Séminaire BOURBAKI Novembre 2004
57ème année, 2004-05, n$^{\text{o}}$ 940

LEMME FONDAMENTAL ET ENDOSCOPIE, UNE APPROCHE GÉOMÉTRIQUE [d'après Gérard Laumon et Ngô Bao Châu]

par **Jean-François DAT**

Malgré son nom, le "lemme fondamental" de Langlands et Shelstad est un énoncé conjectural, ou plutôt une famille d'énoncés conjecturaux. Il est de nature locale au sens arithmétique, *i.e.* il concerne des objets relatifs à un corps local, mais est apparu dans les deux problèmes majeurs, de nature globale, du fameux "programme de Langlands": le principe de fonctorialité et l'expression des fonctions L de variétés de Shimura en termes automorphes. En effet, les méthodes initiées par Langlands pour chacun de ces problèmes reposent sur la formule des traces d'Arthur-Selberg : on cherche à comparer deux telles formules pour deux groupes différents dans le cas de la fonctorialité, ou bien une seule, pour un groupe donné, avec la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz pour sa variété de Shimura associée. Mais la formule des traces d'Arthur-Selberg n'est pas en général le bon outil pour appliquer cette méthode, elle est "instable" (*cf.* 1.3). Pour la stabiliser, Langlands [25], à la suite de travaux avec Labesse [24] et Shelstad, a créé la théorie d'endoscopie qui repose sur deux conjectures "locales", relevant de l'analyse harmonique sur les groupes p-adiques : le *transfert* et le *lemme fondamental*. Depuis vingt-cinq ans, beaucoup de mathématiques ont été écrites, soit pour résoudre ces conjectures, soit pour aller au-delà, en les admettant.

Expliquons brièvement la nature de ces conjectures en renvoyant le lecteur à 1.6 pour un énoncé détaillé. Langlands et Shelstad ont défini la notion de groupe endoscopique d'un groupe p-adique G et pour un tel groupe, disons H, deux familles de distributions dépendant d'une classe de conjugaison "stable" γ semi-simple et "G-régulière" dans H : l'intégrale orbitale "stable" SO_γ sur H et l'intégrale orbitale "endoscopique" $O_\gamma^{G|H}$ sur G. La conjecture de *transfert* prévoit l'existence, pour chaque fonction lisse à support compact f_G sur G, d'une fonction semblable f_H sur H telle que $SO_\gamma(f_G) = O_\gamma^{G|H}(f_H)$ pour tout γ. Lorsque les groupes G et H sont quasi déployés et non ramifiés, et donc munis de sous-groupes "hyperspéciaux" (*cf.* 1.1), le *lemme fondamental* prévoit, lui, que lorsque f_G est la fonction caractéristique d'un sous-groupe "hyperspécial" de G, alors on peut prendre pour f_H la fonction caractéristique d'un sous-groupe "hyperspécial" de H.

Waldspurger a introduit une variante du lemme fondamental où les intégrales orbitales sont prises sur les algèbres de Lie et non sur les groupes. Ses travaux [36] et [38] ont la conséquence remarquable suivante (*cf.* 1.7) : pour résoudre les conjectures de transfert de Langlands-Shelstad relatives à un groupe réductif G sur un corps p-adique, il suffit de savoir résoudre le lemme fondamental dans sa version "algèbres de Lie" pour toute forme quasi déployée non ramifiée du système de racines absolu du centralisateur connexe d'un élément semi-simple de G, sur un corps $\mathbb{F}_{p'^d}((T))$ avec p' "grand".

Ce dernier problème a l'avantage de pouvoir être traduit en termes géométriques. En effet les distributions SO_γ et $O_\gamma^{G|H}$ sont des combinaisons linéaires d'intégrales orbitales ; dans le cas d'un groupe classique –associé à un espace vectoriel muni d'une forme symplectique, symétrique ou hermitienne– évaluer l'intégrale orbitale au point x de l'algèbre de Lie en la fonction caractéristique d'un compact hyperspécial revient à compter certains réseaux stables sous x et qui sont "autoduaux" pour la forme considérée. Lorsqu'on est sur un corps de séries formelles $F = k((T))$, les réseaux sont "classifiés" par la Grassmannienne affine (une ind-variété sur k) et ceux qui sont stables sous x par la *fibre de Springer affine* telle que définie par Kazhdan et Lusztig dans [16]. Ainsi, Goresky, Kottwitz et Macpherson ont interprété dans [11] l'évaluation de SO_γ, resp. de $O_\gamma^{G|H}$, en la fonction caractéristique d'un compact hyperspécial de $\mathrm{Lie}(H)$, resp. de $\mathrm{Lie}(G)$, comme la trace alternée de Frobenius sur certains morceaux des groupes de cohomologie d'un quotient de la fibre de Springer affine de H en γ, resp. des groupes de cohomologie d'un système local "endoscopique" sur un quotient de la fibre de Springer affine de G en un élément $\gamma' \in \mathrm{Lie}(G)$ associé à γ. Le problème est alors de comparer ces morceaux de groupes de cohomologie ! Les trois auteurs précédents ont résolu, modulo une conjecture de pureté cohomologique des fibres de Springer affines, le cas très particulier où le tore centralisateur de γ est non ramifié, et ont introduit un outil qui sera fondamental pour tous les travaux ultérieurs : la cohomologie équivariante sous un certain tore adapté à la situation. Laumon [28] a ensuite résolu le cas où G est un groupe unitaire, sans restriction sur γ mais toujours sous la conjecture de pureté, en introduisant de manière *ad hoc* un argument de déformation.

Ces approches géométriques sont de nature purement locales, et butent sur un obstacle, la conjecture de pureté, qui ne sera pas forcément facile à lever. Récemment, Ngô [33] a introduit une nouvelle approche géométrique, de nature globale, basée sur la fibration de Hitchin [15] introduite par ce dernier dans un tout autre contexte. Elle permet d'interpréter très naturellement le procédé de *pré-stabilisation* de Langlands-Kottwitz, *cf.* 1.4, qui est historiquement la motivation *globale* à l'origine du lemme fondamental. Elle fournit à la fois un moyen de contourner le problème de la pureté et de déformer de manière naturelle une situation locale donnée. Cette approche vaut *a priori* pour un groupe général, mais n'a pour l'instant été poussée jusqu'au bout, c'est-à-dire jusqu'à la preuve du lemme fondamental, que dans le cas des groupes unitaires dans l'article [30] de Laumon et Ngô. Signalons enfin qu'elle utilise de manière cruciale le langage des champs algébriques.

Le but principal de l'exposé est de présenter l'approche de Laumon et Ngô. Cependant, comme l'énoncé du lemme fondamental n'a rien d'immédiatement "naturel", il a paru souhaitable de commencer par une présentation succincte de la théorie d'endoscopie et de ses motivations. On évoquera d'ailleurs autant la théorie globale que locale, puisque l'approche de Ngô est de nature globale.

L'auteur remercie P.-H. Chaudouard, J.-P. Labesse, G. Laumon et Ngô B.C. pour leur aide dans la préparation de cet exposé.

1. ENDOSCOPIE : UNE BRÊVE INTRODUCTION

1.1. Notations

Nous aurons à considérer deux contextes différents, l'un global et l'autre local, pour lesquels certaines notations seront similaires.

Contexte local : F est un corps local non archimédien, donc soit $\mathbb{F}_q((T))$, soit une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ sur F est quasi déployé et non ramifié (*i.e.* déployé sur une extension non ramifiée) si et seulement si $\mathbf{G}$ se prolonge en un groupe lisse à fibres réductives connexes sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_F$. Un sous-groupe *hyperspécial* de $\mathbf{G}(F)$ est alors par définition un groupe de la forme $\mathbf{G}(\mathcal{O}_F)$ pour un tel prolongement. C'est un sous-groupe compact maximal du groupe localement compact $\mathbf{G}(F)$. Sous ces hypothèses, on normalisera toujours les mesures de Haar sur ce dernier de sorte que la mesure d'un sous-groupe hyperspécial soit 1.

Contexte global : F est un corps global, donc une extension finie de $\mathbb{Q}$ ou de $\mathbb{F}_q(T)$, dont on note $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers et $\mathcal{P}(F)$ l'ensemble des places. Pour toute place $v \in \mathcal{P}(F)$, on note F_v le complété en v et $\mathcal{O}_v$ son anneau d'entiers. On note aussi $\mathbb{A}_F := \prod_v' F_v$ l'anneau topologique localement compact des adèles.

Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe sur F. On peut le prolonger en un groupe lisse à fibres réductives connexes sur $\mathcal{O}_F[\frac{1}{N}]$ pour un élément non nul N de $\mathcal{O}_F$. On peut donc parler de $\mathbf{G}(\mathcal{O}_v)$ pour $v \in \mathcal{P}(F)$ ne divisant pas N. On définit $\mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$ comme le produit restreint $\prod_v' \mathbf{G}(F_v)$ relativement aux $\mathbf{G}(\mathcal{O}_v)$. C'est un groupe localement compact. On le munira de la mesure "canonique" de Tamagawa dont la définition précise n'a pas d'importance ici, et qui se décompose en un produit $dx = \prod_v' dx_v$ de mesures de Haar locales qui, aux places v ne divisant pas N, sont normalisées comme au paragraphe précédent (sauf éventuellement en une place si $N = 1$ et F est un corps de fonctions).

Rappelons que le plongement diagonal $\mathbf{G}(F) \hookrightarrow \mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$ fait de $\mathbf{G}(F)$ un sous-groupe discret de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$ qui est de covolume fini si et seulement si le centre $\mathbf{Z}$ de $\mathbf{G}$ est anisotrope, et qui est cocompact si et seulement si $\mathbf{G}$ lui-même est anisotrope.

Enfin nous fixerons une clôture algébrique $\overline{F}$ de F et noterons Γ le groupe de Galois correspondant et Γ_v le groupe de décomposition en $v \in \mathcal{P}(F)$.

1.2. Quelques mots sur la formule des traces

Le contexte ici est *global*. Supposons, pour simplifier, le centre $\mathbf{Z}$ de $\mathbf{G}$ anisotrope sur F. Soit $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{G}(\mathbb{A}_F))$ l'espace des fonctions complexes lisses à support compact sur $\mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$. De telles fonctions sont toujours de la forme $f_S \otimes (\otimes_{v\in\mathcal{P}(F)\setminus S} 1_{\mathbf{G}(\mathcal{O}_v)})$ pour un ensemble fini $S \subset \mathcal{P}(F)$ et une fonction $f_S \in \mathcal{C}_c^\infty(\prod_{v\in S}\mathbf{G}(F_v))$. Si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{G}(\mathbb{A}_F))$, la représentation ρ de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$ sur l'espace $L^2(\mathbf{G}(F)\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_F))$ et la mesure dx induisent un opérateur $\rho(f)$, intégral de noyau

$$K_f(x,y) = \sum_{\gamma\in\mathbf{G}(F)} f(x\gamma y^{-1}).$$

Lorsque $\mathbf{G}$ est F-anisotrope, et donc $\mathbf{G}(F)\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$ est compact, l'opérateur $\rho(f)$ est traçable et sa trace est l'intégrale de son noyau sur la diagonale. Un simple calcul fournit alors la "formule des traces" pour $\mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\rho(f)) &= \sum_{\gamma\in\mathbf{G}(F)/\mathrm{conj}} \int_{\mathbf{G}_\gamma(F)\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_F)} f(x\gamma x^{-1})dx \\ &= \sum_{\gamma\in\mathbf{G}(F)/\mathrm{conj}} \mathrm{vol}_{dy}(\mathbf{G}_\gamma(F)\backslash\mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A}_F)) \int_{\mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A}_F)\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_F)} f(x\gamma x^{-1})dx/dy.\end{aligned}$$

Nous avons noté $\mathbf{G}_\gamma$ le (groupe algébrique) centralisateur de γ dans $\mathbf{G}$. Notons que l'extraction du volume à la seconde ligne permet d'utiliser des calculs locaux, puisque lorsque $f = \otimes_v f_v$, on a le produit (dont presque tous les facteurs sont égaux à 1)

$$\int_{\mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A}_F)\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_F)} f(x\gamma x^{-1})dx/dy = \prod_v \int_{\mathbf{G}_\gamma(F_v)\backslash\mathbf{G}(F_v)} f_v(x_v\gamma x_v^{-1})dx_v/dy_v.$$

Le terme de gauche est *l'intégrale orbitale* globale de f sur la classe de conjugaison de γ, et sera encore noté $O_\gamma(f)$. De même, les intégrales orbitales locales du terme de droite seront notées $O_\gamma(f_v)$, $v \in \mathcal{P}(F)$. Enfin on posera $\tau(\mathbf{G}_\gamma) := \mathrm{vol}_{dy}(\mathbf{G}_\gamma(F)\backslash\mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A}_F))$; de par nos conventions, c'est le nombre de Tamagawa de $\mathbf{G}_\gamma$, si celui-ci est connexe. Par la suite on supposera souvent $\mathbf{G}_{der}$ simplement connexe, ce qui assurera la connexité des centralisateurs.

Lorsque $\mathbf{G}$ n'est plus supposé F-anisotrope, la formule des traces est beaucoup plus compliquée et n'est d'ailleurs pas une expression de la trace d'un opérateur. Il s'agit tout de même d'une égalité entre deux distributions sur $\mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$, l'une renfermant des informations spectrales, comme la trace sur le spectre automorphe discret, l'autre des informations "géométriques" comme les intégrales orbitales le long de classes de conjugaison semi-simples de $\mathbf{G}(F)$. Un peu plus précisément, le côté géométrique s'écrit :

$$\sum_{\gamma\in\mathbf{G}(F)^{ell}/\mathrm{conj}} \tau(\mathbf{G}_\gamma)O_\gamma(f) + \text{ autres termes.}$$

Nous ne nous occuperons pas dans cet exposé des "autres termes", qui sont importants pour le but ultime mais qui pour certaines applications peuvent être annulés en choisissant bien la fonction-test f (*cf.* [19] par exemple). Puisqu'il faut définir l'ensemble $\mathbf{G}(F)^{ell}$ qui apparaît dans la sommation ci-dessus, on en profite pour introduire un peu de vocabulaire : un élément $\gamma \in \mathbf{G}(F)$ est dit

– *régulier* si son centralisateur est de dimension minimale (égale au rang de $\mathbf{G}$) ;
– *fortement régulier* si ce centralisateur est un tore ;

– *elliptique* s'il est contenu dans un F-tore F-anisotrope "modulo le centre"(1). Un tel tore sera lui-même dit "elliptique" par la suite.

Par exemple, lorsque $\mathbf{G} = GL(N)$, un élément de $\mathbf{G}(F)$ est semi-simple régulier et elliptique si et seulement si son polynôme caractéristique est irréductible. Les tores elliptiques de $GL(N)$ sont de la forme $\mathrm{Res}_{F'|F}\mathbb{G}_m$ pour une extension séparable $F'|F$ de degré N. Si $\mathbf{G} = U_{E|F}(N)$ est le groupe unitaire (quasi déployé) associé à l'extension quadratique E de F, alors les tores elliptiques sont de la forme $\prod_{i=1}^{r} \mathrm{Res}_{F_i|F} U_{E_i|F_i}(1)$ où les F_i sont des extensions séparables de F disjointes de E telles que $\sum_{i=1}^{r} \deg(F_i|F) = N$.

1.3. Pourquoi la stabilisation

Tentons d'expliquer brièvement l'origine des problèmes que nous allons présenter par la suite. La discussion qui suit est de nature informelle et contient des simplifications nécessairement abusives. Pour plus de détails et plus de rigueur, le lecteur pourra consulter [8] sur les formes et représentations automorphes et [7] sur les L-groupes et la fonctorialité.

Une représentation *automorphe* de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$ est par définition un sous-quotient irréductible de la représentation régulière de ce groupe dans un certain espace de fonctions sur $\mathbf{G}(F)\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$ qui sont dites aussi *automorphes* et qui généralisent la notion classique de forme modulaire que l'on a lorsque $\mathbf{G} = GL(2)$. De même que ces dernières, les formes automorphes recèlent des propriétés arithmétiques cachées et très intéressantes. Notons qu'une représentation automorphe se décompose de manière essentiellement unique en un produit tensoriel "restreint" $\Pi = \bigotimes_v' \pi_v$ de représentations irréductibles des groupes locaux $\mathbf{G}(F_v)$.

