le transfert n'envoie bien-sûr pas $\mathbb{c}_\mathbb{H}^{\mathrm{rs}}$ dans $\mathbb{c}^{\mathrm{rs}}$. On note $\mathbb{c}_\mathbb{H}^{G-\mathrm{rs}}$ l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{c}^{\mathrm{rs}}$ dans $\mathbb{c}_\mathbb{H}^{\mathrm{rs}}$. On montre que le diviseur $\nu^*(\mathfrak{D})$ est de la forme $\mathfrak{D}_\mathbb{H} + 2\mathfrak{R}_\mathbb{H}^\mathbb{G}$ pour un diviseur réduit effectif $\mathfrak{R}_\mathbb{H}^\mathbb{G}$ de $\mathbb{c}_\mathbb{H}$.

Exemple : $\mathbb{G} = \mathrm{GL}_n$. Dans ce cas, $\mathbb{H}$ est un produit de GL_{n_i} avec $\sum_i n_i = n$, et $\pi_0(\kappa)$ est soit trivial, soit égal à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dans ce dernier cas, $\mathbb{H}$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_{m_{-k}} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m_{-1}} \times (\mathrm{GL}_{n_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_r}) \times \mathrm{GL}_{m_1} \cdots \times \mathrm{GL}_{m_k}$ avec $m_{-i} = m_i$ pour $i = 1, \cdots, k$. L'élément non trivial de $\pi_0(\kappa)$ échange GL_{m_i} et $\mathrm{GL}_{m_{-i}}$ et induit

$g \mapsto \Phi_{n_i}{}^t g^{-1} \Phi_{n_i}^{-1}$ sur chaque GL_{n_i}. De plus, le transfert ν est donné par le produit des polynômes unitaires correspondants.

1.6. **Données endoscopiques.** Une *donnée endoscopique* pour le groupe G est un couple (κ, ρ_κ) avec κ comme ci-dessus et un morphisme $\rho_\kappa : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_0(\kappa)$ qui induit ρ. Le *groupe endoscopique* associé à la donnée (κ, ρ_κ) est alors la forme de $\mathbb{H}$ associée à l'homorphisme $\pi_1(X, x) \longrightarrow \mathrm{Out}(\mathbb{H})$ déduit de ρ_κ. Il est de la forme $H = \mathbb{H} \times^{\Theta_\rho} X_\rho$ si l'on a pris soin de choisir (X_ρ, x_ρ) (voir plus haut) de sorte que ρ_κ se factorise par Θ_ρ. Le morphisme de transfert $\nu : \mathbb{c}_{\mathbb{H}} \longrightarrow \mathbb{c}$ passe à la torsion par ρ_κ pour donner un transfert

$$\nu : \mathfrak{c}_H \longrightarrow \mathfrak{c}.$$

Exemple : groupes linéaires. Si $G = \mathrm{GL}_n$, les groupes endoscopiques sont isomorphes à des sous-groupes de Levi de G, c'est-à-dire de la forme $H = \prod_i \mathrm{GL}_{n_i}$ avec $\sum_i n_i = n$.

Exemple : groupes unitaires. Soit G le groupe unitaire associé au revêtement X_ρ de degré 2 de X. Pour une donnée endoscopique, on doit avoir $\pi_0(\kappa)$ non trivial, donc égal à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Avec les notations ci-dessus, le groupe endoscopique H est de la forme $\mathrm{GL}_{m_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m_k} \times U_{X_\rho/X}(n_1) \times \cdots \times U_{X_\rho/X}(n_r)$. Un tel groupe est isomorphe à un sous-groupe de Levi si et seulement si $r = 1$ (et éventuellement $n_1 = 0$).

2. Lemme fondamental et fibres de Springer affines

Il s'agit de la partie locale de la théorie. Soit G un groupe du type décrit au paragraphe 1.4 dont on reprend les notations. Fixons un point fermé v de X, notons $\mathcal{O}_v$ son anneau local complété, F_v le corps des fractions de celui-ci et Γ_v un groupe de décomposition en v du groupe de Galois de $F(X)$. Fixons aussi un point

$$a \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v) \cap \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(F_v).$$

2.1. **Intégrales orbitales.** Le point a définit une classe de conjugaison *stable* semi-simple régulière $\chi^{-1}(a)$ de $\mathfrak{g}(F_v)$, ainsi qu'un représentant de Kostant $\gamma_0 = \varepsilon(a) \in \mathfrak{g}(F_v)$ de cette classe. Les centralisateurs des éléments de $\chi^{-1}(a)$ sont des tores, tous *canoniquement* isomorphes à celui de γ_0, que l'on note I_{γ_0}. Ils sont aussi canoniquement isomorphes au tore $J_a := \mathbb{T} \wedge^{\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho} \pi_\rho^{-1}(a)$ obtenu en tordant $\mathbb{T}$ par le $\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho$-torseur $\pi_\rho^{-1}(a)$ au-dessus de $\mathrm{Spec}(F_v)$, où $\pi_\rho : \mathbb{t} \times X_\rho \longrightarrow \mathfrak{c}$ est la projection canonique. Notons qu'un tel torseur est donné par un morphisme

$$\pi_{\rho,a} : \Gamma_v \longrightarrow \mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho$$

qui relève la restriction $\rho_{|\Gamma_v} : \Gamma_v \longrightarrow \Theta_\rho$ de ρ à Γ_v.

Si $\gamma \in \chi^{-1}(a)$, le transporteur de γ sur γ_0 dans G est un torseur sous le centralisateur de γ_0 donc définit un torseur sous J_a. L'application ainsi obtenue

$$\chi^{-1}(a) \longrightarrow H^1(F_v, J_a) \;\; \gamma \mapsto \mathrm{inv}(\gamma, \gamma_0)$$

induit une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison dans $\chi^{-1}(a)$ et le "noyau" $\ker(H^1(F_v, J_a) \longrightarrow H^1(F_v, G))$. Le groupe $H^1(F_v, J_a)$ peut se calculer au moyen de la dualité de Tate-Nakayama. Celle-ci fournit un accouplement parfait

$$\langle\, ,\, \rangle : H^1(F_v, J_a) \times \pi_0(\hat{\mathbb{T}}^{\pi_{\rho,a}(\Gamma_v)}) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Étant donné un caractère κ de $H^1(F_v, J_a)$, on définit la κ-intégrale orbitale d'une fonction localement constante f sur $\mathfrak{g}(F_v)$

$$\mathbf{O}_a^\kappa(f, \mathrm{d}t_v) = \sum_{\gamma \in \chi^{-1}(a)/\mathrm{conj}} \langle \kappa, \mathrm{inv}(\gamma, \gamma_0)\rangle \mathbf{O}_\gamma(f, \mathrm{d}t_v),$$

où la somme porte sur les classes de conjugaison dans la classe stable $\chi^{-1}(a)$ et

$$\mathbf{O}_\gamma(f, \mathrm{d}t_v) = \int_{I_\gamma(F_v)\backslash G(F_v)} f\left(\mathrm{ad}(g_v^{-1})\gamma\right) \frac{\mathrm{d}g_v}{\mathrm{d}t_v}$$

désigne l'intégrale orbitale de f en γ pour la mesure de Haar $\mathrm{d}t_v$ sur $J_a(F_v)$ (identifié au centralisateur de γ) et la mesure de Haar $\mathrm{d}g_v$ normalisée par $G(\mathcal{O}_v)$ sur $G(F_v)$.

2.2. **Lemme fondamental.** Fixons maintenant une donnée endoscopique (κ, ρ_κ), ainsi qu'un élément $a_H \in \mathfrak{c}_H(\mathcal{O}_v)$ d'image a dans $\mathfrak{c}(\mathcal{O}_v)$. Comme ci-dessus, on en déduit un morphisme $\pi_{a_H,\rho} : \Gamma_v \longrightarrow \mathbb{W}_{\mathbb{H}} \rtimes \Theta_\rho$, dont le morphisme précédent $\pi_{a,\rho}$ se déduit par composition avec le morphisme naturel $\mathbb{W}_{\mathbb{H}} \rtimes \Theta_\rho \longrightarrow \mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho$ de 1.5. Il s'ensuit que l'isomorphisme $\mathbb{T}_{\mathbb{H}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}$ induit un isomorphisme $J_{H,a_H} \xrightarrow{\sim} J_a$, et par conséquent des identifications

$$H^1(F_v, J_{H,a_H})^* = H^1(F_v, J_a)^* = \pi_0(\hat{\mathbb{T}}^{\pi_{a,\rho}(\Gamma_v)}) = \pi_0(\hat{\mathbb{T}}^{\pi_{a_H,\rho}(\Gamma_v)}).$$

Par définition, l'élément κ est dans $\hat{\mathbb{T}}^{\pi_{a,\rho}(\Gamma_v)}$ et définit donc un caractère des groupes $H^1(F_v, J_{H,a_H})$ et $H^1(F_v, J_a)$. De plus, tout choix de mesure de Haar $\mathrm{d}t_v$ sur $J_a(F_v)$ en détermine un sur $J_{H,a_H}(F_v)$.