Le principe de fonctorialité que Langlands a imaginé en 1967 permet de transférer ces représentations d'un groupe à un autre. À $\mathbf{G}$ réductif connexe sur F on associe un groupe algébrique complexe ${}^L\mathbf{G} := \widehat{\mathbf{G}} \rtimes \Gamma$ où $\widehat{\mathbf{G}}$ est "le" groupe réductif connexe sur $\mathbb{C}$ de système de racines basé *dual* de celui de $\mathbf{G}$, et Γ agit par automorphismes extérieurs, via l'action sur le système de racines basé que l'on déduit de la F-structure rationnelle sur $\mathbf{G}$. Ainsi, ${}^L\mathbf{G}$ ne détermine pas $\mathbf{G}$ mais seulement sa forme intérieure quasi déployée. Le principe de fonctorialité prévoit que tout morphisme de L-groupes ${}^L\mathbf{H} \longrightarrow {}^L\mathbf{G}$ doit induire un transfert des représentations automorphes de $\mathbf{H}$ vers celles de $\mathbf{G}$, qui est décrit explicitement sur *presque tous* les facteurs locaux π_v (*cf.* [7, 16.2]). Parmi les conséquences mirifiques qu'aurait (un cas particulier de) cet énoncé, on peut citer la conjecture d'Artin sur les fonctions L de représentations galoisiennes.

Langlands a aussi initié une stratégie pour attaquer la fonctorialité dans certains contextes favorables(2), qui repose sur la formule des traces d'Arthur-Selberg évoquée au paragraphe précédent. Dans certaines situations de transfert, on peut faire correspondre les classes de conjugaison semi-simples des deux groupes $\mathbf{H}(\overline{F})$ et $\mathbf{G}(\overline{F})$, et ce de manière

(1) Avec cette définition, un élément elliptique est en particulier semi-simple.

(2) On peut citer deux autres stratégies : l'une basée sur les théorèmes inverses "à la Weil" de Piatetski-Shapiro, l'autre basée sur la correspondance Theta de Howe.

Γ-équivariante. C'est par exemple le cas lorsque le morphisme de L-groupes induit un morphisme Γ-équivariant $\widehat{\mathbf{T}_H}/W_{\widehat{H}} \longrightarrow \widehat{\mathbf{T}_G}/W_{\widehat{G}}$ où $\mathbf{T}_H$ et $\mathbf{T}_G$ sont des F-tores maximaux de $\mathbf{H}$ et $\mathbf{G}$ et $W_{\widehat{H}}$, $W_{\widehat{G}}$ les groupes de Weyl correspondants.

Conjugaison stable : supposons pour simplifier que $\mathbf{G}_{der}$ est simplement connexe et disons que deux éléments semi-simples de $\mathbf{G}(F)$ sont *stablement conjugués* s'ils sont conjugués dans $\mathbf{G}(\overline{F})$. Par exemple, si $\mathbf{G} = GL(N)$ ou $U_{E|F}(N)$, deux éléments semi-simples sont *stablement* conjugués si et seulement si ils ont même polynôme caractéristique. Dans le cas de $GL(N)$ ils sont alors conjugués, mais dans le cas $U_{E|F}(N)$, ils ne le sont pas nécessairement.

Par la discussion précédente, un morphisme des L-groupes induit parfois une correspondance entre classes de conjugaison *stables* d'éléments semi-simples de $\mathbf{G}(F)$ et $\mathbf{H}(F)$. L'idée est alors de déduire le transfert spectral que l'on cherche d'un transfert géométrique des intégrales orbitales, grâce à la formule des traces d'Arthur-Selberg. Malheureusement cette dernière, dans sa forme originale, n'est pas *stablement* invariante. On est donc amené à la modifier (la "stabiliser") pour l'adapter aux besoins de la stratégie de Langlands. Ce travail a été entrepris par Labesse, Langlands [25], prolongé par Kottwitz [18][17], Kottwitz-Shelstad [21], Labesse [23][22], et bien sûr, Arthur [3], [2] et [4].

1.4. La pré-stabilisation de Langlands-Kottwitz

À titre d'exemple et de motivation pour le lemme fondamental, mais aussi pour comprendre la pertinence de l'approche géométrique de Ngô, décrivons la première partie de la stratégie de Langlands pour stabiliser la contribution

$$T_G^{regell}(f) := \sum_{\gamma \in \mathbf{G}(F)^{regell}/\mathrm{conj}} \tau(\mathbf{G}_\gamma) O_\gamma(f) \ , \quad f = \otimes'_v f_v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{G}(\mathbb{A}_F))$$

des termes elliptiques réguliers au côté géométrique de la formule des traces. On suppose $\mathbf{G}_{der}$ simplement connexe, pour simplifier les énoncés. Commençons par la remarque suivante : la classe de conjugaison de γ (elliptique régulier) s'identifie à $\mathbf{G}(F)/\mathbf{G}_\gamma(F)$ tandis que la classe *stable* s'identifie à $\mathbf{G}/\mathbf{G}_\gamma(F)$ (points rationnels de la F-variété quotient $\mathbf{G}/\mathbf{G}_\gamma$). Il est donc naturel de définir l'intégrale orbitale stable :

$$SO_\gamma(f) := \int_{\mathbf{G}/\mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A}_F)} f(x\gamma x^{-1})dx = \prod_v \int_{\mathbf{G}/\mathbf{G}_\gamma(F_v)} f_v(x_v \gamma x_v^{-1}) dx_v.$$

La fonction $x \mapsto f(x\gamma x^{-1})$ est définie sur $\mathbf{G}/\mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A}_F)$ via la bijection $(\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\overline{F}})/\mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A}_{\overline{F}}))^\Gamma \simeq \mathbf{G}/\mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A}_F)$ que nous laissons méditer au lecteur. Les mesures $\mathbf{G}(F_v)$-invariantes sur chaque $\mathbf{G}/\mathbf{G}_\gamma(F_v)$ sont déterminées par celles qu'on a choisies sur $\mathbf{G}(F_v)$ et $\mathbf{G}_\gamma(F_v)$ puisqu'on a une partition $\mathbf{G}/\mathbf{G}_\gamma(F_v) = \sqcup_{\gamma' \sim_{st} \gamma} \mathbf{G}(F_v)/\mathbf{G}_{\gamma'}(F_v)$ de l'orbite stable en orbites ordinaires et des isomorphismes $\mathbf{G}_{\gamma'} \simeq \mathbf{G}_\gamma$ pour $\gamma' \in \mathbf{G}(F_v)$ stablement conjugué à γ. Les facteurs locaux sont presque tous égaux à 1 en vertu d'un résultat de Kottwitz [18, 7.1]. Enfin, l'expression $SO_\gamma(f)$ ne dépend *que de la classe stable de* γ.

On voudrait maintenant comparer les expressions :

$$\sum_{\gamma'\in\mathbf{G}(F)/\mathrm{conj},\gamma'\sim_{st}\gamma} \tau(\mathbf{G}_{\gamma'})O_{\gamma'}(f) \quad \text{et} \quad SO_\gamma(f)$$

et pour cela on doit exprimer le terme de gauche comme une certaine intégrale sur $\mathbf{G}/\mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A}_F)$.

Il est instructif de regarder d'abord le problème local associé, qui consiste à écrire l'intégrale orbitale $O_\gamma(f_v)$ comme une intégrale sur $\mathbf{G}/\mathbf{G}_\gamma(F)$. Pour cela, il faut caractériser l'image de l'injection $\mathbf{G}(F)/\mathbf{G}_\gamma(F) \hookrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{G}_\gamma(F)$ de la classe de conjugaison de γ dans sa classe stable. En fait, on dispose pour tout F-corps K d'une application cobord

$$\mathbf{G}/\mathbf{G}_\gamma(K) \overset{\mathrm{inv}_K(\gamma,-)}{\longrightarrow} \mathit{ker}\, \big(H^1(K,\mathbf{G}_\gamma) \longrightarrow H^1(K,\mathbf{G})\big) =: \partial^1(K,\mathbf{G}_\gamma,\mathbf{G})$$

qui induit une bijection entre l'ensemble $\mathbf{G}(K)\backslash(\mathbf{G}/\mathbf{G}_\gamma)(K)$ des classes de conjugaison dans la classe stable et $\partial^1(K,\mathbf{G}_\gamma,\mathbf{G})$, et qui envoie la classe de conjugaison de γ sur l'élément “neutre” de $\partial^1(K,\mathbf{G}_\gamma,\mathbf{G})$. En d'autres termes,

$$O_\gamma(f_v) = \int_{\mathbf{G}/\mathbf{G}_\gamma(F_v)} \delta_{e,\mathrm{inv}_{F_v}(\gamma,x)} f_v(x\gamma x^{-1}).$$

Dans notre situation et lorsque v est non archimédienne, $\partial^1(F_v,\mathbf{G}_\gamma,\mathbf{G})$ est un groupe abélien fini. On peut alors faire une transformation de Fourier en introduisant son dual $\mathfrak{K}(\gamma)_v$ pour obtenir

$$\begin{aligned} O_\gamma(f_v) &= |\mathfrak{K}(\gamma)_v|^{-1} \sum_{\kappa\in\mathfrak{K}(\gamma)_v} \int_{\mathbf{G}/\mathbf{G}_\gamma(F_v)} \langle \kappa, \mathrm{inv}_{F_v}(\gamma,x)\rangle f_v(x\gamma x^{-1})dx \\ &=: |\mathfrak{K}(\gamma)_v|^{-1} \sum_{\kappa\in\mathfrak{K}(\gamma)_v} O_\gamma^\kappa(f_v). \end{aligned}$$

Les termes $O_\gamma^\kappa(f_v)$ sont appelés κ-intégrales orbitales.

Revenons au problème global, et introduisons l'application “canonique”

$$\phi_\gamma : \ \mathbf{G}(F)\backslash(\mathbf{G}/\mathbf{G}_\gamma)(F) \longrightarrow \mathbf{G}(\mathbb{A}_F)\backslash(\mathbf{G}/\mathbf{G}_\gamma)(\mathbb{A}_F).$$

Un résultat de Borel-Serre montre la finitude des fibres de cette application, et puisque $\tau(\mathbf{G}'_\gamma) = \tau(\mathbf{G}_\gamma)$ pour γ' stablement conjugué à γ, on peut alors réécrire

$$(1) \qquad \sum_{\gamma'\in\mathbf{G}(F)/\mathrm{conj},\gamma'\sim_{st}\gamma} \tau(\mathbf{G}_{\gamma'})O_{\gamma'}(f) = \tau(\mathbf{G}_\gamma)\int_{\mathbf{G}/\mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A}_F)} |\phi_\gamma^{-1}(x)| f(x\gamma x^{-1})dx.$$

Traduisons alors ϕ_γ en termes de cohomologie galoisienne : d'après ce qui a été dit dans la discussion du cas local ci-dessus, elle s'identifie à la flèche naturelle

$$(2) \qquad \partial^1(F,\mathbf{G}_\gamma,\mathbf{G}) \longrightarrow \bigoplus_v \partial^1(F_v,\mathbf{G}_\gamma,\mathbf{G}).$$

Supposons, pour simplifier encore un peu, que $\mathbf{G}$ est semi-simple (et toujours simplement connexe). Dans le cas non archimédien, le théorème de Kneser-Bruhat-Tits selon lequel $H^1(F_v, \mathbf{G}) = 0$ et la dualité de Tate-Nakayama appliquée au tore $\mathbf{G}_\gamma$ nous donnent alors une injection $\partial^1(F_v, \mathbf{G}_\gamma, \mathbf{G}) \hookrightarrow X_*(\mathbf{G}_\gamma)_{\Gamma_v}$. Un morphisme analogue existe pour v archimédienne, et par composition et somme on en déduit une flèche

$$\bigoplus_v \partial^1(F_v, \mathbf{G}_\gamma, \mathbf{G}) \longrightarrow X_*(\mathbf{G}_\gamma)_\Gamma, \tag{3}$$

ce dernier groupe étant fini, puisque $\mathbf{G}_\gamma$ est F-anisotrope. Nous noterons $\mathfrak{K}(\gamma)$ le groupe dual de $X_*(\mathbf{G}_\gamma)_\Gamma$.

Théorème 1.1 (Langlands, Kottwitz). — *L'image de l'application (2) coïncide avec le noyau de la flèche (3). Ses fibres ont pour cardinal $\tau(G)\tau(G_\gamma)^{-1}|\mathfrak{K}(\gamma)|$, les τ désignant les nombres de Tamagawa.*

Ce théorème est valable sans hypothèse de semi-simplicité, mais la définition générale de $\mathfrak{K}(\gamma)$ est plus compliquée. Notons maintenant $\mathrm{inv}(\gamma, -)$ la composée

$$\mathbf{G}/\mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A}_F) = {\prod_v}' \mathbf{G}/\mathbf{G}_\gamma(F_v) \xrightarrow{\oplus \mathrm{inv}_v} \bigoplus_v \partial^1(F_v, \mathbf{G}_\gamma, \mathbf{G}) \longrightarrow \mathfrak{K}(\gamma)^*.$$

Par le théorème précédent, on peut reformuler (1) en

$$\sum_{\gamma' \in \mathbf{G}(F)/\mathrm{conj}, \gamma' \sim_{st} \gamma} \tau(\mathbf{G}_{\gamma'}) O_{\gamma'}(f) = \tau(\mathbf{G}) |\mathfrak{K}(\gamma)| \int_{\mathbf{G}/\mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A}_F)} \delta_{\mathrm{inv}(\gamma,x),0} f(x\gamma x^{-1}) dx,$$

ce qui par transformation de Fourier sous le groupe $\mathfrak{K}(\gamma)$, nous donne :

$$\sum_{\gamma' \in \mathbf{G}(F)/\mathrm{conj}, \gamma' \sim_{st} \gamma} \tau(\mathbf{G}_{\gamma'}) O_{\gamma'}(f) = \tau(\mathbf{G}) \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}(\gamma)} O^\kappa_\gamma(f) \tag{4}$$

où

$$O^\kappa_\gamma(f) = \int_{\mathbf{G}/\mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A}_F)} \langle \kappa, \mathrm{inv}(\gamma, x) \rangle f(x\gamma x^{-1}) dx = \prod_v O^\kappa_\gamma(f_v).$$

L'expression ci-dessus est la κ-intégrale orbitale globale. Il est bon de souligner que celle-ci ne dépend que de la classe stable de γ dans $G(F)$, tandis que les κ-intégrales orbitales locales *dépendent d'un point base dans la classe stable* : si γ_v est stablement conjugué à γ dans $G(F_v)$, alors $O^\kappa_{\gamma_v}(f_v) = \langle \kappa, \mathrm{inv}_{F_v}(\gamma, \gamma_v) \rangle O^\kappa_\gamma(f_v)$.

1.5. Endoscopie et transfert global

On a obtenu l'expression

$$T^{regell}_G(f) = \tau(\mathbf{G}) \sum_{\gamma \in \mathbf{G}(F)^{regell}_{/\mathrm{st}}} \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}(\gamma)} \mathcal{O}^\kappa_\gamma(f).$$

Le but de l'endoscopie est d'exprimer les κ-intégrales orbitales comme des intégrales stables sur des groupes quasi déployés de dimension inférieure ou égale à celle de $\mathbf{G}$. Voici les groupes qui vont apparaître : soit $\Phi = (\mathbb{X}^*, \Sigma, \mathbb{X}_*, \Sigma^\vee)$ le système de racines absolu de $\mathbf{G}$. Si s est un caractère de $\mathbb{X}_*$, on lui associe le système de racines $\Phi_s := (\mathbb{X}^*, \Sigma_s, \mathbb{X}_*, \Sigma^\vee_s)$ où $\Sigma^\vee_s$ est l'ensemble des coracines dans le noyau de s. Ce système définit un groupe réductif connexe $\mathbf{G}_s$ sur $\overline{F}$. Fixons une base Δ de Σ ; elle détermine une base Δ_s de Σ_s. La structure F-rationnelle de $\mathbf{G}$ induit une action de Γ sur Φ qui stabilise Δ : on note $\Gamma \longrightarrow Aut(\Phi,\Delta)$. On a en particulier une action de $W_G \rtimes \Gamma$ sur $\mathbb{X}_*$ qui induit une action $(W_G \rtimes \Gamma)_s \longrightarrow Aut(\Phi_s)$ du fixateur de s sur Φ_s. Notons alors $(W_G \rtimes \Gamma)_{s,\Delta}$ le stabilisateur de Δ_s dans $(W_G \rtimes \Gamma)_s$.

Définition 1.2. — *Une* donnée endoscopique [(3)] *est un couple* (s,ρ) *où* s *est un caractère de* $\mathbb{X}_*$ *et* $\rho:\ \Gamma \longrightarrow W_G \rtimes \Gamma$ *est une section d'image contenue dans* $(W_G \rtimes \Gamma)_{s,\Delta}$. *Elle est dite* elliptique *si* $\mathbb{X}_*^{W_s \rtimes_\rho \Gamma} = \{0\}$.

Il y a une notion d'isomorphisme de données endoscopiques que nous passons sous silence. La donnée de ρ induit une action $\Gamma \longrightarrow Aut(\Phi_s,\Delta_s)$ et donc munit $\mathbf{G}_s$ d'une F-structure quasi déployée que nous noterons $\mathbf{G}_{s,\rho}$. On peut remarquer que lorsque s est le caractère trivial et ρ la section triviale, le groupe $\mathbf{G}_{s,\rho}$ est la forme intérieure quasi déployée de $\mathbf{G}$.

Voici comment ces groupes apparaissent : nous avons vu que (dans le cas semi-simple simplement connexe) $\mathfrak{K}(\gamma)$ est le dual de $X_*(\mathbf{G}_\gamma)_\Gamma$. Puisque $\mathbf{G}_\gamma$ est un tore maximal de $\mathbf{G}$, on a une W_G-classe de conjugaison canonique d'isomorphismes $X_*(\mathbf{G}_\gamma) \xrightarrow{\sim} \mathbb{X}_*$ de groupes abéliens. Choisissons un tel isomorphisme. Transportant $\kappa \in \mathfrak{K}(\gamma)$, on en déduit un caractère s_κ de $\mathbb{X}_*$. Transportons aussi l'action de Γ sur $X_*(\mathbf{G}_\gamma)$ à $\mathbb{X}_*$; l'action obtenue est donnée par une section $\mu_\gamma:\ \Gamma \longrightarrow W_G \rtimes \Gamma$. Puisque s_κ est invariant par cette action, l'image de μ_γ est dans le fixateur $(W_G \rtimes \Gamma)_{s_\kappa}$. En particulier μ_γ induit une action de Γ sur Φ_{s_κ} et donc sur W_{s_κ}. Il existe alors une unique section $\nu_\gamma:\ \Gamma \hookrightarrow W_s \rtimes_{\mu_\gamma} \Gamma$ qui fixe Δ_{s_κ}. La composée $\rho_\gamma := (\mathrm{inj} \rtimes \mu_\gamma) \circ \nu_\gamma$ est une section $\Gamma \longrightarrow (W_G \rtimes \Gamma)_{s_\kappa,\Delta}$. On obtient donc une donnée endoscopique (s_κ,ρ_γ) qui est clairement elliptique. On a même une donnée supplémentaire : en effet, par construction, l'action de Γ sur $X_*(\mathbf{G}_\gamma)$ se déduit de celle sur $\mathbb{X}_*(\mathbf{G}_{s_\kappa,\rho_\gamma})$ par un cocycle $\Gamma \longrightarrow W_{s_\kappa} \rtimes \Gamma$, de sorte que la $\mathbf{G}_{s_\kappa,\rho_\gamma}(\overline{F})$-classe de conjugaison de $\overline{F}$-plongements $\mathbf{G}_\gamma \hookrightarrow \mathbf{G}_{s_\kappa,\rho_\gamma}$ déterminée par l'isomorphisme $X_*(\mathbf{G}_\gamma) \xrightarrow{\sim} \mathbb{X}_*$ est Γ-stable. Puisque $\mathbf{G}_{s_\kappa,\rho_\gamma}$ est quasi déployé, un résultat de Steinberg assure alors l'existence dans cette classe d'un F-plongement de $\mathbf{G}_\gamma$ dans $\mathbf{G}_{s_\kappa,\rho_\gamma}$, qui est donc bien défini à conjugaison *stable* près. Ainsi, au couple (γ,κ), on a associé une donnée endoscopique (s_κ,ρ_γ) et une classe de conjugaison stable $\gamma_{s_\kappa,\rho_\gamma}$ de $\mathbf{G}_{s_\kappa,\rho_\gamma}$ image de γ par ce plongement. Cependant, cette construction dépend du choix de l'isomorphisme $X_*(\mathbf{G}_\gamma) \xrightarrow{\sim} \mathbb{X}_*$.

Il y a une construction réciproque qui, elle, est sans ambiguïté ; on sait que les classes de conjugaison semi-simples de $\mathbf{G}(\overline{F})$ sont en bijection avec $(\mathbb{X}_* \otimes \overline{F})/W_G$. Ainsi par définition de $\mathbf{G}_s$, on a une application $\mathbf{G}_{s,\rho}(\overline{F})^{ss}_{/\mathrm{conj}} \longrightarrow \mathbf{G}(\overline{F})^{ss}_{/\mathrm{conj}}$. On vérifie que cette application est Γ-équivariante, de sorte que si δ est une classe stable elliptique fortement régulière de $\mathbf{G}_{s,\rho}(F)$, elle détermine au plus une classe stable γ de $\mathbf{G}(F)$ (et exactement

(3) Cette définition n'est correcte que sous l'hypothèse simplificatrice de semi-simplicité et simple connexité de $\mathbf{G}$. Nous avons préféré éviter d'utiliser le L-groupe, comme dans [22] et [14]. Nous renvoyons à [17, par. 7] pour la définition générale, en termes de L-groupes.

une, si $\mathbf{G}$ est quasi déployé, en vertu du résultat de Steinberg mentionné ci-dessus), qui est elliptique si la donnée (s,ρ) l'est. On dit que δ est G-régulière si γ existe et est régulière dans $\mathbf{G}(F)$. De manière analogue au précédent paragraphe, le choix d'un isomorphisme $X_*((\mathbf{G}_{s,\rho})_\delta) \xrightarrow{\sim} \mathbb{X}_*$ dans la W_s-classe de conjugaison canonique induit un isomorphisme $(\mathbf{G}_{s,\rho})_\delta \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_\gamma$ et permet de transporter s en un caractère κ de $X_*(\mathbf{G}_\gamma)$ invariant sous Γ. Mais cette fois le choix de l'isomorphisme est indifférent. On notera $(s,\rho,\delta) \mapsto (\gamma,\kappa)$ l'application partielle obtenue ; elle est à fibres finies et surjective par le paragraphe précédent.

Conjecture 1.3 (Transfert). — *Soit (s,ρ) une donnée endoscopique et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{G}(\mathbb{A}_F))$. Il existe une fonction $f_{s,\rho} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{G}_{s,\rho}(\mathbb{A}_F))$ telle que, pour toute classe* stable *elliptique G-régulière δ de $\mathbf{G}_{s,\rho}(F)$, on a*

$$SO_\delta(f_{s,\rho}) = O_\gamma^\kappa(f),$$

si $(s,\rho,\delta) \mapsto (\gamma,\kappa)$.

En admettant cette conjecture et en étudiant les fibres de l'application $(s,\rho,\delta) \mapsto (\gamma,\kappa)$, Langlands a montré la formule (pour F un corps de nombres)

$$T_G^{regell}(f) = \sum_{(s,\rho)/\sim} \iota(G,s,\rho) ST_{G_{s,\rho}}^{G-regell}(f_{s,\rho}) \qquad (5)$$

où

$$ST_{G_{s,\rho}}^{G-regell}(g) := \tau(\mathbf{G}_{s,\rho}) \sum_{\gamma \in \mathbf{G}_{s,\rho}(F)^{G-regell}_{/\text{conj. st.}}} SO_\gamma(g), \quad \text{pour } g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{G}_{s,\rho}(\mathbb{A}_F)).$$

La formule (5) est la "stabilisation de la partie elliptique régulière de la formule des traces de $\mathbf{G}$ sur F" [25]. Elle sert de modèle pour la stabilisation de toute la partie elliptique [18], de toute la formule des traces [3][2][4], et des analogues tordus [21] et [22]. *Tous ces travaux* supposent la conjecture de transfert (éventuellement une variante tordue) vérifiée.

1.6. Transfert local et lemme fondamental

Puisque les intégrales orbitales stables et les κ-intégrales orbitales sont produits de facteurs locaux analogues, une manière d'établir (et d'expliciter un peu) le transfert de la conjecture 1.3 est de le déduire de transferts locaux à toutes les places. La forme naïve que prendrait un tel transfert serait (avec les notations de 1.3) : "étant donnée $f_v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{G}(F_v))$, il existe $f'_v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{G}_{s,\rho}(F_v))$ telle que, pour toute classe G_v-régulière δ dans $\mathbf{G}_{s,\rho}(F_v)$, on ait $SO_\delta(f'_v) = O_\gamma^\kappa(f_v)$". Mais ceci n'est pas possible pour au moins deux raisons : tout d'abord les κ-intégrales orbitales dépendent d'un point base dans la classe stable γ, donc un seul choix de point-base est permis et il faut trouver un moyen de le déterminer. D'autre part, les intégrales orbitales $O_\gamma(f)$, en tant que fonction de γ élément semi-simple régulier, "explosent" au voisinage des éléments singuliers. Ainsi quand δ approche un élément G_v-singulier mais régulier, $SO_\delta(f'_v)$ reste bornée tandis que $O_\gamma(f_v)$ "explose", ce qui empêche évidemment l'égalité des deux expressions.

Une possibilité pour résoudre ces problèmes est d'introduire des facteurs $\Delta_v(\delta,\gamma)$ qui dépendent de la classe stable de δ et de la classe *ordinaire* de γ. En prenant en compte toutes les contraintes de la situation, Langlands et Shelstad [26] ont trouvé une définition pour ces facteurs, et les ont appelés *facteurs de transfert.* La conjecture locale prend alors la forme suivante, où l'on se place dans un contexte *local* (voir introduction), avec une définition des données endoscopiques et des applications $(s,\rho,\delta) \mapsto (\gamma,\kappa)$ analogues au cas global :

Conjecture 1.4 (Transfert local). — *Soit (s,ρ) une donnée endoscopique de* $\mathbf{G}$ *sur F et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{G}(F))$. Il existe une fonction $f_{s,\rho} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{G}_{s,\rho}(F))$ telle que, pour toute classe* stable *fortement G-régulière δ de $\mathbf{G}_{s,\rho}(F)$ et toute classe* ordinaire *γ de $\mathbf{G}(F)$, on a*

$$SO_\delta(f_{s,\rho}) = \Delta(\delta,\gamma) O_\gamma^\kappa(f),$$

si $(s,\rho,\delta) \mapsto (\gamma,\kappa)$ [(4)]*.*

Pour que cette conjecture locale serve à la conjecture globale, il faut deux choses : d'une part, dans un contexte global, le produit des facteurs de transfert locaux doit être égal à 1 : ceci fait partie des contraintes que s'étaient fixées Langlands et Shelstad. D'autre part, aux places non ramifiées, les fonctions caractéristiques des compacts hyperspéciaux intervenant dans la définition des groupes adéliques doivent se correspondre. On est donc amené au supplément suivant :

Conjecture 1.5 (Lemme fondamental). — *Soit* $\mathbf{G}$ *un groupe non ramifié sur F et (s,ρ) une donnée endoscopique non ramifiée. Alors pour toute classe* stable *fortement G-régulière δ de $\mathbf{G}_{s,\rho}(F)$ et toute classe* ordinaire *γ de $\mathbf{G}(F)$, on a*

$$SO_\delta(1_{\mathbf{G}_{s,\rho}(\mathcal{O})}) = \Delta(\delta,\gamma) O_\gamma^\kappa(1_{\mathbf{G}(\mathcal{O})}),$$

si $(s,\rho,\delta) \mapsto (\gamma,\kappa)$.

En fait les facteurs de transfert ne sont définis qu'à un multiple près, ce qui n'est pas gênant pour la conjecture de transfert mais l'est pour le lemme fondamental, une fois les choix de mesures naturels effectués. Dans le cas $\mathbf{G}$ quasi déployé, la définition de Langlands-Shelstad associe à tout choix d'épinglage de $\mathbf{G}$ sur F une normalisation des facteurs de transfert. D'autre part, l'énoncé du lemme fondamental dépend de prolongements entiers réductifs connexes de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}_{s,\rho}$; il faut choisir ces prolongements entiers de façon compatible à l'épinglage dont dépendent les facteurs de transfert, *cf.* [12, 7.1].

Le facteur de transfert $\Delta(\delta,\gamma)$ est le produit d'une puissance de p, un quotient de discriminants faciles à définir, et d'une racine de l'unité (qui est même un signe pour les groupes classiques) qui, elle, est difficile à définir. Nous ne donnerons pas sa définition

(4) Pour renouer avec les notations de l'introduction, il faut poser $O_\delta^{G|H} := \Delta(\delta,\gamma) O_\gamma^\kappa$ si $H = G_{s,\rho}$.

générale, mais signalons qu'il a été calculé par Waldspurger [37] pour tous les groupes classiques. De plus, dans le cas non ramifié, une définition générale plus simple a été proposée par Hales [12] et dans le cas des algèbres de Lie, une caractérisation agréable a été donnée par Kottwitz dans [20].

Pour un peu plus de détails et d'exemples sur le lemme fondamental, nous recommandons [14] (qui toutefois recule aussi devant les facteurs de transfert). On y trouvera une (courte) liste des cas particuliers du lemme fondamental (non tordu) connus jusqu'à présent, la seule famille de groupes, $SL(n), n \in \mathbb{N}$, étant due à Waldspurger [35].

1.7. Les réductions de Waldspurger (après Langlands-Shelstad et Hales)

La variante "algèbres de Lie" du lemme fondamental introduite par Waldspurger est formellement analogue à l'énoncé 1.5 sauf que les fonctions-test sont $1_{\mathbf{g}_{s,\rho}(\mathcal{O})}$ et $1_{\mathbf{g}(\mathcal{O})}$ et les classes de conjugaison γ et δ sont respectivement dans les algèbres de Lie rationnelles $\mathbf{g}(F)$ et $\mathbf{g}_{s,\rho}(F)$. Les centralisateurs de tels éléments sont toujours connexes, et il n'y a donc pas lieu de parler de "fortement" régulier.

Lorsque le corps F est de caractéristique nulle (une extension finie de $\mathbb{Q}_p$), Waldspurger a montré [36], à la suite des travaux de Langlands-Shelstad [27] et de Hales [13], que pour résoudre la conjecture de transfert pour une paire endoscopique $(\mathbf{G}, (s, \rho))$ sur F, il suffit de connaître la version "algèbres de Lie" du lemme fondamental pour certaines familles de paires endoscopiques non ramifiées $(\mathbf{G}', (s', \rho'))$ de même système de racines absolu qu'un centralisateur d'élément semi-simple dans $\mathbf{G}$, et définies sur d'autres corps locaux F' de caractéristique nulle, dont on peut de plus supposer les caractéristiques résiduelles supérieures à un entier donné.

Par ailleurs, il a montré récemment [38] qu'en supposant la caractéristique résiduelle assez grande (avec minorant explicite en fonction du système de racines de $\mathbf{G}$), l'énoncé du lemme fondamental pour les algèbres de Lie ne dépend *que du corps résiduel.* Plus précisément : notons k le corps résiduel de F et fixons un prolongement de $\mathbf{G}$ en un groupe réductif connexe sur $\mathcal{O}_F$. Puisque $\mathcal{O}_F$ et $k[[T]]$ ont des groupes de Galois isomorphes (à $\widehat{\mathbb{Z}}$), $\mathbf{G}$ détermine un "unique" groupe réductif $\mathbf{G}'$ sur $k[[T]]$ et chaque donnée endoscopique non ramifiée de $\mathbf{G}$ se transfère à $\mathbf{G}'$. Waldspurger définit alors une correspondance $\delta \leftrightarrow \delta'$ entre classes de conjugaison stable dans $\mathbf{g}_{s,\rho}(F)^{G-reg}$ et $\mathbf{g}_{s',\rho'}(k((T)))^{G-reg}$, de sorte qu'on a les égalités $SO_\delta(1_{\mathbf{H}(\mathcal{O}_F)}) = SO_{\delta'}(1_{\mathbf{H}'(k[[T]])})$ et $\Delta(\delta,\gamma)O^\kappa_\delta(1_{\mathbf{G}(\mathcal{O}_F)}) = \Delta(\delta',\gamma')O^{\kappa'}_{\delta'}(1_{\mathbf{G}'(k[[T]])})$ (pour n'importe quels γ, γ' dans la classe stable associée à δ, resp. δ').

Soulignons une conséquence de tout ceci, reposant sur le fait que le centralisateur d'un élément semi-simple dans $GL(N)$ est un produit de $GL(m)$. Pour résoudre les conjectures de transfert globales ou locales de Langlands-Shelstad relatives aux groupes unitaires sur un corps de nombres ou p-adique, il suffit de savoir résoudre le lemme fondamental dans sa version "algèbres de Lie" pour tout groupe unitaire non ramifié sur $\mathbb{F}_{(p')^d}((T))$ avec p' "grand".

1.8. Le lemme fondamental pour les groupes unitaires

Pour conclure cette partie, nous explicitons l'énoncé du lemme fondamental pour l'algèbre de Lie d'un groupe unitaire non ramifié d'égales caractéristiques, sous la forme qui est démontrée par Laumon et Ngô. Fixons une puissance q d'un nombre premier $p > 2$ et posons $F := \mathbb{F}_q((T))$.

1.8.1. Groupes unitaires. — Pour $n \in \mathbb{N}$, notons Φ_n la matrice ayant des 1 sur l'antidiagonale et des 0 ailleurs. À toute extension quadratique F'/F, on associe le schéma en groupes réductifs unitaire quasi déployé en n variables sur F défini par

$$\mathbf{U}_{F'|F}(n)(R) = \left\{g \in GL_n(R \otimes_F F'),\ \ \Phi_n.\tau({}^t g^{-1}).\Phi_n^{-1} = g\right\}$$

pour toute F-algèbre R, et où τ désigne l'élément non trivial de $Gal(F'/F)$. On note $U_{F'|F}(n) := \mathbf{U}_{F'|F}(n)(F)$ les points rationnels et $\mathbf{u}_{F'|F}(n)$ l'algèbre de Lie. Ces groupes ont un centre compact et un groupe dérivé simplement connexe. Lorsque F' est "l"'extension quadratique non ramifiée de F, on note simplement $\mathbf{U}(n)$ à la place de $\mathbf{U}_{F'|F}(n)$. Dans ce cas, on le prolonge en un schéma en groupes réductifs connexe sur $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F$, en remplaçant simplement F par $\mathcal{O}$ et F' par $\mathcal{O}_{F'}$ dans la définition ci-dessus.