Le lemme fondamental est l'égalité suivante :

$$\mathbf{O}_a^\kappa(1_{\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)}, \mathrm{d}t_v) = q^{r_{H,v}^G(a_H)} \mathbf{O}_{a_H}^\kappa(1_{\mathfrak{h}(\mathcal{O}_v)}, \mathrm{d}t_v)$$

où $r_{H,v}^G(a_H) = \deg_v(a_H^* \mathfrak{R}_H^G)$.

On notera que κ est dans le centre de $\hat{\mathbb{H}}$, donc le caractère qu'il définit sur $H^1(F_v, J_{H,a_H})$ est trivial sur le noyau de $H^1(F_v, J_{H,a_H}) \longrightarrow H^1(F_v, H)$. En d'autres termes, on a $\langle \kappa, \mathrm{inv}(\gamma_H, \gamma_{H,0})\rangle = 1$ pour tout γ_H dans $\chi_H^{-1}(a_H)$. Le membre de droite de l'égalité ci-dessus est donc l'*intégrale orbitale stable* en a_H.

2.3. **Fibres de Springer affine.** Notons $X_v := \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)$ le disque formel en v et $X_v^\bullet := \mathrm{Spec}(F_v)$ le disque épointé. Pour un k-schéma S, on note $X_v \hat{\times} S$ la complétion v-adique de $X_v \times S$ et $X_v^\bullet \hat{\times} S$ le complémentaire de $\{v\} \times S$. Enfin, notons E_0 le G-torseur trivial sur $X_v^\bullet$.

La fibre de Springer affine $\mathcal{M}_v(a)$ associée à a peut se définir comme le champ qui à S associe le groupoïde

$$\mathcal{M}_v(a,S) := \left\{ (E,\varphi,\iota), \begin{array}{l} E \text{ un } G\text{-torseur sur } X_v \hat{\times} S, \\ \varphi \text{ une section de } \mathfrak{g} \wedge^G E \text{ sur } X_v \hat{\times} S \\ \iota \text{ un isomorphisme } (E,\varphi)_{|X_v^\bullet \hat{\times} S} \xrightarrow{\sim} (E_0,\gamma_0) \end{array} \right\}.$$

Ce groupoïde est en réalité discret, *i.e.* équivalent à l'ensemble de ses classes d'isomorphisme. En particulier, on a

$$\mathcal{M}_v(a,k) \simeq \{g \in G(F_v)/G(\mathcal{O}_v),\ \mathrm{ad}(g)^{-1}(\gamma_0) \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)\}.$$

On montre que $\mathcal{M}_v(a)$ est représentable par un ind-schéma sur k.

Soit (E,φ,ι) un triplet comme ci-dessus. Le morphisme $\chi^*J \longrightarrow I$ induit un morphisme $J_a \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(E,\varphi)$, ce qui permet de tordre (E,φ) par tout J_a-torseur. On en déduit une action sur $\mathcal{M}_v(a)$ du champ de Picard (ou "champ en groupes abéliens") $\mathcal{P}_v(a)$ qui à S associe le groupoïde

$$\mathcal{P}_v(a,S) := \left\{ (F,\iota), \begin{array}{l} F \text{ un } J_a\text{-torseur sur } X_v \hat{\times} S, \\ \iota \text{ une trivialisation de } F \text{ sur } X_v^\bullet \hat{\times} S \end{array} \right\}.$$

Ici encore, ce groupoïde est équivalent à l'ensemble de ses classes d'isomorphisme, lequel est un groupe abélien. Par exemple,

$$\mathcal{P}_v(a,k) \simeq J_a(F_v)/J_a(\mathcal{O}_v) \simeq I_{\gamma_0}(F_v)/I_{\gamma_0}(\mathcal{O}_v)$$

agit de la manière évidente sur $\mathcal{M}_v(a,k)$. On montre que $\mathcal{P}_v(a)$ est représentable par un ind-schéma en groupes sur k.

Exemple : groupes linéaires et unitaires. Pour $G = \mathrm{GL}_n$, $\mathcal{M}_v(a,k)$ s'identifie à l'ensemble des $\mathcal{O}_v$-réseaux γ_0-stables de F_v^n. Pour un groupe unitaire, $\mathcal{M}_v(a,k)$ s'identifie à l'ensemble des $\mathcal{O}(X_v \times_X X_\rho)$-réseaux autoduaux dans $(F_v \otimes_{F(X)} F(X_\rho))^n$.

2.4. **Quotients naïfs et intégrales orbitales.** Rappelons que si M est un ensemble sur lequel agit un groupe P, on peut former le groupoïde quotient $[M/P]$ dont les objets sont les éléments de M et les morphismes sont donnés par l'action de P. Lorsque le quotient M/P est fini et les fixateurs des éléments de M dans P sont finis, alors on définit le cardinal de $[M/P]$ par

$$\sharp[M/P] := \sum_{m \in M/P} \frac{1}{\sharp \mathrm{Aut}_{[M/P]}(m)}.$$

On remarque alors d'après le paragraphe précédent que

$$\sharp[\mathcal{M}_v(a,k)/\mathcal{P}_v(a,k)] = \mathbf{O}_{\gamma_0}(1_{\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)}, \mathrm{d}t_v)$$

pour la mesure de Haar normalisée par $J_a(\mathcal{O}_v)$.

2.5. **Quotients champêtres et κ-intégrales orbitales.** Supposons maintenant que M est un k-schéma sur lequel agit un k-schéma en groupes. On peut alors former le champ quotient $[M/P]$, comme le champ "associé" au pré-champ $S \mapsto [M(S)/P(S)]$. Le groupoïde $[M/P](k)$ admet deux descriptions utiles :

$$\begin{aligned}[M/P](k) &= \{(Q,j),\, Q \text{ un } P\text{-torseur sur } k \text{ et } j : Q \longrightarrow M \text{ un } k\text{-}P\text{-morphisme } \}\\ &= \{(m,p) \in M(\bar{k}) \times P(\bar{k}),\, p.\sigma(m) = m\}\end{aligned}$$

avec σ le Frobenius de $\bar{k}$. On voit bien sur la première description qu'on a une application

$$\mathrm{cl} : \, [M/P](k) \longrightarrow H^1(k,P).$$

Etant donné un caractère κ de $H^1(k,P)$, et en supposant que l'ensemble des classes d'isomorphismes et les groupes d'automorphismes sont finis, on définit alors le comptage κ-pondéré par la formule

$$\sharp[M/P](k)_\kappa = \sum_{x\in[M/P](k)/\sim} \frac{(\mathrm{cl}(x),\kappa)}{\sharp\,\mathrm{Aut}(x)}$$

L'hypothèse de finitude est vérifiée dans le cas de l'action de $\mathcal{P}_v(a)$ sur $\mathcal{M}_v(a)$, cf paragraphe 4.1. Par un théorème de Steinberg donnant le premier isomorphisme ci-dessous, on a un morphisme

$$\begin{aligned}H^1(F_v,J_a) &\simeq H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), J_a(F_v\otimes_k \bar{k}))\\ &\longrightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), J_a(F_v\otimes_k \bar{k})/J_a(\mathcal{O}_v\otimes_k \bar{k})) = H^1(k,\mathcal{P}_v(a)),\end{aligned}$$

qui d'ailleurs est un isomorphisme si la fibre spéciale de J_a est connexe. Ainsi un caractère κ de $H^1(k,\mathcal{P}_v(a))$ induit un caractère encore noté κ de $H^1(F_v,J_a)$. Le lien entre κ-intégrales orbitales et fibres de Springer affines est alors donné par la proposition suivante, cf. [2, proposition 8.2.7], qui est une élaboration des travaux de Kottwitz, Goresky et MacPherson.