1.8.2. Tores elliptiques. — On a déjà signalé que les tores maximaux elliptiques de $\mathbf{U}(n)$ sont de la forme $\mathbf{T}_{I,(F_i)} := \prod_{i\in I} \mathrm{Res}_{F_i|F}\mathbf{U}_{F_i'|F_i}(1)$ où les F_i sont des extensions séparables de F disjointes de F' (*i.e.* de degré résiduel impair) telles que $\sum_{i\in I} \deg(F_i|F) = n$ et $F_i' = F_iF'$ est l'extension quadratique non ramifiée de F_i. Nous allons décrire les classes de conjugaison de F-plongements $\mathbf{T}_{I,(F_i)} \hookrightarrow \mathbf{U}(n)$ dans une classe stable fixée. On a pour tout F, F', n des isomorphismes

$$H^1(F, \mathbf{U}_{F'|F}(n)) \xrightarrow{\sim} F^\times/\mathrm{Nr}_{F'|F}(F'^\times) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

et ce groupe de cohomologie ne fait rien d'autre que classifier les classes d'équivalence de formes hermitiennes sur F'^n par leur discriminant. Ainsi

$$\partial^1(F, \mathbf{T}_{I,(F_i)}, \mathbf{U}(n)) \simeq \mathit{ker}\left((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right),$$

où le morphisme de droite est le morphisme somme. Concrètement, soient $(\lambda_i)_{i\in I} \in \partial^1(F, \mathbf{T}_{I,(F_i)}, \mathbf{U}(n))$; choisissons des éléments $c_i \in F_i$ tels que la forme hermitienne Ψ_{i,c_i} : $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{F_i'|F'}(c_i x^\tau y)$ sur le F'-espace vectoriel F_i' soit de discriminant λ_i. Alors les F-espaces hermitiens (F'^n, Φ_n) et $(\oplus_i F_i', \oplus_i \Psi_{i,c_i})$ sont isomorphes, et tout isomorphisme induit un F-plongement $\mathbf{T}_{I,(F_i)} \hookrightarrow \mathbf{U}(n)$. Deux tels isomorphismes sont conjugués et en faisant varier $(\lambda_i)_{i\in I}$ on obtient ainsi les classes de conjugaison dans la classe stable associée à un isomorphisme F'-linéaire $\oplus_i F_i' \xrightarrow{\sim} (F')^n$.

1.8.3. Éléments elliptiques réguliers. — Un élément de l'algèbre de Lie rationnelle de $\mathbf{T}_{I,(F_i)}$ est un I-uplet $\gamma_I = (\gamma_i)_{i\in I}$ avec $\gamma_i \in F_i'$ vérifiant $\gamma_i + \gamma_i^\tau = 0$. Un tel élément est régulier (pour tout F-plongement $\mathbf{T}_{I,(F_i)} \hookrightarrow \mathbf{U}(n)$) si γ_i engendre F_i' sur F' et les polynômes minimaux $P_i(X)$ des γ_i sont premiers entre eux, deux à deux. Pour les besoins du lemme fondamental, on peut supposer que $\gamma_i \in \mathcal{O}_{F_i'}$ pour tout i.

1.8.4. Intégrales orbitales. — Fixons $\lambda_I := (\lambda_i)_{i\in I} \in \partial^1(F, \mathbf{T}_{I,(F_i)}, \mathbf{U}(n))$ et un F-plongement associé $\iota : \mathbf{T}_{I,(F_i)} \hookrightarrow \mathbf{U}(n)$. On notera $O_{\gamma_I}^{\lambda_I}$ l'intégrale orbitale $O_{\iota(\gamma_I)}(1_{\mathbf{u}(n)(\mathcal{O})})$, qui ne dépend bien sûr pas du choix de ι. Alors on a

$$\begin{aligned} O_{\gamma_I}^{\lambda_I} &= |\{x \in \mathbf{U}(n)(\mathcal{O})\backslash\mathbf{U}(n)(F), \text{ t.q. } \mathrm{Ad}(x)(\iota(\gamma_I)) \in \mathbf{u}(n)(\mathcal{O})\}| \\ &= |\{\text{réseaux autoduaux } M \subset (F')^n, \text{ t.q. } \iota(\gamma_I)M \subseteq M\}| \\ &= |\{\text{réseaux } M_I \subset F'_I, \text{ t.q. } (M_I)^{\perp_{c_I}} = M_I \text{ et } \gamma_I M_I \subset M_I\}|. \end{aligned}$$

Précisons la dernière ligne : on compte les $\mathcal{O}_{F'}$-réseaux M_I dans le F'-espace vectoriel $F'_I := \oplus_i F'_i$, autoduaux pour une forme hermitienne $\oplus_i \Psi_{i,c_i}$ comme dans 1.8.2, et stables par γ_I. Cette formulation se prête bien à l'approche géométrique initiée dans [11] via les fibres de Springer affines.

L'approche de Laumon [28] et Laumon-Ngô commence par la réinterprétation suivante du comptage ci-dessus. Un réseau M_I de F'_I stable par γ_I est simplement un idéal fractionnaire de l'anneau $A_I := \mathcal{O}_{F'}[\gamma_I] \subset \mathcal{O}_{F'_I}$ (qui a pour anneau total de fractions F'_I). En termes géométriques, c'est un point rationnel de la Jacobienne compactifiée du germe de courbe $\mathrm{Spf}(A_I)$. Soit $c_I^0 \in F_I$ un générateur du module dualisant relatif de A_I sur $\mathcal{O}_{F'}$. Un calcul montre que l'orthogonal de A_I pour la forme hermitienne $\Psi_{I,c_I} := \oplus_i \Psi_{i,c_i}$ est donné par la formule $(A_I)^{\perp_{c_I}} = c_I^0 c_I^{-1} A_I$. On a donc la formule

$$O_{\gamma_I}^{\lambda_I} = |\{\text{idéaux fractionnaires } M_I \text{ de l'anneau } A_I \text{ tels que } M_I = c_I^0 c_I^{-1} M_I^{-1}\}|.$$

1.8.5. Groupes endoscopiques et lemme fondamental. — Les groupes endoscopiques non ramifiés elliptiques de $\mathbf{U}(n)$ sont tous de la forme $\mathbf{U}(n_1)\times\mathbf{U}(n_2)$ pour une partition $n = n_1 + n_2$. Fixons donc un tore F-anisotrope $\mathbf{T}_{I,(F_i)}$ qui se décompose en un produit $\mathbf{T}_{I_1,(F_i)} \times \mathbf{T}_{I_2,(F_i)}$ pour une partition $I = I_1 \sqcup I_2$ telle que $\sum_{i\in I_1} \deg(F_i|F) = n_1$, puis un élément $\gamma_I = (\gamma_{I_1}, \gamma_{I_2})$ de son algèbre de Lie. Par les paragraphes précédents, cet élément détermine une classe stable de $\mathbf{U}(n_1) \times \mathbf{U}(n_2)$ et une classe stable de $\mathbf{U}(n)$.

D'après le calcul ci-dessus, l'intégrale orbitale stable de γ_I dans $\mathbf{U}(n_1) \times \mathbf{U}(n_2)$ est

$$SO_{\gamma_I} = \sum_{\lambda_{I_1},\lambda_{I_2}} O_{\gamma_{I_1}}^{\lambda_{I_1}} O_{\gamma_{I_2}}^{\lambda_{I_2}}$$

où $(\lambda_{I_1}, \lambda_{I_2}) \in \partial^1(F, \mathbf{T}_{I_1,(F_i)}, \mathbf{U}(n)) \times \partial^1(F, \mathbf{T}_{I_2,(F_i)}, \mathbf{U}(n))$.

Par ailleurs le caractère endoscopique κ de $\partial^1(F, \mathbf{T}_{I,(F_i)}, \mathbf{U}(n))$ déterminé par le groupe endoscopique $\mathbf{U}(n_1) \times \mathbf{U}(n_2)$ est le caractère $\partial^1(F, \mathbf{T}_{I,(F_i)}, \mathbf{U}(n)) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de noyau $\partial^1(F, \mathbf{T}_{I_1,(F_i)}, \mathbf{U}(n_1)) \times \partial^1(F, \mathbf{T}_{I_2,(F_i)}, \mathbf{U}(n_2))$. Pour former la κ-intégale orbitale, il faut choisir un point-base dans la classe stable. Laumon et Ngô choisissent un point dans le noyau de κ. On pose donc

$$O_{\gamma_I}^{\kappa} = \sum_{\lambda_I} \kappa(\lambda_I) O_{\gamma_I}^{\lambda_I}$$

où $\lambda_I \in \partial^1(F, \mathbf{T}_{I,(F_i)}, \mathbf{U}(n))$.

Introduisons maintenant l'ingrédient principal pour définir le facteur de transfert : pour $i \neq j$ dans I, on définit un entier r_{ij} par une des égalités

$$\begin{aligned} r_{ij} &:= \mathrm{val}_{F'}(\mathrm{Res}(P_i, P_j)) = f_i \,\mathrm{val}_{E_i'}(P_j(\gamma_i)) = f_j \,\mathrm{val}_{E_j'}(P_i(\gamma_j)) \\ &= [\mathcal{O}_{F'}[\gamma_i] \oplus \mathcal{O}_{F'}[\gamma_j] : \mathcal{O}_{F'}[\gamma_i \oplus \gamma_j]] \end{aligned}$$

où P_i désigne le polynôme minimal de γ_i et f_i le degré résiduel de F_i.

Théorème 1.6 (Laumon, Ngô). — *Supposons $p > n$. Avec les notations ci-dessus, on a l'égalité*

$$O^{\kappa}_{\gamma_I} = (-1)^r q^r SO_{\gamma_I}$$

où

$$r = \sum_{i_1 \in I_1, i_2 \in I_2} r_{i_1 i_2}.$$

Notons que l'entier r s'interprète aussi comme le nombre d'intersection des germes de courbes $\mathrm{Spf}(A_{I_1} = \mathbb{F}_{q^2}[[X]](T)/P_{I_1}(T))$ et $\mathrm{Spf}(A_{I_2} = \mathbb{F}_{q^2}[[X]](T)/P_{I_2}(T))$ dans le germe de surface $\mathrm{Spf}(\mathbb{F}_{q^2}[[X,T]])$.

2. FIBRATION DE HITCHIN ET FORMULE DES TRACES

2.1. Quelques mots sur les champs algébriques

Il est hors de question de donner une définition en forme, pour laquelle nous renvoyons à [29], mais d'en donner un début d'intuition, indispensable pour la suite. Rappelons qu'un groupoïde est une (petite) catégorie dont toutes les flèches sont inversibles. Soient S un schéma et Sch/S la catégorie des S-schémas que l'on munit de la topologie étale. Un S-champ $\mathfrak{X}$ est un "faisceau en groupoïdes" sur Sch/S. Ceci veut signifier qu'à tout S-schéma $T \longrightarrow S$ on associe un groupoïde $\mathfrak{X}(T)$, à tout S-morphisme $T' \longrightarrow T$ un foncteur $\mathfrak{X}(T) \longrightarrow \mathfrak{X}(T')$ avec des compatibilités "à isomorphisme canonique près" pour la composition, et de sorte que pour tout S-morphisme étale surjectif $T' \xrightarrow{f} T$, les données de descente sur les morphismes *et* sur les objets de $\mathfrak{X}(T')$ relativement à f soient effectives. Les S-champs sont les objets d'une 2-catégorie dont les 1 et 2-morphismes sont faciles à deviner.

Champs quotients : Lorsque G est un S-schéma en groupes opérant sur un S-schéma X, on peut définir un champ quotient $[X/G]$. Si T est un S-schéma, $[X/G](T)$ est la catégorie dont les objets sont les couples (P, α), où P est un G_T-torseur sur T et $\alpha : P \longrightarrow X_T$ est un T-morphisme G-équivariant. Un morphisme $(P, \alpha) \longrightarrow (P', \alpha')$ est un morphisme de torseurs β tel que $\alpha'\beta = \alpha$. Enfin si $T' \longrightarrow T$, "le" foncteur $[X/G](T) \longrightarrow [X/G](T')$ est donné par produit fibré. Comme cas particulier, on a $X = S$ avec action triviale ; le champ quotient $[S/G]$ est alors appelé le classifiant et parfois noté $B(G/S)$.

Remarque : Se donner une flèche α comme ci-dessus revient à se donner une section $T \longrightarrow X_T \times_T^G P$ de T dans le produit G-contracté de X_T et P.

Exemples : Si $G = \mathbb{G}_m$, se donner un morphisme $T \longrightarrow B(\mathbb{G}_m) = B(\mathbb{G}_m/Spec\,(\mathbb{Z}))$ revient à se donner un fibré inversible sur T. Si $G = GL(n)$, un morphisme $T \longrightarrow B(GL(n))$ est représenté par un fibré vectoriel de rang n.

La notion de champ *algébrique* (au sens d'Artin) est plus délicate à introduire rapidement. Contentons-nous de dire qu'un S-champ algébrique est à un S-champ ce qu'un S-espace algébrique est à un faisceau sur Sch$/S$: un objet "de nature géométrique", auquel on peut associer un topos muni d'un faisceau d'anneaux structural, des modules quasi cohérents, des groupes de Chow, de K-théorie... et surtout un formalisme de cohomologie étale semblable à celui des schémas, mais sensiblement moins complet[(5)]. Il y a une notion renforcée d'algébricité due à Deligne-Mumford, où l'on demande grosso modo que les groupes d'automorphismes des objets soient finis.

Exemples : La définition d'algébricité montre immédiatement qu'un quotient $[X/G]$ est algébrique (resp. de Deligne-Mumford) si G est lisse (resp. étale), séparé et de présentation finie. Plus difficile est le résultat suivant (qui requiert la théorie des schémas Quot de Grothendieck) : supposons de plus que G se plonge dans $GL(n)_S$ et soit $S \xrightarrow{\pi} Z$ un morphisme *projectif* tel qu'après tout changement de base $Z' \longrightarrow Z$, on ait $\mathcal{O}_{Z'} \xrightarrow{\sim} \pi_*(\mathcal{O}_{S'})$. Alors, le Z-champ "poussé en avant" $\pi_*[X/G]$ est algébrique.

Mise en garde : Supposons que le préfaisceau quotient X/G soit représentable par un schéma. On a alors une flèche canonique $[X/G] \longrightarrow X/G$ qui n'est un isomorphisme (*i.e.* une équivalence de catégories) *que si G agit librement.*

2.2. L'espace de Hitchin

2.2.1. Les objets. — On pose $k = \mathbb{F}_q$ et on en fixe une clôture algébrique $\overline{k}$. Soit X une courbe projective lisse et géométriquement connexe sur k. On note $\eta = Spec\,(F)$ son point générique. Les places de F correspondent aux points fermés de X ; on notera donc $|X|$ à la place de $\mathcal{P}(F)$. On se donne ensuite un schéma en groupes lisse à fibres réductives connexes G sur X. Son algèbre de Lie, Lie(G), est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre dont on note $\mathfrak{g}$ le fibré vectoriel associé. Enfin, on se donne un diviseur effectif $D = \sum_{v\in|X|} d_v[v]$ sur X dont on note T_D "le" $\mathbb{G}_m$-torseur associé.

Le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ opère par homothéties sur $\mathfrak{g}$, ce qui permet de tordre $\mathfrak{g}$ par le diviseur D, en posant $\mathfrak{g}_D := \mathfrak{g} \times^{\mathbb{G}_m} T_D$ qui est le fibré vectoriel associé à Lie$(X) \otimes \mathcal{O}_X(D)$. Comme cette action de $\mathbb{G}_m$ commute à l'action adjointe de G, on tord de la même manière le X-champ quotient $[\mathfrak{g}/G]$ par D et on note $[\mathfrak{g}/G]_D$ le X-champ ainsi obtenu.

Exemple : Dans le cas $G = GL(n) \times_k X$, le groupoïde $[\mathfrak{g}/G]_D(S)$ pour $S \longrightarrow X$ classifie les paires $(\mathcal{E}, \phi)$ où $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang n et $\phi :\ \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}(D)$ un morphisme $\mathcal{O}_S$-linéaire.

---

(5) Signalons ici que Laumon et Ngô admettent certaines propriétés de ce formalisme qui ne se trouvent pas nécessairement dans la littérature.