Proposition 2.6. *Avec les notations ci-dessus on a*

$$\sharp[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(a)](k)_\kappa = \mathbf{O}_a^\kappa(1_{\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)}, \mathrm{d}\,t_v),$$

où $\mathrm{d}\,t_v$ *la mesure de Haar normalisée par* $J_a^0(\mathcal{O}_v)$ *avec* J_a^0 *la composante neutre de* J_a*. De plus, si* κ' *est un caractère de* $\mathrm{H}^1(F_v,J_a)$ *qui ne provient pas d'un caractère de* $\mathrm{H}^1(k,\mathcal{P}_v(a))$*, alors la* κ'*-intégrale orbitale* $\mathbf{O}_a^{\kappa'}(1_{\mathfrak{g}_v}, \mathrm{d}\,t_v)$ *est nulle.*

Ce résultat est plus facile à prouver lorsque J_a est à fibres connexes. Si ce n'est pas le cas, on prouve d'abord un résultat pour un modèle connexe de J_{a,F_v} sur $\mathcal{O}_v$, *i.e.* un schéma en groupes lisse abélien à fibres connexes J'_a sur $\mathcal{O}_v$ muni d'un morphisme $J'_a \longrightarrow J_a$ qui est un isomorphisme en fibres génériques. Pour un tel J'_a, on peut considérer le champ $\mathcal{P}_v(J'_a)$ des J'_a-torseurs trivialisés sur F_v, lequel agit encore sur $\mathcal{M}_v(a)$. Cette fois on a un isomorphisme $H^1(F_v,J_a) \xrightarrow{\sim} H^1(k,\mathcal{P}_v(J'_a))$. La formule obtenue, cf. [2, proposition 8.2.5], devient

Proposition 2.7. *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$\sharp[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa = \mathrm{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v), \mathrm{d}\,t_v) \cdot \mathbf{O}^\kappa_a(1_{\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)}, \mathrm{d}\,t_v),$$

où $\mathrm{d}\,t_v$ *est n'importe quelle mesure de Haar de* $J_a(F_v)$.

Rappelons que le discriminant $\mathfrak{D}$ est une fonction régulière sur $\mathfrak{c}$. Dans le cas où $v(\mathfrak{D}(a)) \leq 1$, on peut calculer explicitement les comptages $\sharp[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa$ et $\sharp[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a)](k)_\kappa$, cf. [2, section 8.3].

3. Fibration de Hitchin

Ici encore, G désigne un groupe du type décrit au paragraphe 1.4.

3.1. **Champ de Hitchin.** Commençons par définir la notion de paire de Higgs. Soit S un k-schéma; on appelle une paire de Higgs sur S la donnée d'un couple (E, φ) où E est un G-torseur sur le produit fibré $X \times S$ et φ est une section globale sur $X \times S$ du fibré vectoriel $\mathrm{ad}(E) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D)$. Ici $\mathrm{ad}(E)$ désigne le fibré vectoriel $\mathfrak{g} \times^G E$ tordu de $\mathfrak{g}$ par le G-torseur E pour l'action adjointe de G sur $\mathfrak{g}$. Le torseur E sera appelé le fibré de Higgs et la section φ sera appelée le champ de Higgs.

Introduisons maintenant le champ de Hitchin $\mathcal{M}$ classifiant les paires de Higgs. Soit S un k-schéma; $\mathcal{M}(S)$ est le groupoïde dont les objets sont des paires de Higgs sur S et les morphismes sont des isomorphismes entre ces paires. Soit $S' \longrightarrow S$ un morphisme entre deux k-schémas, le pull-back induit un foncteur $\mathcal{M}(S) \longrightarrow \mathcal{M}(S')$. Ainsi la collection des groupoïdes $\mathcal{M}(S)$ lorsque S parcourt la catégorie des k-schémas définit un champ $\mathcal{M}$ appelé le champ de Hitchin.

Dans le langage des champs, on peut réinterpréter cette définition comme suit. Soit $\mathbb{B}G$ (resp. $\mathbb{B}\mathbb{G}_m$) le champ algébrique classifiant les G-torseurs sur k (resp. les fibrés inversibles sur k). Ainsi pour tout k-schéma S, $\mathbb{B}G(S)$ est la catégorie dont les objets sont les G-torseurs sur S et les morphismes sont les isomorphismes entre de tels fibrés. On note $h_D : X \longrightarrow \mathbb{B}\mathbb{G}_m$ le morphisme qui correspond au fibré inversible $\mathcal{O}_X(D)$.

Soit S un k-schéma. La donnée d'un fibré de Higgs E sur $X \times S$ est équivalente à celle d'une flèche

$$h_E : X \times S \longrightarrow \mathbb{B}G.$$

Puis la donnée d'un champ de Higgs φ est équivalente à celle d'une flèche

$$h_{E,\varphi} : X \times S \longrightarrow [\mathfrak{g}/G \times \mathbb{G}_m]$$

au-dessus de $h_E \times h_D : X \times S \longrightarrow \mathbb{B}G \times \mathbb{B}\mathbb{G}_m$.

On définit l'espace de Hitchin $\mathcal{A}$ comme le foncteur qui associe à tout schéma S l'ensemble des flèches $X \times S \longrightarrow [\mathfrak{c}/\mathbb{G}_m]$ au-dessus de $h_D : X \times S \longrightarrow \mathbb{B}\mathbb{G}_m$. On voit aisément que $\mathcal{A}$ est l'espace des sections globales du fibré vectoriel $\mathfrak{c}_D = \mathfrak{c} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D)$.

Définissons maintenant le morphisme de Hitchin. La façon la plus simple est d'utiliser la description champêtre des paires de Higgs. Soit S un schéma; un S-point de $\mathcal{M}$ consiste en la donnée de deux flèches $h_E : X \times S \longrightarrow \mathbb{B}G$ et $h_{E,\varphi} : X \times S \longrightarrow [\mathfrak{g}/G \times \mathbb{G}_m]$ telles que le diagramme naturel soit commutatif. En composant $h_{E,\varphi}$

avec le morphisme de Chevalley $\chi : [\mathfrak{g}/G\times\mathbb{G}_m] \longrightarrow [\mathfrak{c}/\mathbb{G}_m]$, on obtient un S-point de $\mathcal{A}$. Le morphisme que l'on vient de définir est appelé le morphisme caractéristique de Hitchin et il est noté:

$$m : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{A}.$$

Pour tout point $a \in \mathcal{A}$, on notera $\mathcal{M}_a$ la fibre $m^{-1}(a)$ au dessus de a et on considérera $\mathcal{M}$ comme une famille des fibres $\mathcal{M}_a$ lorsque a varie.

Introduisons quelques sous-schémas ouverts de $\mathcal{A}$ sur lesquels on va travailler dans la suite. Remarquons que l'on peut identifier l'ensemble $\mathcal{A}(\bar{k})$ des $\bar{k}$-points de $\mathcal{A}$ à un sous-ensemble de $\mathfrak{c}(F \otimes_k \bar{k})$. Sous cette identification, on définit le sous-schéma $\mathcal{A}^\heartsuit$ (resp. $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$) de manière suivante: un $\bar{k}$-point de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}^\heartsuit$ (resp. $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$) si et seulement si, étant considéré comme un élément de $\mathfrak{c}(F \otimes_k \bar{k})$, il est régulier semisimple (resp. régulier semisimple et elliptique). On vérifie aisément que ce sont des sous-schémas ouverts de $\mathcal{A}$.

Pour tout point géométrique $a \in \mathcal{A}(\bar{k})$ considéré comme un morphisme $a : \bar{X} \longrightarrow \mathfrak{c}_D$, on définit U_a comme l'image inverse dans $\bar{X}$ de $\mathfrak{c}_D^{\mathrm{rs}}$; lorsque $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$, c'est un ouvert dense de $\bar{X}$.

On définit le revêtement caméral $\tilde{X}$ en formant le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \longrightarrow & \mathfrak{t}_D \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathfrak{c}_D. \end{array}$$

Soit $a \in \mathcal{A}(\bar{k})$ un $\bar{k}$-point de $\mathcal{A}$, on obtient un revêtement dit caméral $\tilde{X}_a$ de $\bar{X}$. On vérifie facilement que si a est régulier, alors le revêtement $\tilde{X}_a \longrightarrow \bar{X}$ est génériquement un torseur sous W et la courbe $\tilde{X}_a$ est réduite.

On notera $\mathcal{M}^\heartsuit$ (resp. $\mathcal{M}^{\mathrm{ani}}$) le sous-champ ouvert de $\mathcal{M}$ défini comme l'image inverse de $\mathcal{A}^\heartsuit$ (resp. $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$) via le morphisme de Hitchin m. Les propriétés importantes de ces sous-champs peuvent être résumées dans le théorème suivant qui est dû à Biswas-Ramanan, Faltings et Nitsure.

Théorème 3.2. *Avec les notations ci-dessus,*

i) $\mathcal{M}^\heartsuit$ est un champ lisse.

ii) Supposons que G est semisimple, alors le morphisme de Hitchin $\mathcal{M}^{\mathrm{ani}} \longrightarrow \mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$ au-dessus de l'ouvert $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$ est propre. De plus, le champ $\mathcal{M}^{\mathrm{ani}}$ est de Deligne-Mumford.

Exemple : $G = \mathrm{GL}_n$. La donnée d'une paire de Higgs (E, φ) sur un schéma S est équivalente à la donnée d'un fibré vectoriel E de rang n sur $X \times S$ muni d'un endomorphisme tordu $\varphi : E \longrightarrow E \otimes \mathcal{O}(D)$. L'espace affine de Hitchin est alors simplement

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{1\leq i\leq n} \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(iD))$$

et le morphisme caractéristique de Hitchin m envoie une paire (E, φ) sur le point

$$(\mathrm{tr}(\varphi), \mathrm{tr}(\wedge^2\varphi), \ldots, \mathrm{tr}(\wedge^n\varphi)) \in \mathcal{A}$$

où $\mathrm{tr}(\wedge^i\varphi))$ est la trace du morphisme $\wedge^i\varphi : \wedge^i E \longrightarrow \wedge^i E \otimes \mathcal{O}_X(iD)$.

Soit $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un $\bar{k}$-point de $\mathcal{A}$ qui correspond à une collection de sections globales des fibrés vectoriels $a_i \in \mathrm{H}^0(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(iD))$. En évaluant ces sections au point générique de $\bar{X}$, on obtient un polynôme $P_a(t) = t^n - a_1 t^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n$ à coefficients dans $F \otimes_k \bar{k}$. On voit que a est régulier (resp. régulier elliptique) si et seulement si P_a n'a que des racines simples (resp. est irréductible).

Exemple : groupes unitaires. Si G est un groupe unitaire associé à un revêtement X_ρ de degré 2, le champ de Hitchin classifie les "fibrés hermitiens" munis d'un "endomorphisme hermitien tordu". Le morphisme de Hitchin est encore donné par l'application polynôme caractéristique.

3.3. **Groupes des symétries.** On renvoie à la section 1.3 pour la définition du centralisateur régulier J au-dessus de $\mathfrak{c}$. Comme J est $\mathbb{G}_m$-équivariant, on peut descendre J en un schéma en groupes commutatifs lisse sur le champ quotient $[\mathfrak{c}/\mathbb{G}_m]$. On note celui-ci encore J et on l'appelle toujours le schéma en groupes des centralisateurs réguliers.

Soit a un S-point de $\mathcal{A}$; c'est équivalent à donner une flèche $a : X \times S \longrightarrow [\mathfrak{c}/\mathbb{G}_m]$. En prenant l'image inverse de J, on obtient un schéma en groupes commutatifs $J_a = a^*J$ sur $X \times S$ et on introduit $\mathcal{P}_a$ le champ classifiant des J_a-torseurs sur $X \times S$. Soit $(E, \varphi) \in \mathcal{M}_a$; la flèche $\chi^*J \longrightarrow I$ sur $\mathfrak{g}$ induit une flèche

$$\chi^* J_a \longrightarrow \mathrm{Aut}(E, \varphi).$$

Ainsi, on peut tordre cette paire par n'importe quel J_a-torseur et on obtient donc une action de $\mathcal{P}_a$ sur $\mathcal{M}_a$. Lorsque l'on varie a, $\mathcal{P}_a$ s'organise en famille et définit un champ $\mathcal{P}$ au-dessus de $\mathcal{A}$. C'est un champ algébrique qui agit sur le champ de Hitchin $\mathcal{M}$. On notera $\mathcal{P}^\heartsuit$ (resp. $\mathcal{P}^{\mathrm{ani}}$) la restriction de $\mathcal{P}$ au-dessus de l'ouvert $\mathcal{A}^\heartsuit$ (resp. $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$).

On montre que $\mathcal{P}^\heartsuit$ est un champ relativement lisse au-dessus de $\mathcal{A}^\heartsuit$. On peut alors définir le faisceau en groupes commutatifs $\pi_0(\mathcal{P})$ des composantes connexes de $\mathcal{P}^\heartsuit$ pour la topologie étale sur $\mathcal{A}^\heartsuit$. Sa fibre en un point géométrique $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$ est le groupe des composantes connexes de $\mathcal{P}_a$:

$$[\pi_0(\mathcal{P})]_a = \pi_0(\mathcal{P}_a).$$

Le lien entre l'action de $\mathcal{P}_a$ et l'endoscopie viendra du résultat suivant, dont la preuve utilise d'ailleurs une technique de Kottwitz classique pour traduire des résultats de cohomologie Galoisienne en termes de L-groupes.

Proposition 3.4. [1, Prop. 6.8] *Il existe un homomorphisme canonique*

$$\mathbb{X}_* T \times^W \mathrm{Irr}(\tilde{X}_a) \to \pi_0(\mathcal{P}_a)$$

et c'est un isomophisme si G est adjoint. Cet homomorphisme s'organise en famille. De plus, si G est semisimple, a est dans $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}(\bar{k})$ si et seulement si $\pi_0(\mathcal{P}_a)$ est fini.

Exemple : $G = \mathrm{GL}_n$. Reprenons les notations de l'exemple du paragraphe précédent. Fixons une caractéristique $a \in \mathcal{A}(\bar{k})$ régulière, autrement dit $a \in \mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$. On définit la courbe spectrale Y_a associé à a; c'est une courbe tracée sur l'espace total Σ_D du fibré inversible $\mathcal{O}_{\bar{X}}(D)$ donnée par l'équation

$$t^n - a_1 t^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n = 0.$$

C'est un revêtement fini de $\bar{X}$ qui est génériquement étale Galoisien de groupe de Galois $W = \mathfrak{S}_n$. On voit bien que la condition que a est régulier (resp. régulier elliptique) entraîne que la courbe Y_a est réduite (resp. irréductible). Vue la forme explicite de J_a donnée dans l'exemple du paragraphe 1.3, on voit aussi que le groupe des symétries $\mathcal{P}_a$ est le champ de Picard de Y_a qui classifie les fibrés inversibles sur Y_a. Beauville, Biswas et Ramanan ont montré que la fibre $\mathcal{M}_a$ peut se voir comme le champ classifiant les faisceaux cohérents sans torsion de rang générique 1 sur Y_a. Avec ces identifications, l'action de $\mathcal{P}_a$ sur $\mathcal{M}_a$ est donnée par le produit tensoriel $\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}$ d'un fibré inversible $\mathcal{L}$ sur Y_a avec un faisceau cohérent sans torsion $\mathcal{F}$ de rang générique 1.

Ces constructions se généralisent aux groupes unitaires, et plus généralement aux groupes classiques.