2.2.2. Un comptage remarquable. — En vertu d'un théorème de Lang selon lequel l'ensemble pointé $H^1(\mathcal{O}_v, G) = 0$ est trivial, la suite d'ensembles pointés

$$H^1(X,G) \longrightarrow H^1(F,G) \longrightarrow \bigoplus_{v\in|X|} H^1(F_v,G)$$

est exacte. Nous supposerons dorénavant pour simplifier certains énoncés que le noyau $ker\,(H^1(F,G) \longrightarrow \bigoplus_{v\in|X|} H^1(F_v,G))$ est trivial. Ceci est par exemple vérifié pour les groupes semi-simples adjoints ou simplement connexes, et pour les groupes unitaires.

Le point de départ de l'approche de Ngô est l'"observation" suivante :

PROPOSITION 2.1 (Ngô [33]). — *Le groupoïde $[\mathfrak{g}/G]_D(X)$ est équivalent au groupoïde $\mathcal{C}_D$ dont les objets sont les couples $(\gamma, (g_v)_{v\in|X|})$ où*

- *$g_v \in G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)$ presque partout triviaux,*
- *$\gamma \in \mathfrak{g}(F)$, tel que $ad(g_v)^{-1}\gamma \in \varpi_v^{-d_v}\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$*

et où $Hom_{\mathcal{C}}\left((\gamma,(g_v)_{v\in|X|}),(\gamma',(g'_v)_{v\in|X|})\right) := \{x \in G(F),\ \gamma' = ad(x)\gamma \text{ et } g'_v = xg_v\}$, la composition étant donnée par la multiplication dans $G(F)$.

Démonstration. — Soit $(\gamma, (g_v)_{v\in|X|})$ un couple comme dans l'énoncé. Si U est un ouvert de X tel que g_v soit trivial pour $v \in |U|$, la donnée des g_v permet de recoller "à la Beauville-Lazslo" le G_U-torseur trivial G_U aux torseurs triviaux G_v, $v \in X \setminus U$. On obtient ainsi un G-torseur E sur X et la condition sur les g_v permet d'identifier γ à une section ϕ de $\mathrm{Lie}(Aut(E))\otimes\mathcal{O}_X(D)$, c'est-à-dire à une section de $\mathfrak{g}_D\times^G E$. La paire (E,ϕ) ainsi obtenue est un objet de $[\mathfrak{g}/G]_D(X)$, qui est bien défini à isomorphisme unique près puisque E est par construction trivialisé sur F. Le procédé est donc fonctoriel et on vérifie facilement qu'il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif. □

Pour voir se dessiner une conséquence remarquable, notons $\mathcal{C}_D^{ssreg}$, resp. $\mathcal{C}_D^{ell}$, la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_D$ correspondant à la condition $\gamma \in \mathfrak{g}(F)^{ssreg}$, resp. $\gamma \in \mathfrak{g}(F)^{ell}$. Alors si le centre de G_η est anisotrope, $\mathcal{C}_D^{ell}$ est un groupoïde essentiellement fini de cardinal

$$|\mathcal{C}_D^{ell}| = \sum_{\gamma\in\mathfrak{g}(F)^{ell}_{/\mathrm{ad}}} \int_{G(\mathbb{A}_F)/G_\gamma(F)} 1_D(\mathrm{ad}(x)\gamma)dx$$

si la mesure sur $G(\mathbb{A}_F)$ vaut 1 sur $\prod_v G(\mathcal{O}_v)$ et 1_D désigne la fonction $\otimes_v 1_{\varpi_v^{-d_v}\mathcal{O}_v}$. On retrouve donc l'analogue pour l'algèbre de Lie de la partie elliptique de la formule des traces, telle qu'elle apparaît dans les travaux de Waldspurger [36] !

Pour rendre utilisable cette formule, posons $\mathcal{M}_D := (\pi_X)_*([\mathfrak{g}/G]_D)$ le k-champ poussé en avant par $X \xrightarrow{\pi_X} Spec\,(k)$. Il associe donc à tout k-schéma S le groupoïde des paires (E,ϕ) où E est un G-torseur sur $X\times_k S$ et ϕ une section de $\mathrm{Lie}(Aut(E))\otimes\mathcal{O}_X(D)$. Une telle paire est dite "de Hitchin". $\mathcal{M}_D$ est un champ algébrique, *cf.* 2.1, appelé "espace de Hitchin". Il n'est pas de type fini mais on aimerait définir un sous-k-champ de type fini $\mathcal{M}_D^{ell}$ tel que l'équivalence de la proposition 2.1 induise une équivalence $\mathcal{C}_D^{ell} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_D^{ell}(k)$. Ceci permettrait d'utiliser une formule cohomologique de type Grothendieck-Lefschetz pour étudier les termes elliptiques de la formule des traces ci-dessus.

2.3. La fibration de Hitchin

2.3.1. Un théorème de Chevalley. — Donnons-nous un groupe réductif connexe déployé $\mathbf{G}_0$ sur k et choisissons un tore maximal $\mathbf{T}_0$ de groupe de Weyl W_0 défini sur k. Chevalley a montré que l'inclusion d'algèbres de Lie $\mathfrak{t}_0 \hookrightarrow \mathfrak{g}_0$ induit un isomorphisme de $\overline{k}$-algèbres $Gal(\overline{k}/k)$-équivariant $\overline{k}[\mathfrak{t}_0]^{W_0(\overline{k})} \xrightarrow{\sim} \overline{k}[\mathfrak{g}_0]^{\mathbf{G}_0(\overline{k})}$. Cet isomorphisme définit un k-morphisme $\mathbf{G}_0$-équivariant $\mathfrak{g}_0 \longrightarrow \mathfrak{t}_0/W_0$ qui induit à son tour pour tout corps algébriquement clos K contenant k une bijection $\mathfrak{g}_0(K)^{ssreg}_{/\mathrm{ad}} \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{t}_0^{reg}/W_0)(K)$, où $\mathfrak{t}_0^{reg} = \mathfrak{t}_0 \cap \mathfrak{g}_0^{reg}$ désigne l'ouvert des éléments W_0-réguliers. Pour un corps *non* algébriquement clos, il subsiste une bijection $\mathfrak{g}_0(K)^{ssreg}_{/\mathrm{st}} \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{t}_0^{reg}/W_0)(K)$ où la source désigne l'ensemble des classes *stables* semi-simples régulières de $\mathfrak{g}_0(K)$.

Exemple : Dans le cas $\mathbf{G}_0 = GL(n)$, on a des isomorphismes

$$k[\mathfrak{t}_0]^{W_0} \simeq k[X_1, \cdots, X_n]^{\mathfrak{S}_n} = k[\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n]$$

où les Σ_i sont les polynômes symétriques “élémentaires”. Soient $x \in GL_n(K)$, et $P_x(T) = T^n + a_1 T^{n-1} + \cdots + a_n \in K[T]$ son polynôme caractéristique ; alors l'élément de $(\mathfrak{t}_0/W_0)(K)$ correspondant est défini par $\Sigma_i \mapsto a_i$ pour tout i. Ainsi $\mathfrak{t}_0/W_0$ peut être vu comme “l'espace des polynômes caractéristiques”.

2.3.2. Hypothèses sur G. — Pour mettre en famille la construction de Chevalley, nous supposerons dorénavant que G est une forme extérieure d'un groupe constant $\mathbf{G}_0 \times_k X$. Une telle forme est déterminée par un revêtement étale galoisien fini $X' \longrightarrow X$ et une action de $Gal(X'/X)$ sur la donnée radicielle basée $(\mathbb{X}_*, \Delta, \mathbb{X}^*, \Delta^\vee)$ associée à $\mathbf{G}_0$. En effet, celle-ci équivaut à une action de $Gal(X'/X)$ sur $\mathbf{G}_0 \times_X X'$ qui preserve un épinglage, laquelle permet de descendre $\mathbf{G}_0 \times_X X'$ et son épinglage de X' à X. On fixera un tore maximal T. Le groupe $W := \mathcal{N}_G(T)/T$ est étale sur X, isomorphe à $W_0 \times_k X'$ sur X'. Nous dirons par la suite que G est “constant” si $X' = X$.

Exemple des groupes unitaires : Supposons k de caractéristique $\neq 2$. Soit $X' \xrightarrow{\pi} X$ un revêtement étale de degré 2 avec X' géométriquement connexe, et τ l'élément non trivial de $Gal(X'/X)$. On définit un X-schéma en groupes du type décrit ci-dessus avec $\mathbf{G}_0 = GL(n)$ en posant pour tout $S \longrightarrow X$

$$\mathbf{U}_{X'|X}(n)(S) = \left\{ g \in GL_n(H^0(X' \times_X S, \mathcal{O}_{X' \times_X S})),\ \ \Phi_n.\tau({}^t g^{-1}).\Phi_n^{-1} = g \right\}$$

où Φ_n est la matrice définie en 1.8.1. Dans ce cas $\mathcal{M}_D(S)$ classifie les triplets $(\mathcal{E}, \Phi, \theta)$ où $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel de rang n sur $X' \times_k S$ muni d'une forme hermitienne, *i.e.* un isomorphisme $\Phi : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \tau^*\mathcal{E}^\vee$ (dual) tel que ${}^t\Phi = \tau^*\Phi$, et $\theta : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}(2D)$ est un morphisme hermitien, *i.e.* tel que $\Phi(2D) \circ \theta + \tau^*({}^t\theta)(2D) \circ \Phi = 0$.

2.3.3. Définition du morphisme de Hitchin. — Sous les hypothèses précédentes et en notant $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie du tore T, on obtient par descente du théorème de Chevalley de 2.3.1 un X-morphisme G-équivariant $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{t}/W$ qui se factorise par le champ quotient

$[\mathfrak{g}/G] \longrightarrow \mathfrak{t}/W$ [6]. Faisant agir $\mathbb{G}_m$ par homothéties sur $\mathfrak{t}$, action qui commute à celle de W, on a aussi une forme tordue $[\mathfrak{g}/G]_D \longrightarrow \mathfrak{t}_D/W$. Posons alors $\mathcal{A}_D := \pi_{X*}(\mathfrak{t}_D/W)$ (où $\pi_X : X \longrightarrow Spec(k)$ est le morphisme structural). Puisque X est propre et $\mathfrak{t}_D/W$ est un fibré affine sur X, $\mathcal{A}_D$ est un k-espace affine. En poussant en avant le morphisme de Chevalley par π_X, on obtient la *fibration de Hitchin* $\mathcal{M}_D \xrightarrow{f} \mathcal{A}_D$ qui est un morphisme de k-champs.

Exemple des groupes unitaires (suite) : en globalisant et tordant la description de $\mathfrak{t}_0/W_0$ pour $\mathbf{G}_0 = GL(n)$, on constate que $(\mathfrak{t}_D/W) \times_X X' \longrightarrow X'$ est le fibré affine associé au $\mathcal{O}_{X'}$-module localement libre $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{X'}(2iD)$. Pour descendre à X, introduisons le $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}_D := \pi_*(\mathcal{O}_{X'})^{\tau=-1} \otimes \mathcal{O}_X(2D)$. Alors on vérifie que $(\mathfrak{t}_D/W) \longrightarrow X$ est le fibré affine associé au $\mathcal{O}_X$-module localement libre $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{L}_D^{\otimes i}$.

On en déduit que $\mathcal{A}_D$ est le k-schéma affine associé au k-espace vectoriel

$$\bigoplus_{i=1}^{n} H^0(X, \mathcal{L}_D^{\otimes i}) = \bigoplus_{i=1}^{n} H^0(X', \mathcal{O}_{X'}(2iD))^{\tau^*=(-1)^i}$$

et que le morphisme de Hitchin envoie le triplet hermitien $(\mathcal{E}, \Phi, \theta)$ dans $\mathcal{M}_D(k)$ sur les coefficients $(a_1, \cdots, a_n)$ du polynôme caractéristique $P_\theta(T)$ de θ.

2.3.4. Ouvert des points génériquement semi-simples réguliers. — Soient $\mathcal{A}_D^{reg}$ l'ouvert de $\mathcal{A}_D$ défini par

$$\mathcal{A}_D^{reg}(S) = \{X \times_k S \xrightarrow{a} \mathfrak{t}_D/W, \ \text{t.q.} \quad a_{|\eta \times_k S} \in (\mathfrak{t}_\eta^{reg}/W_\eta)(\eta \times_k S)\}$$

pour tout S-schéma k, et $\mathcal{M}_D^{reg}$ son "image réciproque" par f. Alors l'équivalence de groupoïdes de la proposition 2.1 se restreint à une équivalence $\mathcal{C}_D^{ssreg} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_D^{reg}(k)$.

2.3.5. Exemple des groupes unitaires : courbes spectrales. — Nous avons vu qu'un élément $a \in \mathcal{A}_D(k)$ est un polynôme dont les coefficients sont des sections des puissances d'un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}_D$. La courbe spectrale Y_a est par définition le lieu des zéros de ce polynôme dans l'espace total du fibré en droites $\Sigma_D^0 := \mathbb{V}_X(\mathcal{L}_D^{\otimes -1})$ sur X.

Plus généralement et plus précisément, soit $S \xrightarrow{a} \mathfrak{t}_D/W$ un S-point de $\mathfrak{t}_D/W$. Il est donné par un n-uplet $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \bigoplus_{i=0}^n H^0(S, \mathcal{O}_S \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}_D^{\otimes i})$. Complétons-le par la section identité a_0 pour obtenir un élément de $Hom_{\mathcal{O}_X}\left(\mathcal{L}_D^{\otimes -n}, \mathcal{O}_S \otimes (\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{L}_D^{\otimes i-n})\right)$. On définit alors le "revêtement spectral" Y_a de S comme le sous-S-schéma fermé de $\mathbb{V}(\mathcal{L}_D^{-1}) \times_X S$ dont l'idéal est engendré par l'image de ce morphisme dans $\mathcal{O}_S \otimes \mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_D^{\otimes -1})$. La flèche $Y_a \longrightarrow S$ est donc un revêtement fini de degré n. En particulier, pour $a = \mathrm{Id}_{\mathfrak{t}_D/W}$, on a un revêtement spectral universel $Y_{\mathfrak{t}_D/W} \longrightarrow \mathfrak{t}_D/W$.

La flèche canonique $X \times_k \mathcal{A}_D \longrightarrow \mathfrak{t}_D/W$ fournit donc le revêtement spectral $\Sigma_D^0 \times_k \mathcal{A}_D \supset Y_D \longrightarrow X \times_k \mathcal{A}_D$, fini de degré n, et la composée $Y_D \longrightarrow \mathcal{A}_D$ est une courbe projective relative, appelée "courbe spectrale universelle". Pour $a \in \mathcal{A}_D(\overline{k})$, on en déduit la courbe spectrale Y_a sur $\overline{k}$, qui est un revêtement fini de degré n sur $X \times_k \overline{k}$.

[6] Noter que $\mathfrak{t}/W$ est un X-schéma plus grossier que le champ quotient $[\mathfrak{t}/W]$ et qu'il n'est pas possible de relever ce morphisme en $[\mathfrak{g}/G] \longrightarrow [\mathfrak{t}/W]$.

On vérifie alors que $a \in \mathcal{A}_D^{reg}(\overline{k})$ si et seulement si Y_a est génériquement étale au-dessus de $X \times_k \overline{k}$, et ceci équivaut encore, lorsque $p > n$, à ce que Y_a soit réduite.

2.4. Centralisateurs et champs de Picard

2.4.1. Centralisateurs réguliers. — Reprenons le contexte de 2.3.1 et notons $\chi : \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \mathfrak{t}_0/W_0$ le morphisme de Chevalley. Le schéma en groupes relatif sur $\mathfrak{g}_0$ des centralisateurs

$$I_0 := \{(x,g) \in \mathfrak{g}_0 \times \mathbf{G}_0,\ \mathrm{ad}(g)x = x\}$$

n'est pas plat sur $\mathfrak{g}_0$ mais sa restriction I_0^{reg} au-dessus de $\mathfrak{g}_0^{reg}$ est lisse et commutative. Par descente fidèlement plate pour le morphisme $\chi_{|\mathfrak{g}_0^{reg}} : \mathfrak{g}_0^{reg} \longrightarrow \mathfrak{t}_0/W_0$, on construit un schéma en groupes relatif lisse J_0 sur $\mathfrak{t}_0/W_0$ muni d'un isomorphisme $\chi^*(J_0)_{|\mathfrak{g}_0^{reg}} \xrightarrow{\sim} I_0^{reg}$. Ce dernier se prolonge de manière unique, "par normalité", en un morphisme $\chi^*(J_0) \longrightarrow I_0$. Par ailleurs, Kostant a construit des sections du morphisme de Chevalley $\mathfrak{t}_0/W_0 \longrightarrow \mathfrak{g}_0$ d'image contenue dans $\mathfrak{g}_0^{reg}$; ainsi pour chaque telle section ξ, on a un isomorphisme $J_0 \xrightarrow{\sim} \xi^* I_0$.