3.5. **Formule de produit.** On veut établir un lien entre le contexte global et le contexte local. On se donne un $\bar{k}$-point a de $\mathcal{A}$; on le considère aussi comme un morphisme $a : \bar{X} \longrightarrow [\mathfrak{c}/\mathbb{G}_m]$. Rappelons qu'on a déjà défini U_a comme l'ouvert de $\bar{X}$ des points réguliers défini par a. Puis on considère le champ quotient $[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}_a]$. A priori, c'est une 2-catégorie mais on vérifie aisément que c'est en fait une 1-catégorie. Soit S un $\bar{k}$-schéma; $[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}_a](S)$ est le groupoide dont les objets sont des paires de Higgs (E,φ) de caractéristique a et les morphismes entre deux telles paires (E,φ) et (E',φ') consistent en un élément $p \in \mathcal{P}_a(S)$ et un isomorphisme

$$p \circ (E,\varphi) \xrightarrow{\sim} (E',\varphi').$$

Proposition 3.6 (Formule de produit). *Avec les notations ci-dessus, on a une équivalence de catégories:*

$$[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}_a] = \prod_{v \in \bar{X}-U_a} [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(a)].$$

On se content d'expliquer le foncteur de la catégorie $\prod_{v\in\bar{X}-U_a}[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(a)]$ vers la catégorie $[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}_a]$. Soit $(x_v)_{v\in\bar{X}-U_a}$ une famille d'éléments de $(\mathcal{M}_v(a))_{v\in\bar{X}-U_a}$. On considère la paire de Higgs (E,φ) sur $\bar{X}$ définie par la section de Kostant au-dessus de a. L'isomorphisme sur le disque pointé $X_v^\bullet = \bar{X}\times_{\bar{k}}\bar{F}_v$ permet de recoller la restriction de (E,φ) sur U_a avec les données locales $(x_v)_{v\in\bar{X}-U_a}$ pour obtenir une nouvelle paire de Higgs (E',φ') sur $\bar{X}$. Ainsi on obtient un foncteur $\prod_{v\in\bar{X}-U_a}\mathcal{M}_v(a) \longrightarrow \mathcal{M}_a$. Il est compatible avec l'action de $\prod_{v\in\bar{X}-U_a}\mathcal{P}_v(a)$ et de $\mathcal{P}_a$, donc on obtient un foncteur

$\prod_{v\in\bar{X}-U_a}[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(a)] \longrightarrow [\mathcal{M}_a/\mathcal{P}_a]$. Une démonstration du fait que ce foncteur est pleinement fidèle et essentiellement surjectif se trouve dans [1, Théorème 4.6][1].

Rappelons que du côté de la formule des traces, pour pouvoir exprimer l'intégrale orbitale globale comme un produit des intégrales orbitales locales, on a besoin d'extraire le facteur de volume. La formule ci-dessus est l'interprétation géométrique de cette opération.

3.7. **Invariant δ.** Soit $a \in \mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$; on le considère comme un morphisme $a : \bar{X} \longrightarrow \mathfrak{c}_D$. Rappelons que U_a est l'ouvert de $\bar{X}$ des points réguliers défini par a. Au-dessus de U_a, le schéma en groupes commutatifs lisse J_a est un tore. En dehors de U_a, il a aussi un facteur unipotent. D'après Raynaud et al, il existe un modèle de Néron $J_a^\flat$ de J_a sur $\bar{X}$. C'est un schéma en groupes commutatifs lisse sur $\bar{X}$ muni d'un homomorphisme $J_a \longrightarrow J_a^\flat$ qui est un isomorphisme sur U_a et qui est maximal pour ces propriétés. Ceci signifie que pour tout homomorphisme $J_a \longrightarrow J'_a$ qui est un isomorphisme sur U_a avec J'_a un schéma en groupes commutatifs lisse sur $\bar{X}$, il existe un homomorphisme $J'_a \longrightarrow J_a^\flat$ rendant commutatif le diagramme évident. Le modèle de Néron $J_a^\flat$ peut être construit explicitement à partir de la courbe camérale $\tilde{X}_a$, cf. [2, corollaire 4.8.1]. On notera $\mathcal{P}_a^\flat$ le champ classifiant les $J_a^\flat$-torseurs sur $\bar{X}$. L'homomorphisme $J_a \longrightarrow J_a^\flat$ induit un homomorphisme $\mathcal{P}_a \longrightarrow \mathcal{P}_a^\flat$. Ngô montre:

Proposition 3.8. [2, Prop 4.8.2]
i) L'homomorphisme $\mathcal{P}_a(\bar{k}) \longrightarrow \mathcal{P}_a^\flat(\bar{k})$ est surjectif.
ii) Le composante connexe de $\mathcal{P}_a^\flat$ est un champ abélien.
iii) Le noyau $\mathcal{R}_a$ de $\mathcal{P}_a \longrightarrow \mathcal{P}_a^\flat$ est un groupe algébrique affine qui peut s'écrire comme un produit des groupes algébriques affines locaux.

L'invariant δ_a mesure la dimension de la partie affine de $\mathcal{P}_a$:

$$\delta_a := \dim \mathcal{R}_a.$$

Exemple : $G = \mathrm{GL}_n$. Reprenons les notations de l'exemple du paragraphe précédent. On considère $\xi : Y_a^\flat \longrightarrow Y_a$ la normalisation de la courbe spectrale Y_a. La flèche $\mathcal{L} \mapsto \xi^*\mathcal{L}$ qui associe à tout fibré inversible sur Y_a son pull-back sur $Y_a^\flat$ définit un homomorphisme $\xi^* : \operatorname{Pic} Y_a \longrightarrow \operatorname{Pic} Y_a^\flat$. On considère la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_a}^\times \longrightarrow \xi_*\mathcal{O}_{Y_a^\flat}^\times \longrightarrow \xi_*\mathcal{O}_{Y_a^\flat}^\times/\mathcal{O}_{Y_a}^\times \longrightarrow 0.$$

La suite exacte longue de cohomologie implique que ξ^* est essentiellement surjectif, c'est-à-dire il est surjectif au niveau des $\bar{k}$-points. On voit bien que le noyau de ξ^* consiste en les fibrés inversibles sur Y_a dont le pull-back sur $Y_a^\flat$ est isomorphe au fibré trivial $\mathcal{O}_{Y_a^\flat}$. L'invariant δ_a est par définition l'entier $\dim \mathrm{H}^0(Y_a, \xi_*\mathcal{O}_{Y_a^\flat}/\mathcal{O}_{Y_a})$. Il mesure la dimension du groupe affine $\ker \xi^*$. Puis on introduit le groupe des composantes connexes $\pi_0(Y_a)$. Le morphisme $\xi^* : \operatorname{Pic} Y_a \longrightarrow \operatorname{Pic} Y_a^\flat$ induit un homomorphisme $\pi_0(\operatorname{Pic} Y_a) \longrightarrow \pi_0(\operatorname{Pic} Y_a^\flat) = \mathbb{Z}^{\pi_0(Y_a^\flat)}$.

[1]On remarquera que notre notation est ici celle de [2]. Dans [1], ce que nous notons $\mathcal{M}_v(a)$ est noté $\mathcal{M}_{a,v}^\bullet$

3.9. **Normalisation en famille.** On construit une stratification de $\mathcal{A}$ par normalisation en famille. Par définition, étant donné un morphisme propre, plat, de fibres réduites de dimension un $Y \longrightarrow S$, une normalisation en famille $Y' \longrightarrow Y$ est un morphisme propre birationnel qui est un isomorphisme sur un ouvert U de Y dense dans chaque fibre de Y au-dessus de S et tel que le morphisme composé $Y' \longrightarrow S$ soit un morphisme propre et lisse.

Ngô montre qu'il existe une stratification

$$\mathcal{A}^{\heartsuit} \times_k \bar{k} = \bigsqcup_{\psi \in \Psi} \mathcal{A}_\psi$$

de $\mathcal{A}^{\heartsuit} \times_k \bar{k}$ par des sous-schémas localements fermés $\mathcal{A}_\psi$ indexés par un ensemble fini d'indices Ψ qui vérifie les conditions suivantes:

i) Au-dessus de chaque strate $\mathcal{A}_\psi$, la courbe camérale $\tilde{X}_\psi$ admet une normalisation en famille après un changement de base radiciel.

ii) Pour tout $\bar{k}$-schéma S connexe réduit qui est muni d'un morphisme $s : S \longrightarrow \mathcal{A} \times_k \bar{k}$ tel que la restriction de la courbe camérale à S admette une normalisation en famille, alors le morphisme s se factorise par l'une des strates $\mathcal{A}_\psi$.