Exemple : Dans le cas $\mathbf{G}_0 = GL(n)$, si $a \in (\mathfrak{t}_0/W_0)(K)$ et $P_a(T) = (T^n + a_1 T^{n-1} + \cdots + a_0) \in K[T]$ est le polynôme correspondant, alors $J_{0,a}$ est le K-schéma en groupes associé au groupe des inversibles de l'algèbre $K[T]/P_a(T)$. En d'autres termes, si $Y_a = Spec\,(K[T]/P_a(T)) \xrightarrow{\beta_a} Spec\,(K)$, alors $J_{0,a} = \beta_{a*}\mathbb{G}_m$.

Revenons maintenant au contexte de 2.3.2. Notons encore $I \subset \mathfrak{g} \times G$ le schéma des centralisateurs sur lequel G agit par $g(\gamma, h) = (Ad(g)\gamma, ghg^{-1})$. On obtient en passant au quotient un morphisme représentable de champs $[I/G] \longrightarrow [\mathfrak{g}/G]$ que l'on pourrait appeler "classifiant des automorphismes de $[\mathfrak{g}/G]$" puisque si $S \xrightarrow{e} [\mathfrak{g}/G]$ est un objet de $[\mathfrak{g}/G](S)$ donné par un couple (P, α) comme dans 2.1, alors la fibre $e^*[I/G] \longrightarrow S$ est le S-schéma des automorphismes de la paire (P, α). Notons aussi $[\chi] :\ [\mathfrak{g}/G] \longrightarrow \mathfrak{t}/W$ le morphisme de Chevalley descendu au champ quotient. On construit comme dans le cas constant un schéma en groupes lisse relatif J sur $\mathfrak{t}/W$, muni d'un morphisme $[\chi]^*(J) \to [I/G]$ qui est un isomorphisme au-dessus de $[\mathfrak{g}^{reg}/G]$. On peut aussi tout tordre par D pour obtenir J_D sur $\mathfrak{t}_D/W$ et $[\chi]_D^*(J_D) \to [I/G]_D$. Enfin, on peut adapter la construction des sections de Kostant à notre situation relative et obtenir ainsi des sections $\mathfrak{t}/W \longrightarrow \mathfrak{g}^{reg}$.

Exemple des groupes unitaires : La description qu'on a donnée de J_0 dans le cas $GL(n)$ suggère d'utiliser le revêtement spectral. Notons en effet β la flèche $Y'_{\mathfrak{t}_D/W} = Y_{\mathfrak{t}_D/W} \times_X X' \longrightarrow \mathfrak{t}_D/W$, alors $J_D = \beta_*(\mathbb{G}_m)^{\tau = -1}$.

2.4.2. Action du champ de Picard relatif. — Commençons par un peu d'*abstract non-sense*. Si $\mathcal{T}$ est un faisceau en groupes commutatifs au-dessus d'un schéma $\mathcal{X}$, le $\mathcal{X}$-champ classifiant $B(\mathcal{T}/\mathcal{X})$ est muni d'une structure supplémentaire induite par le produit contracté des $\mathcal{T}$-torseurs : pour $S \longrightarrow \mathcal{X}$, l'ensemble des objets de $B(\mathcal{T}/\mathcal{X})(S)$ est ainsi muni d'une structure de groupe, compatible en un certain sens avec les morphismes. Une telle structure a été formalisée par Deligne et appelée "catégorie de Picard". Une fois convenablement faisceautisée, on obtient la notion de "champ de

Picard" dont $B(\mathcal{T}/\mathcal{X})$ est un exemple. On peut aussi définir la notion d'action d'une catégorie de Picard sur une catégorie, qui au niveau des objets revient à la notion habituelle d'action d'un groupe sur un ensemble. Cette notion se prolonge à son tour en celle d'action d'un champ de Picard sur un champ.

Dans notre situation, le morphisme $[\chi]^*(J) \to [I/G]$ induit une action naturelle du champ de Picard $B(J/(\mathfrak{t}/W))$ sur le champ $[\mathfrak{g}/G]$, au-dessus de $\mathfrak{t}/W$. Décrivons-la sur les objets. Fixons un X-schéma S, une section $S \xrightarrow{e} [\mathfrak{g}/G]$ donnée par une paire (P,α) comme en 2.1, et une section $S \longrightarrow B(J/(\mathfrak{t}/W))$ donnée par un $([\chi]\circ e)^*(J)$-torseur $\mathcal{J}$. Le morphisme $[\chi]^*(J) \to [I/G]$ permet de transférer le $([\chi]\circ e)^*J$-torseur $\mathcal{J}$ en un $e^*[I/G]$-torseur $\mathcal{I}$ et puisque $e^*[I/G]$ opère sur la paire (P,α), on peut tordre celle-ci par $\mathcal{I}$. Ceci définit l'action sur les objets. Comme d'habitude, on peut tordre la construction par D et pousser par π_X ; on obtient un champ de Picard relatif $\mathcal{P}_D \longrightarrow \mathcal{A}_D$ qui agit sur $\mathcal{M}_D$, relativement au-dessus de $\mathcal{A}_D$.

2.4.3. Exemple des groupes unitaires. — Dans le cas unitaire, la courbe spectrale permet d'interpréter géométriquement le champ de Picard $\mathcal{P}_D$ et son action sur $\mathcal{M}_D$. En effet, l'isomorphisme $J_D \simeq \beta_*(\mathbb{G}_m)^{\tau=^{-1}}$ donné plus haut induit un isomorphisme de champs de Picard $\mathcal{P}_D \simeq (\mathrm{Pic}_{Y'_D/\mathcal{A}_D})^{\tau=^{\otimes-1}}$ où $\mathrm{Pic}_{Y'_D/\mathcal{A}_D}$ désigne le champ de Picard relatif "usuel" des $\mathcal{O}_{Y'_D}$-modules inversibles. Ainsi, si $S \longrightarrow \mathcal{A}_D$, la catégorie $\mathcal{P}_D(S)$ a pour objets les couples $(\mathcal{F},\iota)$ où $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{Y'_D\times_{\mathcal{A}_D}S}$-module inversible et ι est un isomorphisme $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \tau^*\mathcal{F}^{-1}$ tel que $\iota = \tau^*(\iota^{\otimes-1})$.

Pour décrire l'action sur le champ $\mathcal{M}_D$, on va se restreindre à l'ouvert $\mathcal{A}_D^{reg}$ au-dessus duquel la courbe Y_D est à fibres géométriquement réduites. On note encore Y'_D pour $Y'_D\times_{\mathcal{A}_D}\mathcal{A}_D^{reg}$ de sorte que $\mathcal{P}_D^{reg} := \mathcal{P}_D\times_{\mathcal{A}_D}\mathcal{A}_D^{reg} = (\mathrm{Pic}_{Y'_D/\mathcal{A}_D^{reg}})^{\tau=^{\otimes-1}}$. Introduisons alors le champ de Picard "compactifié" $\overline{\mathrm{Pic}}_{Y'_D/\mathcal{A}_D^{reg}}$ qui classifie les $\mathcal{O}_{Y'_D}$-modules cohérents sans torsion de rang 1 relatifs (*i.e.* qui sont $\mathcal{O}_{\mathcal{A}_D^{reg}}$-plats et dont la restriction à chaque fibre de $Y'_D \longrightarrow \mathcal{A}_D^{reg}$ est sans torsion et de rang 1 en tout point générique). Malgré son nom, celui-ci n'est pas un champ de Picard au sens général précédent mais est muni d'une action (par produit tensoriel) du champ de Picard $\mathrm{Pic}_{Y'_D/\mathcal{A}_D^{reg}}$. Si l'on munit $\overline{\mathrm{Pic}}_{Y'_D/\mathcal{A}_D^{reg}}$ de la dualité $\mathcal{F}\mapsto\mathcal{F}^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{Y'_D}}(\mathcal{F},\omega_{Y'_D/(X'\otimes\mathcal{A}_D^{reg})})$ (module dualisant relatif), on peut définir le champ $\overline{\mathcal{P}_D^{reg}} := (\overline{\mathrm{Pic}}_{Y'_D/\mathcal{A}_D^{reg}})^{\tau=^\vee}$ dont les objets au-dessus de $S \longrightarrow \mathcal{A}_D^{reg}$ sont les couples $(\mathcal{F},\iota)$ avec $\mathcal{F}\in\overline{\mathrm{Pic}}_{Y'_D/\mathcal{A}_D^{reg}}(S)$ et ι un isomorphisme $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \tau^*\mathcal{F}^\vee$ tel que $\iota = \tau^*(\iota^\vee)$. L'action précédente par produit tensoriel induit une action de $\mathcal{P}_D^{reg}$ sur $\overline{\mathcal{P}_D^{reg}}$.

Maintenant on remarque que si $S \xrightarrow{a} \mathcal{A}_D$ et $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{Y'_a}$-module sans torsion de rang 1 relatif, alors en notant $p'_a : Y'_a \longrightarrow X'\times_k S$ le revêtement spectral de degré n, le $\mathcal{O}_{X'\times_k S}$-module $\mathcal{E} := p'_{a*}(\mathcal{F})$ est localement libre de rang n. De plus, si $\iota : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \tau^*\mathcal{F}^\vee$ est comme ci-dessus, alors $\Phi := p'_{a*}(\iota)$ est une structure hermitienne sur $\mathcal{E}$. Enfin, on définit un morphisme hermitien $\theta : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}(2D)$ grâce au morphisme

$$\mathcal{O}_{X'\times_k S}(-2D) \longrightarrow p'_{a*}(\mathcal{O}_{Y'_a}) \longrightarrow End_{\mathcal{O}_{X'\times_k S}}(\mathcal{E}),$$

la flèche de gauche venant de la définition de Y'_a comme courbe tracée sur le fibré en droites $\mathbb{V}(\mathcal{O}_{X'\times_k S}(-2D))$. On a donc défini un morphisme $\overline{\mathcal{P}_D^{reg}} \longrightarrow \mathcal{M}_D^{reg}$.

Proposition 2.2 ([30], prop. 2.6.1). — *Le morphisme de $\mathcal{A}_D^{reg}$-champs $\overline{\mathcal{P}_D^{reg}} \longrightarrow \mathcal{M}_D^{reg}$ défini ci-dessus est un isomorphisme équivariant sous l'action de $(Pic_{Y'_D/\mathcal{A}_D^{reg}})^{\tau=\otimes-1}$ identifié à $\mathcal{P}_D^{reg}$.*

Il s'agit d'une variante d'un résultat de Beauville, Narasimhan et Ramanan [5].

2.4.4. Quotients. — Voici une étape délicate des travaux de Laumon et Ngô. On voudrait définir un champ quotient $[\mathcal{M}_D/\mathcal{P}_D]$ au-dessus de $\mathcal{A}_D$. Rappelons comment on peut construire le champ quotient $[X/G]$ associé à l'action d'un faisceau en groupes sur un faisceau : pour tout schéma test S, on considère la catégorie quotient $X(S)/G(S)$ dont les objets sont $X(S)$ et les flèches sont données par l'action de $G(S)$. La règle $S \mapsto X(S)/G(S)$ définit un "pré-champ" dont le champ associé peut se décrire comme on l'a fait en 2.1. Lorsque l'action de G est libre, les catégories quotients sont "discrètes", *i.e.* équivalentes à des ensembles, et le champ quotient est essentiellement un faisceau. Supposons maintenant que X, resp. G, soit un champ, resp. un champ de Picard. Par analogie ou généralisation[(7)] de l'exemple précédent, le quotient sera un 2-champ, au sens de [9], associé au 2-préchamp qui à S associe la 2-catégorie (2-groupoïde, en fait) quotient de la catégorie $X(S)$ par la catégorie de Picard $G(S)$. Mais lorsque G agit "librement" en un certain sens sur X, les 2-catégories quotients sont équivalentes à des 1-catégories et le 2-champ quotient est essentiellement un 1-champ. C'est par exemple le cas si pour tous objets x, g de $X(S) \times G(S)$, le morphisme $Aut_{G(S)}(g) \longrightarrow Aut_{X(S)}(gx)$ est injectif. La catégorie quotient $X(S)/G(S)$ se décrit alors comme suit : les objets sont ceux de $X(S)$ et les flèches $x_1 \longrightarrow x_2$ sont les classes d'équivalence de paires (g, α) où $g \in G(S)$ et $\alpha :\ gx_1 \xrightarrow{\sim} x_2$, la relation d'équivalence étant induite par les (iso)morphismes de $G(S)$.

Cette condition est vérifiée pour l'action de $\mathcal{P}_D^{reg}$ sur $\mathcal{M}_D^{reg}$ et on peut donc définir un champ quotient $[\mathcal{M}_D^{reg}/\mathcal{P}_D^{reg}]$.

2.5. Étude ponctuelle et pré-stabilisation

Dans cette section, on fixe une "caractéristique" $a \in \mathcal{A}_D^{reg}(k)$ et on s'intéresse à la fibre $\mathcal{M}_a$ de $\mathcal{M}_D$ au-dessus de a. C'est un k-champ algébrique, localement de type fini sur lequel agit le k-champ de Picard $\mathcal{P}_a = \mathcal{P}_D \times_{\mathcal{A}_D, a} k$, lui aussi algébrique et localement de type fini. Si $\mathcal{C}_a$ désigne la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathcal{C}_D$ de la proposition 2.1 dont les objets sont les couples $(\gamma, (g_v)_{v\in|X|})$ tels que $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$ s'envoie sur $a_{|\eta} \in (t^{reg}/W)(F)$ par le morphisme de Chevalley (rappelons que de tels γ forment une classe de conjugaison *stable*), alors l'équivalence de catégories de ce même lemme induit une équivalence $\mathcal{C}_a \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_a(k)$.

(7) Pour laquelle l'auteur ne connaît pas de référence...

On dit que a est *géométriquement elliptique* si la classe stable γ qui lui correspond est elliptique dans $\mathfrak{g}(F\otimes_k \overline{k})$ (et pas seulement dans $\mathfrak{g}(F)$). Avec cette définition, on vérifie [30, 2.8.1] et [33, par. 7] que de tels a sont les k-points d'un sous-k-schéma ouvert $\mathcal{A}_D^{ell}\subset\mathcal{A}_D^{reg}$, qui est non vide dès que le degré de D est suffisamment grand. Lorsque $a\in\mathcal{A}_D^{ell}(k)$ et le centre de $G_{|F}$ est F-anisotrope, le groupoïde $\mathcal{M}_a(k)$ est donc essentiellement fini et son cardinal est donné par

$$|\mathcal{M}_a(k)| = \sum_{\{\gamma\mapsto a\}_{/\mathrm{ad}}}\int_{G(\mathbb{A}_F)/G_\gamma(F)} 1_D(\mathrm{ad}(x)\gamma)dx,$$

où $\{\gamma\mapsto a\}$ désigne la classe de conjugaison *stable* (régulière elliptique) associée à a. Nous allons voir comment l'action de $\mathcal{P}_a$ permet de pré-stabiliser comme en 1.4 l'expression ci-dessus.

Nous verrons plus loin que lorsque a est elliptique et le centre de G_η est anisotrope, le champ $\mathcal{P}_a$ est de type fini, de sorte que son cardinal $|\mathcal{P}_a(k)|$ est fini. À partir de la définition des (2)-catégories quotients, on vérifie alors la formule agréable

$$|\mathcal{M}_a(k)| = |\mathcal{P}_a(k)||\mathcal{M}_a(k)/\mathcal{P}_a(k)|.$$

Par analogie avec la discussion de 1.4, celle-ci invite donc à étudier le foncteur canonique $\mathcal{M}_a(k)/\mathcal{P}_a(k)\xrightarrow{can}[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}_a](k)$. Celui-ci est pleinement fidèle, puisque $S\mapsto\mathcal{M}_a(S)/\mathcal{P}_a(S)$ est déja un préchamp. Il suffit donc de déterminer son image essentielle. Introduisons l'ensemble $H^1(k,\mathcal{P}_a)$ des classes d'équivalences de $\mathcal{P}_a$-torseurs sur k. Le morphisme de 2-champs $[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}_a]\longrightarrow[k/\mathcal{P}_a]$ associe à tout objet $m\in[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}_a](k)$ un invariant $\mathrm{inv}(m)\in H^1(k,\mathcal{P}_a)$ et l'objet m est dans l'image essentielle de *can* si et seulement si cet invariant est "nul". Encore une fois, nous verrons ci-dessous que lorsque a est elliptique et le centre de $G_{|F}$ est anisotrope, $H^1(k,\mathcal{P}_a)$ est un groupe abélien *fini*. Sous ces hypothèses et suivant la même idée présentée en 1.4, on peut donc effectuer une transformation de Fourier

$$(6)\qquad |\mathcal{M}_a(k)| = \frac{|\mathcal{P}_a(k)|}{|H^1(k,\mathcal{P}_a)|}\sum_{\kappa\in H^1(k,P_a)^*}\sum_{m\in[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}_a](k)_{/\sim}}\frac{\langle\mathrm{inv}(m),\kappa\rangle}{|Aut(m)(k)|}$$

où la notation $_{/\sim}$ désigne l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets. La ressemblance avec la formule (4) n'est pas seulement formelle. Pour s'en convaincre, nous allons calculer $H^1(k,\mathcal{P}_a)$, décomposer en produit de facteurs locaux et vérifier que pour $\kappa=1$ on obtient bien l'intégrale orbitale *stable*.