On utilise la relation d'ordre suivante sur Ψ: soient ψ et ψ' deux éléments de Ψ, on dit que $\psi \leq \psi'$ si et seulement si $\mathcal{A}_\psi$ est contenue dans l'adhérence de $\mathcal{A}_{\psi'}$. On vérifie que l'invariant δ_a reste inchangé dans une normalisation en famille de base connexe. Ainsi on dispose d'une application $\delta : \Psi \longrightarrow \mathbb{N}$; par rapport à la relation d'ordre sur Ψ, c'est une fonction décroissante. On définit alors une stratification de $\mathcal{A}^{\heartsuit} \times_k \bar{k}$ par l'invariant δ en regroupant tous les strates de même ordre:

$$\mathcal{A}_\delta = \bigsqcup_{\delta(\psi)=\delta} \mathcal{A}_\psi.$$

L'estimation suivante joue un rôle clef dans la preuve de la version forte du théorème de support.

Proposition 3.10. *Si le degré du diviseur D est très grand par rapport à δ, alors la strate $\mathcal{A}_\delta$ est de codimension supérieure ou égale à δ.*

On notera $\mathcal{A}^{\mathrm{good}}$ l'ouvert qui contient toutes les strates $\mathcal{A}_\delta$ qui vérifient $\operatorname{codim} \mathcal{A}_\delta \geq \delta$. Lorsque D est assez grand, c'est un ouvert non vide de $\mathcal{A}^{\heartsuit}$. Son complémentaire dans $\mathcal{A}^{\heartsuit}$ est noté $\mathcal{A}^{\mathrm{bad}}$.

Remarquons aussi que, sur chaque strate, le groupe des composantes connexes $\pi_0(\mathcal{P}_a)$ reste constant. On montre que si G est semisimple, alors l'ensemble des strates telles que, pour tout point géométrique a dans cette strate, le groupe des composantes connexes soit fini forme l'ouvert non vide $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$ de $\mathcal{A}^{\heartsuit}$.

Exemple : $G = \mathrm{GL}_n$. Reprenons les notations des exemples des paragraphes précédents. On considère le foncteur $\mathcal{B}$ qui à tout schéma S associe l'ensemble $\mathcal{B}(S)$ des triplets $(a, Y_a^\flat, \xi)$ où:

i) $a : S \longrightarrow \mathcal{A}^{\heartsuit}$ est un S-point de $\mathcal{A}^{\heartsuit}$,

ii) $\xi : Y_a^\flat \longrightarrow Y_a$ est une normalisation en famille de la courbe spectrale Y_a.

On prouve qu'il est représentable par un k-schéma de type fini et que le morphisme d'oubli $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}^\heartsuit$ est une bijection au niveau des $\bar{k}$-points. On note Ψ l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{B}$; c'est un ensemble fini. Puis pour tout $\psi \in \Psi$, on note $\mathcal{A}_\psi$ l'image de la composante connexe $\mathcal{B}_\psi$ de $\mathcal{B}$. On obtient ainsi la stratification par normalisation en famille de $\mathcal{A}^\heartsuit$:

$$\mathcal{A}^\heartsuit \times_k \bar{k} = \bigsqcup_{\psi \in \Psi} \mathcal{A}_\psi.$$

L'intérêt de cette stratification réside dans le fait que les invariants δ_a et $\pi_0(Y_a^\flat)$ sont constants sur chaque strate de cette stratification.

4. Comptage local et global

4.1. **Une κ-formule de Lefschetz.** Reprenons les notations du début du paragraphe 2.5, où un k-schéma en groupes commutatifs P agit sur un k schéma M. On suppose M et P localement de type fini sur k, et que les conditions suivantes sont vérifiées:

i) Le groupe des composantes connexes $\pi_0(P)$ de P est un groupe abélien de type fini.
ii) Le stabilisateur dans P de tout point de M est un sous-groupe de type fini.
iii) Il existe un k-sous-groupe discret sans torsion Λ de P tel que P/Λ et M/Λ soient de type fini.

Sous ces hypothèses, la catégorie quotient $[M/P]$ est équivalente à la catégorie $[(M/\Lambda)/(P/\Lambda)]$. Donc il n'y a qu'un nombre fini de classes d'équivalence dans $[M/P](k)$ et pour tout $x \in [M/P](k)$, son groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(x)$ est fini. Le nombre rationnel $\sharp[M/P](k)_\kappa$ associé à un caractère κ de $H^1(k,P)$ est ainsi bien défini. Si κ est le caractère trivial, on le note simplement $\sharp[M/P](k)$.

Cette somme $\sharp[M/P](k)_\kappa$ a une interprétation cohomologique. Soit P_σ le groupe des classes de σ-conjugaison dans $P(\bar{k})$. Ainsi $H^1(k,P)$ s'identifie au sous-groupe de torsion de P_σ. D'après [2, lemme 8.1.12], il existe toujours un relèvement de κ sur P_σ, noté encore $\kappa : P_\sigma \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$. Choisissons un tel relèvement. Quitte à remplacer Λ par un sous-groupe d'indice fini, on suppose que κ est trivial sur Λ. On notera $\mathrm{H}_c^n(M/\Lambda)_\kappa$ (cohomologie ℓ-adique) le sous-espace de $\mathrm{H}_c^n(M/\Lambda)$ sur lequel le groupe P/Λ agit via le caractère κ. On prouve, cf. [2, proposition 8.1.6]:

Proposition 4.2. *Soit P^0 le composante connexe de P. On a alors la formule:*

$$\sharp P^0(k) \cdot \sharp[M/P](k)_\kappa = \sum_n (-1)^n \operatorname{tr}(\sigma, \mathrm{H}_c^n(M/\Lambda)_\kappa).$$

De plus, si Λ' est un sous-groupe d'indice fini et σ-invariant de Λ, alors pour tout entier n, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{H}_c^n(M/\Lambda')_\kappa \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_c^n(M/\Lambda)_\kappa.$$

4.3. Soit $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ani}}(k)$ un k-point anisotrope de $\mathcal{A}$; il s'identifie à un morphisme $a : X \longrightarrow \mathfrak{c}_D$. Soit J'_a un schéma en groupes commutatifs lisse de fibres connexes sur X muni d'un homomorphisme $J'_a \longrightarrow J_a$ qui est un isomorphisme sur U_a et soit $\mathcal{P}'_a$ le champ classifiant les J'_a-torseurs sur X. L'homomorphisme $J'_a \longrightarrow J_a$ induit un homomorphisme $\mathcal{P}'_a \longrightarrow \mathcal{P}_a$. La formule de produit se généralise:

$$[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}'_a] = \prod_{v\in X-U_a} [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)].$$

Et cette équivalence de catégories est compatible avec l'action de $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$.

En toute place $v \in X - U_a$, on fixe une trivialisation du fibré inversible $\mathcal{O}_X(D')_{|X_v}$ et on choisit une mesure de Haar $\mathrm{d}\, t_v$ du tore $J_a(F_v)$. Ainsi, on peut

i) identifier la restriction de a à $X_v = X \times_k F_v$ avec un élément $a_v \in \mathfrak{c}^{\heartsuit}(F_v) \cap \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v)$,

ii) identifier J_a et J_{a_v}, ce qui permet de munir une mesure de Haar $\mathrm{d}\, t_v$ à $J_{a_v}(F_v)$,

iii) identifier la fibre de Springer affine $\mathcal{M}_v(a)$ munie d'une action de $\mathcal{P}_v(J'_a)$ avec la fibre de Springer affine $\mathcal{M}_v(a_v)$ munie d'une action de $\mathcal{P}_v(J'_{a_v})$.

Soit $\kappa : \pi(\mathcal{P}_a)_\sigma \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ un caractère. Comme J'_a est de fibres connexes, on a déjà démontré le lien entre le comptage local $[\mathcal{M}_v(a_v)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)$ et l'intégrale orbitale:

$$\sharp[\mathcal{M}_v(a_v)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa = \mathrm{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v), \mathrm{d}\, t_v)\, \mathrm{O}^\kappa_{a_v}(1_{\mathfrak{g}_v}, \mathrm{d}\, t_v).$$

Puis la formule des produits entraîne:

$$\sharp[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}'_a](k)_\kappa = \prod_{v\in X-U_a} \mathrm{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v), \mathrm{d}\, t_v)\, \mathrm{O}^\kappa_{a_v}(1_{\mathfrak{g}_v}, \mathrm{d}\, t_v).$$

5. Théorème de stabilisation et Lemme fondamental

Pour simplifier l'exposition, on suppose désormais que G est un groupe déployé semisimple, simplement connexe.