Commençons par le groupe $H^1(k,\mathcal{P}_a)$. Rappelons que si H est un groupe algébrique lisse sur k, alors l'application canonique $H^1(k,H)\longrightarrow H^1(k,\pi_0(H))$ est un isomorphisme, car k est de dimension cohomologique $\leqslant 1$. De même le champ de Picard $\mathcal{P}_a$ a une composante neutre $\mathcal{P}_a^0$ et un faisceau quotient "des composantes connexes" $\pi_0(\mathcal{P}_a):=\mathcal{P}_a/\mathcal{P}_a^0$. Ngô montre alors l'isomorphisme $H^1(k,\mathcal{P}_a)\xrightarrow{\sim}H^1(k,\pi_0(\mathcal{P}_a)) = \pi_0(\mathcal{P}_a)(\overline{k})_\sigma$ où σ désigne le Frobenius et la notation en indice les coinvariants. En particulier, pour a elliptique, on en déduit que $\frac{|\mathcal{P}_a(k)|}{|H^1(k,\mathcal{P}_a)|}=|\mathcal{P}_a^0(k)|$. Il reste donc à décrire $\pi_0(\mathcal{P}_a)$.

Notons $J_a := a^*J$ le schéma en groupes sur X déduit de $a : X \longrightarrow \mathfrak{t}/W$; sa fibre générique $J_{a,\eta}$ est F-isomorphe au centralisateur d'un élément quelconque de la classe stable dans $\mathfrak{g}(F)$ associée à a. Pour un groupe algébrique H défini sur un corps K dont on a fixé une clôture algébrique $\overline{K}$, convenons de noter par $X_*(H)$ le groupe des $\overline{K}$-cocaractères de H, qui est donc muni d'une action de $Gal(\overline{K}/K)$. Notons $\overline{\Gamma} := Gal(\overline{F}|F \otimes_k \overline{k}) \subset \Gamma = Gal(\overline{F}/F)$.

Proposition 2.3 ([33], sec. 6). — *Il existe un morphisme surjectif*

$$\xi_a : X_*(J_{a,\eta})_{\overline{\Gamma}} \longrightarrow \pi_0(\mathcal{P}_a)(\overline{k})$$

qui induit donc un morphisme surjectif $X_*(J_{a,\eta})_\Gamma \longrightarrow H^1(k, \mathcal{P}_a)$. Ces morphismes sont des isomorphismes si le X-schéma J_a est à fibres géométriques connexes, ce qui est par exemple vérifié lorsque $\mathbf{G}_0$ est semi-simple de type adjoint, ou lorsque $\mathbf{G}_0 = GL(n)$.

Démonstration. — Puisque J_a est lisse sur X, il admet une composante neutre J_a^0. Considérons le k-champ ${}^0\mathcal{P}_a$ poussé en avant par π_X du classifiant des J_a^0-torseurs. Ngô montre qu'on a une suite exacte de groupes abéliens

$$H^0(X \times_k \overline{k}, \pi_0(J_a)) \longrightarrow \pi_0({}^0\mathcal{P}_a)(\overline{k}) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{P}_a)(\overline{k}) \longrightarrow 0.$$

Considérons ensuite le modèle de Néron *connexe* J'_a qui prolonge $J_{a,\eta}$ sur X et $\mathcal{P}'_a$ le k-champ obtenu en poussant en avant son classifiant par π_X. On montre que le morphisme canonique $J_a^0 \longrightarrow J'_a$ induit un isomorphisme $\pi_0({}^0\mathcal{P}_a)(\overline{k}) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathcal{P}'_a)(\overline{k})$. Il fait ensuite appel à un résultat de Kottwitz pour prouver l'existence d'un isomorphisme "canonique" $X_*(J_{a,\eta})_{\overline{\Gamma}} \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathcal{P}'_a)(\overline{k})$.

□

On en déduit comme annoncé plus haut que $\pi_0(\mathcal{P}_a)$ et $H^1(k, \mathcal{P}_a)$ sont des groupes abéliens finis si et seulement si $a \in \mathcal{A}_D^{ell}(k)$ et le centre de G_η est F-anisotrope.

Pour décomposer la formule (6) en produit de facteurs locaux, introduisons les analogues locaux $\mathcal{M}_{a,v}$ et $\mathcal{P}_{a,v}$ pour $v \in |X|$, définis de la même manière que $\mathcal{M}_a$ et $\mathcal{P}_a$ mais en remplaçant X par son complété formel X_v en v. On a alors le spectaculaire

Théorème 2.4 ([33], Th 4.5). — *Pour $a \in \mathcal{A}_D^{reg}(k)$, le morphisme de k-champs "de restriction"*

$$[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}_a] \longrightarrow \prod_v [\mathcal{M}_{a,v}/\mathcal{P}_{a,v}]$$

est un isomorphisme. Plus précisément, pour tout $\overline{k}$-schéma S, le foncteur de "restriction" $\mathcal{M}_a(S)/\mathcal{P}_a(S) \longrightarrow \prod_v \mathcal{M}_{a,v}(S)/\mathcal{P}_{a,v}(S)$ est une équivalence de catégories. Dans les deux cas, les facteurs associés aux $v \in |X|$ dont l'image par $a : X \longrightarrow \mathfrak{t}/W$ est dans $\mathfrak{t}_v^{reg}/W_v$ (presque tous puisque $a \in \mathcal{A}_D^{reg}(k)$), sont triviaux.

Démonstration. — (idée) Expliquons d'abord la dernière assertion. Une section de Kostant $\mathfrak{t}/W \xrightarrow{\xi} \mathfrak{g}^{reg}$ induit un $\mathfrak{t}/W$-isomorphisme $(G \times (\mathfrak{t}/W))/J \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^{reg}$, d'où un isomorphisme $[(\mathfrak{t}/W)/J] = B(J/(\mathfrak{t}/W)) \xrightarrow{\sim} [\mathfrak{g}^{reg}/G]$. Ce dernier est $B(J/(\mathfrak{t}/W))$-équivariant et montre donc que l'action du champ de Picard $B(J/(\mathfrak{t}/W))$ sur $[\mathfrak{g}^{reg}/G]$

au-dessus de $\mathfrak{t}/W$ est “simplement transitive”. Ainsi lorsque $a(v)$ est dans $\mathfrak{t}^{reg}/W$, le champ $\mathcal{M}_{a,v}$ est un sous-champ de $\pi_{X*}([\mathfrak{g}^{reg}/G])$ et par conséquent $\mathcal{P}_{a,v}$ agit “simplement transitivement” sur $\mathcal{M}_{a,v}$ de sorte que $[\mathcal{M}_{a,v}/\mathcal{P}_{a,v}]$ est *trivial* (ce genre d'arguments se trouve aussi dans [10]).

Passons à l'étude de $\mathcal{M}_a(S)/\mathcal{P}_a(S) \longrightarrow \prod_v \mathcal{M}_{a,v}(S)/\mathcal{P}_{a,v}(S)$. La catégorie de gauche a pour objets les paires de Hitchin (E,ϕ) sur $X \times_k S$ de caractéristique a et pour morphismes $(E,\phi) \longrightarrow (E',\phi')$ les classes d'équivalences de couples $(\mathcal{J},\alpha)$ où $\mathcal{J}$ est un J_a-torseur et $\alpha : \mathcal{J}(E,\phi) \xrightarrow{\sim} (E',\phi')$. Idem pour les termes du produit en remplaçant X par X_v. Dans la preuve de Ngô, il faut d'abord *choisir un point-base* dans $\mathcal{M}_a(S)$, par exemple l'image de a par une section de Kostant. On introduit ensuite une variante $\mathcal{M}^\bullet_{a,v}$ de $\mathcal{M}_{a,v}$ où l'on rajoute une rigidification par ce point-base au point générique de X_v. Comme on tue ainsi les automorphismes, on obtient un faisceau, qui n'est autre que celui qui définit la fibre de Springer affine associée au point-base. De même on définit une version rigidifiée $\mathcal{P}^\bullet_{a,v}$ de $\mathcal{P}_{a,v}$. On a alors un foncteur d'oubli des rigidifications $\mathcal{M}^\bullet_{a,v}(S)/\mathcal{P}^\bullet_{a,v}(S) \longrightarrow \mathcal{M}_{a,v}(S)/\mathcal{P}_{a,v}(S)$ qui est une équivalence de catégories. Par recollement formel au point-base choisi, on a un foncteur dans l'autre sens $\prod_v \mathcal{M}^\bullet_{a,v}(S)/\mathcal{P}^\bullet_{a,v}(S) \longrightarrow \mathcal{M}_a(S)/\mathcal{P}_a(S)$, qui est pleinement fidèle. Lorsque S est un $\overline{k}$-schéma, on montre qu'il est aussi essentiellement surjectif. □

Ce théorème permet de réécrire la formule (6) sous la forme

$$|\mathcal{M}_a(k)| = |\mathcal{P}^0_a(k)| \sum_{\kappa\in\left(\pi_0(\mathcal{P}_a)(\overline{k})^*\right)^\sigma} \prod_{v\in|X|} \left(\sum_{m_v\in[\mathcal{M}_{a,v}/\mathcal{P}_{a,v}](k)_{/\sim}} \frac{\langle \mathrm{inv}(m_v),\kappa\rangle}{|Aut(m_v)(k)|}\right),$$

où la définition de l'accouplement local $\langle \mathrm{inv}(m_v),\kappa\rangle$ dépend du choix d'une “section” $[\mathcal{M}_{a,v}/\mathcal{P}_{a,v}] \longrightarrow [\mathcal{M}_a/\mathcal{P}_a]$ qui est obtenue comme dans la preuve ci-dessus en introduisant des rigidifications génériques par un point-base dans $\mathcal{M}_a(k)$. Pour faire un tel choix de manière “uniforme en a”, on utilise une section de Kostant. Un comptage comme dans [11] montre alors que les termes locaux sont les κ-intégrales orbitales des fonctions $1_{\varpi_v^{-d_v}\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)}$ sur l'orbite associée à a :

$$\sum_{m_v\in[\mathcal{M}_{a,v}/\mathcal{P}_{a,v}](k)_{/\sim}} \frac{\langle \mathrm{inv}(m_v),\kappa\rangle}{|Aut(m_v)(k)|} = O^\kappa_a(1_{\varpi_v^{-d_v}\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)}).$$

L'action de $\mathcal{P}_a$ a donc à la fois permis de pré-stabiliser et de rendre “locale” l'expression de $|\mathcal{M}_a(k)|$. Ce qu'on a gagné par rapport à la situation de 1.4, c'est la possiblité d'utiliser des outils cohomologiques, comme par exemple :

PROPOSITION 2.5. — *Soit* $\mathcal{M}_{\overline{a}} := \overline{k} \otimes_k \mathcal{M}_a$.

1. *L'action de* $\mathcal{P}_a$ *sur* $\mathcal{M}_a$ *induit une action de* $\pi_0(\mathcal{P}_a)(\overline{k})$ *sur les groupes de cohomologies* $H^n(\mathcal{M}_{\overline{a}},\mathbb{Q}_l)$.

2. *Pour tout caractère $\kappa : \pi_0(\mathcal{P}_a)(\overline{k}) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^*$, notons $H^n(\mathcal{M}_{\overline{a}}, \overline{\mathbb{Q}}_l)_\kappa$ la partie κ-équivariante de la cohomologie. Si $\kappa = \sigma(\kappa)$, on a*

$$\sum_n (-1)^n \, Tr\big(\sigma, H^n(\mathcal{M}_{\overline{a}}, \overline{\mathbb{Q}}_l)_\kappa\big) = |\mathcal{P}_a^0(k)| \sum_{m \in [\mathcal{M}_a/\mathcal{P}_a](k)_{/\sim}} \frac{\langle inv(m), \kappa \rangle}{|Aut(m)(k)|}$$

et si $\kappa \neq \sigma(\kappa)$, alors la somme de gauche est nulle.

Démonstration. — Le i) est un "lemme d'homotopie" [30, 3.2.3] qui montre que la partie connexe de $\mathcal{P}_a$ agit trivialement sur la cohomologie. Le ii) est une variation sur la formule de points fixes de Grothendieck-Lefschetz [30, App. C] (notons que $\mathcal{M}_a$ est un k-champ de Deligne-Mumford, comme on le verra ci-dessous). □

Néanmoins, en ayant fixé a comme on l'a fait, on se retrouve au même point que dans les approches locales de Goresky, Kottwitz, MacPherson [11] et Laumon [28] : leurs stratégies pour étudier la cohomologie et la comparer aux analogues endoscopiques requièrent une propriété de *pureté* qui pour l'instant est hors de portée. Pour contourner le problème, l'idée introduite par Ngô consiste à faire une étude locale au voisinage de a dans $\mathcal{A}_D^{ell}$.

2.6. Étude locale et endoscopie

Un certain nombre de résultats de cette section ne sont prouvés ou annoncés que dans les familles de cas suivants : $\mathbf{G}_0$ de type adjoint (comprend les groupes unitaires et les groupes orthogonaux impairs), groupes symplectiques constants, groupes orthogonaux pairs constants. Ils sont espérés en toute généralité, mais les preuves actuelles sont au cas par cas. Nous signalerons ces résultats par la mention "cas par cas", sans répéter la liste de ces cas, et nous bornerons à évoquer éventuellement les preuves dans le cas $\mathbf{G}_0$ adjoint qui est plus simple. On supposera toujours le centre de G_η anisotrope.

2.6.1. Étude locale. — Elle est permise par la proposition suivante :

Proposition 2.6. — 1. *$\mathcal{M}_D^{reg}$ est lisse sur k (*[30, 2.5.2] *et* [33]*).*

2. *$\mathcal{M}_D^{ell} \xrightarrow{f^{ell}} \mathcal{A}_D^{ell}$ est propre de type fini (cas par cas,* [30, 2.8.1], [33] *et* [32]*).*
3. *$\mathcal{M}_D^{ell}$ est un k-champ de Deligne-Mumford (cas par cas* [30, 2.8.1]*,* [33] *et* [32]*).*

La preuve de la lissité utilise des travaux de Biswas et Ramanan [6], et les deux autres points apparaissent aussi chez Faltings, [10].

Considérons maintenant $f_*^{ell}\mathbb{Q}_l := Rf_*^{ell}\mathbb{Q}_l$. Par le troisième point, c'est un objet de $D_c^b(\mathcal{A}_D^{ell}, \mathbb{Q}_l)$. D'après les deux premiers points, c'est un complexe *pur* de poids 0 au sens de Deligne. En particulier, ses faisceaux de cohomologie *perverse* ${}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^n(f_*^{ell}\mathbb{Q}_l)$, $n \in \mathbb{N}$ sont *purs* de poids n.

Soit maintenant R, resp $\overline{R}$, l'hensélisé, resp. l'hensélisé strict, de $\mathcal{A}_D^{ell}$ en a, et notons $\mathcal{M}_R$, $\mathcal{P}_R$, etc... les restrictions à R de $\mathcal{M}_D$, $\mathcal{P}_D$, etc. Par le même lemme d'homotopie que pour le (1) de la proposition 2.5, on a une action de $\pi_0(\mathcal{P}_R)(\overline{R}) = \pi_0(\mathcal{P}_a)(\overline{k})$ sur les faisceaux pervers ${}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^n(f_{R,*}\mathbb{Q}_l)_{|\overline{R}}$ et on peut donc définir leur partie κ-isotypique.

Lorsque $\kappa = \sigma(\kappa)$, ceci définit un facteur direct ${}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^n(f_{R,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa$ de ${}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^n(f_{R,*}\mathbb{Q}_l)$. La considération de ces faisceaux pervers est toute aussi bonne pour le but final, en vertu du

LEMME 2.7. — [30, 3.10.1] *Soit $\kappa : \pi_0(\mathcal{P}_a)(\overline{k}) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ fixe par σ. On a l'égalité*

$$\sum_n (-1)^n \, Tr\big(\sigma, H^n(\mathcal{M}_{\overline{a}}, \overline{\mathbb{Q}}_l)_\kappa\big) = \sum_{n,m} (-1)^{n+m} \, Tr(\sigma, H^n(({}^p\mathcal{H}^m(f_{R,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa)_{\overline{a}}))\,.$$

Un des points clef pour le lien avec les groupes endoscopiques est l'estimation (élémentaire) du support de ${}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^n(f_{R,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa$.

LEMME 2.8 ([33], cor 8.2). — *Soit $\kappa : \pi_0(\mathcal{P}_a)(\overline{k}) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ fixe par σ. Le support de ${}^p\mathcal{H}^n(f_{R,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa$ est le fermé de R formé des points $b \in R$ tels que κ se factorise par le morphisme de restriction*

$$\pi_0(\mathcal{P}_a)(\overline{k})_\sigma = \pi_0(\mathcal{P}_R)(\overline{R})_\sigma \longrightarrow \pi_0(\mathcal{P}_b)(\overline{k}(b))_\sigma$$

où $k(b)$ est le corps résiduel en b et $\overline{k}(b) = \overline{k} \otimes k(b)$.