5.1. L'ouvert étale $\tilde{\mathcal{A}}$. Dans la suite, il sera plus agréable de travailler sur un ouvert étale $\tilde{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ que l'on va introduire que de travailler directement sur l'espace de Hitchin $\mathcal{A}$. On fixe d'abord un point géométrique $\infty \in X(\bar{k})$. Soit $\mathcal{A}^\infty$ l'ouvert de $\mathcal{A}$ défini sur $\bar{k}$ tel qu'un point géométrique $a \in \mathcal{A}(\bar{k})$ appartienne à $\mathcal{A}^\infty(\bar{k})$ si et seulement si le revêtement caméral $\tilde{X}_a \longrightarrow \bar{X}$ est étale au-dessus de ∞. Cet ouvert est contenu dans $\mathcal{A}^\heartsuit$. Puis on introduit $\tilde{\mathcal{A}}$ dont les $\bar{k}$-points sont les couples $\tilde{a} = (a, \tilde{\infty})$ où $a \in \mathcal{A}^\infty(\bar{k})$ et $\tilde{\infty}$ est un $\bar{k}$-point de $\tilde{X}_a$ au-dessus de ∞. Alors, $\tilde{\mathcal{A}}$ est irréductible lisse et le morphisme d'oubli $\tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{A}^\infty$ est un torseur sous le groupe W. Notons que si ∞ est défini sur k, alors $\mathcal{A}^\infty$ et $\tilde{\mathcal{A}}$ sont aussi définis sur k. Les homomorphismes de la proposition 3.4 pour $a \in \mathcal{A}^\infty$ proviennent simplement d'un homomorphisme $\mathbb{X}_*T \longrightarrow \pi_0(\mathcal{P})_{|\tilde{\mathcal{A}}}$, *cf* [2, Prop 5.7.1].

5.2. La κ-décomposition perverse. On notera $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$ l'intersection de l'ouvert anisotrope $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$ avec l'ouvert étale $\tilde{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$. On considère le morphisme de Hitchin au-dessus de cet ouvert

$$\tilde{m}^{\mathrm{ani}} : \tilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ani}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}.$$

C'est un morphisme propre. De plus, le champ $\tilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ani}}$ est un champ algébrique de Deligne-Mumford lisse muni d'une action de $\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}}$. Par le théorème de pureté de Deligne, $K = \tilde{m}_*^{\mathrm{ani}}\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ est un faisceau pervers pur muni d'une action de $\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}}$. Par le lemme d'homotopie, cette action se factorise à travers le schéma en groupes commutatifs finis $\pi_0(\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}})$. Ainsi, on obtient l'interprétation géométrique de la κ-décomposition dans le processus de stabilisation de la formule des traces:

$$K = \bigoplus_{\kappa} K_\kappa$$

où κ parcourt l'ensemble des caractères $\mathbb{X}_*T \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ qui se factorisent à travers le groupe fini $\pi_0(\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}})$ et où K_κ est le facteur direct de K sur lequel $\pi_0(\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{ani}})$ agit par le caractère κ. On appelle K_κ le κ-morceau de K et si κ appartient au centre de $\hat{\mathbb{G}}$, on l'appelle le morceau stable de K et on le note aussi K_{st}. Grosso modo, la stabilisation consiste à décrire les différents morceaux K_κ en termes des morceaux stables associés aux groupes endoscopiques de G.

5.3. Transfert endoscopique. Soit (κ, ρ_κ) une donnée endoscopique comme au paragraphe 1.6. Rappelons que l'on dispose alors d'un morphisme fini $\mathfrak{c}_H \longrightarrow \mathfrak{c}_G$. A son tour, celui-ci induit un morphisme fini et non ramifié $\mathcal{A}_H \longrightarrow \mathcal{A}_G$ puis une immersion fermée $\nu : \tilde{\mathcal{A}}_H \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}_G$ (cf [2, 6.3]). Soit $\tilde{a}_H \in \tilde{\mathcal{A}}_H(k)$ d'image $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}_G(k)$. On note a (resp. a_H) l'image de $\tilde{a}$ dans $\tilde{\mathcal{A}}_G(k)$ (resp. $\tilde{a}_H$ dans $\tilde{\mathcal{A}}_H(k)$). Alors, il existe un homomorphisme canonique $J_a \longrightarrow J_{H,a_H}$ dont la restriction au-dessus de U_a est un isomorphisme. On choisit une fois pour toutes un schéma en groupes commutatifs lisse de fibres connexes J'_a muni d'un homomorphisme $J'_a \longrightarrow J_a$ qui est un isomorphisme génériquement. On peut choisir J'_a de manière que $\mathrm{H}^0(\bar{X}, J'_a) = 0$ de telle sorte que le champ $\mathcal{P}'_a$ classifiant les J'_a-torseurs sur X est de type fini. Les morphismes naturels $\mathcal{P}'_a \longrightarrow \mathcal{P}_a$ et $\mathcal{P}'_a \longrightarrow \mathcal{P}_{H,a_H}$ induisent des actions de $\mathcal{P}'_a$ sur $\mathcal{M}_a$ et $\mathcal{M}_{H,a_H}$. Dans la suite, on travaille toujours avec les quotients $[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}'_a]$ et $[\mathcal{M}_{H,a_H}/\mathcal{P}'_a]$.

Comme on l'a déjà dit au paragraphe 1.4, il existe un diviseur effectif réduit $\mathfrak{R}_G^H$ sur $\mathfrak{c}_H$ (resp. $\mathfrak{R}_{G,D}^H$ sur $\mathfrak{c}_{H,D}$) vérifiant la relation $\nu^*\mathfrak{D}_G = \mathfrak{D}_H + 2\mathfrak{R}_G^H$.

5.4. Rappelons que κ s'identifie à un caractère de $\mathbb{X}_*T$. Via le morphisme $\mathbb{X}_*T \longrightarrow \pi_0(\mathcal{P})_{|\tilde{\mathcal{A}}}$, on peut donc considérer le facteur direct $K_{G,\kappa}$ de K_G. C'est aussi un faisceau pervers pur. L'argument clef de la preuve de Ngô réside dans le théorème de support suivant.

Théorème 5.5 (Théorème de support).

i) *(Version faible) Le support de $K_{G,\kappa}$ est contenu dans l'image de $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{ani}}$.*
ii) *(Version forte) Soit $\mathcal{K}$ un facteur direct de $K_{G,\kappa}$. Supposons que le support de $\mathcal{K}$ a une intersection non vide avec l'ouvert $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{good}} \cap \tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{ani}}$. Alors, il contient $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{good}} \cap \tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{ani}}$.*

Voici alors le théorème de stabilisation géométrique.

Théorème 5.6. *A un twist et un décalage près, on a un isomorphisme:*

$$\nu^* K_{G,\kappa} \xrightarrow{\sim} K_{H,\mathrm{st}}$$

Ce résultat géométrique est obtenu à partir du théorème de support et à l'aide des comptages des fibres de Springer affines et de la fibration de Hitchin, au terme d'un raisonnement au cours duquel sont prouvés aussi le lemme fondamental et l'énoncé i) ci-dessous.

Théorème 5.7. *Avec les notations précédents, on a :*

i) (Stabilisation) Pour tout k-point $\tilde{a}_H \in \tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{ani}}(k)$ d'image $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}(k)$, si a (resp. a_H) est l'image de $\tilde{a}$ (resp. $\tilde{a}_H$), on a toujours l'égalité globale:

$$\sharp[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}'_a](k)_\kappa = q^{r_H^G(a_H)} \sharp[\mathcal{M}_{H,a_H}/\mathcal{P}'_a](k)$$

où $r_H^G(a_H)$ est le degré du diviseur $a_H^* \mathfrak{R}_G^H$.

ii) (Lemme fondamental) Pour tout k-point $a_H \in \mathfrak{c}_H^{\mathrm{rs}}(F_v) \cap \mathfrak{c}_H(\mathcal{O}_v)$ d'image $a \in \mathfrak{c}_G^{\mathrm{rs}}(F_v) \cap \mathfrak{c}_G(\mathcal{O}_v)$, on a toujours l'égalité locale:

$$\sharp[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa = q^{\deg(v) r_{H,v}^G(a_H)} \sharp[\mathcal{M}_{H,v}(a_H)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)$$

où $r_H^G(a_{H,v})$ est le degré du diviseur $a_H^* \mathfrak{R}_G^H$ en v.

L'équivalence de ii) et l'énoncé du lemme fondamental résulte du comptage sur les fibres de Springer affines, cf proposition 2.7.

Expliquons pourquoi i) implique la stabilisation géométrique. En effet, $K_{G,\kappa}$ (resp. $K_{H,\kappa}$) est un faisceau pervers pur sur $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{ani}}$, donc il existe un ouvert non vide $\tilde{\mathcal{U}}$ de $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{ani}}$ tel que

i) la restriction de $\nu^* K_{G,\kappa}$ (resp. $K_{H,\kappa}$) sur cet ouvert soit un système local,

ii) le faisceau pervers $\nu^* K_{G,\kappa}$ (resp. $K_{H,\kappa}$) soit le prolongement intermédiaire de sa restriction sur $\tilde{\mathcal{U}}$.

Compte tenu du comptage global, le point i) du théorème ci-dessus implique que, pour toute extension finie k' de k et pour tout k'-point $\tilde{a}_H$ de $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\mathrm{ani}}$ d'image $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}_G(k')$, on a l'égalité:

$$\sum_n (-1)^n \operatorname{tr}(\sigma_{k'}, (K_{G,\kappa}^n)_{\tilde{a}}) = \sum_n (-1)^n \operatorname{tr}(\sigma_{k'}, (K_{H,\kappa}^n)_{\tilde{a}_H}).$$

En particulier, pour toute extension k'_j de degrée j de k', on considère $\tilde{a}_H$ comme un k'_j-point de $\tilde{\mathcal{A}}_H$ et obtient aussi l'égalité:

$$\sum_n (-1)^n \operatorname{tr}(\sigma_{k'}^j, (K_{G,\kappa}^n)_{\tilde{a}}) = \sum_n (-1)^n \operatorname{tr}(\sigma_{k'}^j, (K_{H,\kappa}^n)_{\tilde{a}_H}).$$

Comme $K_{G,\kappa}$ et $K_{H,\kappa}$ sont purs, les valeurs propres de $\sigma_{k'}$ dans $(K_{G,\kappa}^n)_{\tilde{a}})$ et $(K_{G,\kappa}^n)_{\tilde{a}})$ sont toutes de modules $q^{n \deg(k'/k)/2}$. On en déduit que

$$\operatorname{tr}(\sigma_{k'}, (K_{G,\kappa}^n)_{\tilde{a}}) = \operatorname{tr}(\sigma_{k'}, (K_{H,\kappa}^n)_{\tilde{a}_H}).$$

Le théorème de Chebotarev appliqué aux systèmes locaux $\nu^* K_{G,\kappa}$ et $K_{H,\kappa}$ entraîne qu'ils sont isomorphes après semi-simplification.

5.8. Voici les grandes lignes de la preuve du théorème 5.7 de Ngô Bao Châu. On se place d'abord sur un ouvert $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\rm trans}$ dit transversal de $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\rm ani}$. Par définition, un point géométrique $\tilde{a}_H \in \tilde{\mathcal{A}}_H^{\rm ani}(\bar{k})$ d'image $a_H \in \mathcal{A}_H^{\rm ani}(\bar{k})$ est dans cet ouvert si et seulement si $a \in \mathcal{A}_H^{\rm good} \cap \mathcal{A}_H^{\rm ani}(\bar{k})$ et que l'image $a(\bar{X})$ coupe transversalement le diviseur réduit $\mathfrak{D}_H + \mathfrak{R}_G^H$ dans $\mathfrak{c}_{D,H}$.

Soit $\tilde{a}_H \in \tilde{\mathcal{A}}_H^{\rm trans}(k)$ d'image $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}^{\rm ani}(k)$; on note a_H (resp. a) l'image de $\tilde{a}_H$ dans $\mathcal{A}_H(k)$ (resp. de $\tilde{a}$ dans $\mathcal{A}(k)$). On peut calculer explicitement les nombres locaux $\sharp[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa$ et $\sharp[\mathcal{M}_{H,v}(a_H)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)$ et vérifie directement que

$$\sharp[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa = q^{\deg(v) r^G_{H,v}(a_H)} \sharp[\mathcal{M}_{H,v}(a_H)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k).$$

Compte tenue du fait que $r_H^G(a_H) = \sum_v \deg(v) r^G_{H,v}(a_H)$, l'égalité globale s'en suit. Ainsi, le théorème de stabilisation est valide pour tout point transversal $\tilde{a}_H \in \tilde{\mathcal{A}}_H^{\rm trans}(k)$.

Puis, le théorème de support implique immédiatement que le théorème de stabilisation est encore valide pour tout point $\tilde{a}_H \in \tilde{\mathcal{A}}_H^{\rm good} \cap \tilde{\mathcal{A}}_H^{\rm ani}(k)$. Démontrons maintenant le lemme fondamental. En effet, soit $a_{H,v} \in \mathfrak{c}_H^{\rm rs}(F_v) \cap \mathfrak{c}_H(\mathcal{O}_v)$. Alors, si l'on choisit le diviseur D de degré suffisamment grand, il existe $\tilde{a}_H \in \tilde{\mathcal{A}}_H^{\rm good} \cap \tilde{\mathcal{A}}_H^{\rm ani}(k)$ dont la composante locale en v est $a_{H,v}$ et que l'image $a_H(X - \{v\})$ coupe transversalement le diviseur $\mathfrak{D}_H + \mathfrak{R}_G^H$ dans $\mathfrak{c}_{D,H}$. On note $\tilde{a}$ l'image de $\tilde{a}_H \in \tilde{\mathcal{A}}_G(k)$. Puisque $\tilde{a}_H \in \tilde{\mathcal{A}}_H^{\rm good} \cap \tilde{\mathcal{A}}_H^{\rm ani}(k)$, on a l'égalité globale:

$$\sharp[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}'_a](k)_\kappa = q^{\deg(v) r_H^G(a_H)} \sharp[\mathcal{M}_{H,a_H}/\mathcal{P}'_a](k).$$

Comme $a_H(X - \{v\})$ coupe transversalement le diviseur $\mathfrak{D}_H + \mathfrak{R}_G^H$ dans $\mathfrak{c}_{D,H}$, pour toute place $w \neq v$, on a:

$$\sharp[\mathcal{M}_w(a)/\mathcal{P}_w(J'_a)](k)_\kappa = q^{\deg(w) r^G_{H,w}(a_H)} \sharp[\mathcal{M}_{H,w}(a_H)/\mathcal{P}_w(J'_a)](k)$$

et ils ne s'annulent pas. On obtient ainsi la même égalité en la place v, autrement dit le lemme fondamental:

$$\sharp[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa = q^{\deg(v) r^G_{H,v}(a_H)} \sharp[\mathcal{M}_{H,v}(a_H)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k).$$

Enfin, supposons qu'on a déjà démontré le lemme fondamental. Démontrons le théorème de stabilisation pour tout point $\tilde{a}_H \in \tilde{\mathcal{A}}_H^{\rm ani}(k)$. En effet, le lemme fondamental implique que, pour toute place v de X, on a:

$$\sharp[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa = q^{\deg(v) r^G_{H,v}(a_H)} \sharp[\mathcal{M}_{H,v}(a_H)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k).$$

On fait le produit sur toutes les places pour obtenir l'égalité globale:

$$\sharp[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}'_a](k)_\kappa = q^{\deg(v) r_H^G(a_H)} \sharp[\mathcal{M}_{H,a_H}/\mathcal{P}'_a](k).$$

La preuve est donc terminée.

References

[1] B-C. Ngô, *Fibration de Hitchin et endoscopie*, Invent. Math. **164**(2) (2006), 399-453.
[2] B-C. Ngô, *Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie*, `arXiv:math/0801.0446v3`.

Institut Mathématique de Jussieu - Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris, France
E-mail address: dat@math.jussieu.fr

CNRS - Université de Paris Nord (Paris 13), LAGA - Département de Mathématiques, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France
E-mail address: ngodac@math.univ-paris13.fr