2.6.2. Groupes endoscopiques. — Reprenons les notations de 1.5 et adoptons la définition simplifiée de donnée endoscopique qu'on y trouve. Disons qu'une telle donnée (s,ρ) est *géométrique* si ρ se factorise par $\Gamma = Gal(\overline{\eta}/\eta) \longrightarrow \pi_1(\overline{\eta}, X)$. Le groupe endoscopique $\mathbf{G}_{s,\rho}$ se prolonge alors en un groupe $G_{s,\rho}$ sur X du type décrit en 2.3.2. On peut donc le munir d'une paire $(T_{s,\rho}, B_{s,\rho})$, définir sa fibration de Hitchin, etc... Par construction du groupe endoscopique, on a un morphisme $\mathfrak{t}_{s,\rho}/W_{s,\rho} \longrightarrow \mathfrak{t}/W$, qui est simplement la version géométrique pour les algèbres de Lie du procédé de transfert des classes de conjugaison stables de $\mathbf{G}_{s,\rho}$ vers $\mathbf{G}$. Ce morphisme induit un morphisme $\mathcal{A}_{D,(s,\rho)} \xrightarrow{\iota_{s\rho}} \mathcal{A}_D$. Par commodité nous omettrons l'indice D dans la suite.

PROPOSITION 2.9 ([33], prop. 10.1). — *Soit $\mathcal{A}^{G-reg}_{s,\rho}$ l'image réciproque de $\mathcal{A}^{reg}$. Le morphisme*

$$\iota_{s,\rho} : \ \mathcal{A}^{G-reg}_{s,\rho} \longrightarrow \mathcal{A}^{reg}$$

est fini et non ramifié. Les images de ces morphismes sont deux à deux disjointes, lorsque (s,ρ) parcourt les classes d'isomorphisme de données endoscopiques géométriques.

Fixons maintenant un caractère $\kappa : \ \pi_0(\mathcal{P}_a)(\overline{k}) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ invariant par σ, qui induit donc grâce à la proposition 2.3 un caractère κ de $X_*(J_{a,\eta})_\Gamma$. Nous avons expliqué dans la section 1.5 comment la paire (a,κ) détermine (à isomorphisme près) une donnée endoscopique (s_κ, ρ_a). Il n'est pas du tout évident qu'une telle donnée soit "géométrique" (ce serait en général faux si κ ne se factorisait pas par $\pi_0(\mathcal{P}_a)(\overline{k})$).

PROPOSITION 2.10. — *La donnée endoscopique (s_κ, ρ_a) est géométrique. (Cas par cas,* cf. [33, 10.2]*).*

Démonstration. — Supposons $\mathbf{G}$ adjoint. Par descente, il suffit de voir que si G est constant sur X (donc égal à $\mathbf{G}_0 \times_k X$), alors les groupes endoscopiques qui apparaissent sont déployés. Avec la définition 1.2, le groupe $(W_G \rtimes \Gamma)_{s,\Delta}$ est égal à $(W_G)_{s,\Delta} \times \Gamma$ puisque $\mathbf{G}$ est déployé et $(W_G)_{s,\Delta} = \{1\}$ car $\mathbf{G}$ est adjoint (les centralisateurs sont connexes dans le groupe dual qui est simplement connexe). La seule section ρ permise est donc la section triviale, et le groupe associé $\mathbf{G}_{s,\rho}$ est bien déployé. □

Abrégeons $(s,\rho) := (s_\kappa, \rho_a)$, fixons $a' \in \mathcal{A}_{s,\rho}^{G-reg}(k)$ d'image a dans $\mathcal{A}^{ell}(k)$ et notons S l'hensélisé de $\mathcal{A}_{s,\rho}^{G-reg}$ en a'. Par la proposition 2.9, le morphisme $\iota_{s,\rho} : S \longrightarrow R$ est une immersion fermée.

PROPOSITION 2.11. — *Le support des faisceaux pervers ${}^p\mathcal{H}^n(f_{R,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa$ sur R est inclus dans l'image $\iota_{s,\rho}(S)$. (Cas par cas,* cf. [30, 3.2.1] *et* [33, 10.2]*).*

Démonstration. — On suppose $\mathbf{G}$ adjoint, de sorte qu'on a l'isomorphisme de la proposition 2.3 $X_*(J_{a,\eta})_\Gamma \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathcal{P}_a)(\overline{k})_\sigma$. Plus généralement, pour un point b pas nécessairement fermé de R, on a encore un isomorphisme $X_*(J_{b,\eta})_{\Gamma_b} \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathcal{P}_b)(\overline{k}(b))_\sigma$ qui est indépendant du choix de la clôture algébrique de $F \otimes k(b)$ telle que $\Gamma_b := Gal(\overline{F \otimes_k k(b)}/F \otimes_k k(b))$. De plus le morphisme de restriction $\pi_0(\mathcal{P}_a)(\overline{k})_\sigma \longrightarrow \pi_0(\mathcal{P}_b)(\overline{k}(b))_\sigma$ correspond via ces isomorphismes au morphisme canonique $X_*(J_{a,\eta})_\Gamma \longrightarrow X_*(J_{b,\eta})_{\Gamma_b}$. Ainsi d'après le lemme 2.8, si b est dans le support de ${}^p\mathcal{H}^n(f_{R,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa$, alors κ, vu comme caractère de $X_*(J_{b,\eta})$, doit être fixe par Γ_b.

Traduisons en langage endoscopique : si $X_*(J_{b,\eta}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{X}_*$ est un isomorphisme dans la W_G-classe canonique qui envoie κ sur s, alors le cocycle $\Gamma_b \longrightarrow W_G \rtimes \Gamma_b$ qui décrit l'action de Γ_b transportée sur $\mathbb{X}_*$ a son image dans $W_{s,\rho} \rtimes \Gamma_b$.

Ceci équivaut à dire que le $F \otimes k(b)$-point $b_{|\eta \times k(b)}$ de $\mathfrak{t}/W$ se relève à $\mathfrak{t}_{s,\rho}/W_{s,\rho}$. Par adhérence schématique, on en déduit que la $k(b)$-section $b : X \times k(b) \longrightarrow \mathfrak{t}/W$ se relève en une section $b' : X \times k(b) \longrightarrow \mathfrak{t}_{s,\rho}/W_{s,\rho}$. □

Voici une conséquence importante : le faisceau pervers $i_{s,\rho}^*({}^p\mathcal{H}^n(f_{R,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa)$ est pur de poids n. La conjecture suivante est un analogue géométrique de la conjecture de transfert pour les fonctions-test 1_D :

CONJECTURE 2.12 (Laumon, Ngô). — *(Pour les groupes classiques) Il existe un système local $\mathcal{L}$ sur S en $\mathbb{Z}$-modules libres de rang* 1 *et quadratique, un entier r et un isomorphisme de faisceaux pervers gradués*

$$ {}^p\mathcal{H}^\bullet(f_{S,*}^{s,\rho}\mathbb{Q}_l)_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{L} \otimes {}^p\mathcal{H}^\bullet(f_{R,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa[-2r](-r). $$

Ici ${}^p\mathcal{H}^\bullet$ désigne la somme des ${}^p\mathcal{H}^n$ et est gradué par le degré n ; le crochet désigne un décalage dans la graduation. Le lien avec la conjecture de transfert est le suivant : en prenant la trace alternée de Frobenius en la fibre géométrique fermée de chaque côté, on obtient la formule

$$ |\mathcal{P}_{s,\rho,a'}^0(k)| SO_{a'}(1_D) = |\mathcal{P}_a^0(k)| \varepsilon_{\mathcal{L}} q^r O_a^\kappa(1_D) $$

où $\varepsilon_{\mathcal{L}}$ est un signe. Comme la conjecture de transfert, elle comporte une part de mystère dans ce décalage et cette torsion. Le seul cas résolu est celui des groupes unitaires, par Laumon et Ngô.

3. GROUPES UNITAIRES

Dans cette partie, nous précisons l'énoncé de la conjecture 2.12 pour les groupes unitaires, et en esquissons la preuve. On expliquera ensuite comment s'en déduit le lemme fondamental. Auparavant, il nous faut expliciter les notions introduites précédemment.

3.1. Énoncé du théorème

3.1.1. Lien avec les deux sections précédentes. — Nous fixerons une fois pour toutes le diviseur D de degré suffisamment grand, et l'omettrons des notations. Soient $a \in \mathcal{A}^{reg}(k)$ et $\overline{a}$ le point géométrique associé. On a alors la courbe spectrale $Y_a \subset \Sigma^0$, voir 2.3.5, qui est un revêtement de degré n de X et son changement de base Y'_a au-dessus de X'. On vérifie que a est géométriquement elliptique si et seulement si l'application $\mathit{Irr}(Y'_{\overline{a}}) \longrightarrow \mathit{Irr}(Y_{\overline{a}})$ induite sur les ensembles de composantes irréductibles géométriques est *bijective*. Ensuite, soit par application de la proposition 2.3, soit par un raisonnement plus géométrique [30, 2.8.2], on vérifie que $\pi_0(\mathcal{P}_a)(\overline{k}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathit{Irr}(Y_{\overline{a}})}$. Un caractère κ fixe sous σ est donc de la forme $(d_i)_{i\in \mathit{Irr}(Y_a)} \mapsto (-1)^{\sum_{i\in I} d_i}$ pour un sous-ensemble I de $\mathit{Irr}(Y_a)$. Si n_1 désigne la somme des degrés des composantes $Y_{a,i}$, $i \in I$, alors le groupe endoscopique H associé à κ est $U(n_1) \times U(n - n_1 =: n_2)$ et le morphisme $\mathcal{A}_H \longrightarrow \mathcal{A}$ s'identifie au morphisme

$$\begin{array}{rcl}\bigoplus_{i=1}^{n_1} H^0(X, \mathcal{L}_D^{\otimes i}) \times \bigoplus_{i=1}^{n_2} H^0(X, \mathcal{L}_D^{\otimes i}) & \to & \bigoplus_{i=1}^{n} H^0(X, \mathcal{L}_D^{\otimes i}) \\ (a_1, a_2) & \mapsto & a\end{array}$$

où les composantes de a sont données par l'égalité de polynômes

$$(T^{n_1} + a_{1,1}T^{n_1-1} + \cdots + a_{1,n_1})(T^{n_2} + a_{2,1}T^{n_2-1} + \cdots + a_{2,n_2}) = (T^n + a_1T^{n-1} + \cdots + a_n).$$

3.1.2. Contexte et notations. — *Nous nous restreindrons dorénavant au cas où* $|\,\mathit{Irr}(Y_{\overline{a}})\,| = |\,\mathit{Irr}(Y_a)\,| = 2$, *et* κ *est un des deux caractères* $\kappa_i : (d_1, d_2) \mapsto (-1)^{d_i}$ *pour* $i = 1, 2$. Tout ce qui suit peut se généraliser sans difficultés au cas général, et l'était d'ailleurs dans une première version de [30].

Ainsi Y_a est réunion de deux composantes géométriquement irréductibles Y_{a_1} et Y_{a_2} de degrés respectifs n_1 et n_2 avec $n_1 + n_2 = n$. Le groupe endoscopique est donc $H := U(n_1) \times U(n_2)$. Pour retrouver les notations de [30], nous noterons $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{A}$, resp. $g : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{A}_H$, la fibration de Hitchin du groupe $G = U(n)$, resp de son groupe endoscopique $H = U(n_1) \times U(n_2)$, ainsi que $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{A}$, resp. $\mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{A}_H$, les champs de Picards respectifs. En fait, comme dans la dernière section de la partie 2, nous fixerons (a_1, a_2) dans la préimage de a, noterons S, resp. R, l'hensélisé de $\mathcal{A}_H$ en (a_1, a_2), resp. de $\mathcal{A}$ en a. On sait que le morphisme $S \longrightarrow R$ est une immersion fermée. Les changements de base à S seront notés par un indice. On a donc les S-champs $f_S : \mathcal{M}_S \longrightarrow S$, $g_S : \mathcal{N}_S \longrightarrow S$, $\mathcal{P}_S$, $\mathcal{Q}_S$ et les courbes spectrales relatives $Y_S = Y_{1,S} \cup Y_{2,S}$ tracées sur la même surface réglée $\Sigma_S^0 := \mathbb{V}(\mathcal{L}_D) \times_k S$ au-dessus de $X_S := X \times_k S$.

Nous allons préciser l'énoncé de la conjecture 2.12 pour les groupes unitaires.

3.1.3. L'entier r et le système local. — Soit Z_S l'intersection de $Y_{1,S}$ et $Y_{2,S}$ dans Y_S. C'est un sous-schéma fermé de Y_S qui est fini et plat sur S, de degré

$$r = 2n_1n_2\deg(D).$$

On a aussi le revêtement étale quadratique Z'_S au-dessus de Z_S, déduit de $X' \longrightarrow X$. Ce revêtement définit un système local $L_{Z'/Z}$ en $\mathbb{Z}$-modules libres de rang 1 et de carré trivial sur Z_S comme le conoyau de la flèche d'adjonction $\mathbb{Z}_{Z_S} \longrightarrow pr_{Z'_S \to Z_S,*}(\mathbb{Z}_{Z'_S})$. Comme Z_S est hensélien, $L_{Z'/Z}$ est géométriquement constant (*i.e.* constant sur $\overline{k} \times_k Z$).

Soit $S_\natural$ l'ouvert de S dont les points géométriques b sont ceux où les courbes $Y_{1,b}$ et $Y_{2,b}$ se coupent *transversalement* dans Σ_S^0 et où, en tout point de l'intersection Z_b, les revêtements $Y_{i,b} \longrightarrow X_b$ sont *étales*. Cet ouvert est non vide d'après [30, 2.9.1]. En particulier, l'intersection $Z_{S_\natural}$ est *étale* au-dessus de $S_\natural$. On définit alors

$$L_{Z'_\natural/Z_\natural/S_\natural} := \left(\bigwedge^r pr_{Z_{S_\natural} \to S_\natural,*} L_{Z'_\natural/Z_\natural}\right) \otimes \left(\bigwedge^r pr_{Z_{S_\natural} \to S_\natural,*} \mathbb{Z}_{Z_\natural}\right)^{\otimes -1}.$$

C'est un système local en $\mathbb{Z}$-modules libres de rang 1 de carré trivial qui est géométriquement constant sur $S_\natural$ et qui donc se prolonge en un objet similaire $L_{Z'/Z/S}$ sur S tout entier. Un tel objet est entièrement déterminé par la valeur propre de Frobenius, qui est simplement un signe.

Pour comprendre pourquoi une telle chose apparaît dans le théorème ci-dessous, il faudra rentrer un peu dans la preuve.

THÉORÈME 3.1 ([30], th 3.9.3). — *Pour chacun des deux caractères κ considérés en 3.1.2, il existe un isomorphisme de faisceaux pervers gradués :*

$$^p\mathcal{H}^\bullet(f_{S,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa \xrightarrow{\sim} L_{Z'/Z/S} \otimes_{\mathbb{Z}_S} {}^p\mathcal{H}^\bullet(g_{S,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa[-2r](-r).$$

3.2. Éléments de la preuve

Après avoir souligné quelques spécificités du cas unitaire, nous introduirons "le" tore, son action, et la cohomologie équivariante. Ces outils fondamentaux ont été introduits par Goreski, Kottwitz et MacPherson [11] dans leur approche du lemme fondamental via les fibres de Springer. Ici, on a besoin de variantes "relatives" au-dessus de S. Viendra ensuite la "glissade" qui est un analogue de l'argument de déformation que Laumon avait introduit dans [28]. Cet argument ramènera le problème de S à $S_\natural$. Pour résoudre le problème au-dessus de $S_\natural$, on verra apparaître des idées réminiscentes de [31].

3.2.1. Spécificités du cas unitaire. — Rappelons en termes imprécis le contenu de la proposition 2.2 :

– Le champ $\mathcal{P}_S$ classifie les Y'_S-modules inversibles “unitaires” et agit par produit tensoriel sur le champ $\mathcal{M}_S$ qui classifie les Y'_S-modules sans torsion de rang 1 “unitaires”.
– Le champ $\mathcal{Q}_S$ classifie les $(Y'_{1,S} \sqcup Y'_{2,S})$-modules inversibles “unitaires” et agit par produit tensoriel sur le champ $\mathcal{N}_S$ qui classifie les $(Y'_{1,S} \sqcup Y'_{2,S})$-modules sans torsion “unitaires” de rang 1.

Notons alors $\nu : \ Y_{1,S} \sqcup Y_{2,S} \longrightarrow Y_S$ le morphisme de la courbe spectrale endoscopique vers la courbe spectrale. On a donc un morphisme $\mathcal{N}_S \xrightarrow{\nu_*} \mathcal{M}_S$ qui envoie $((\mathcal{F}_1, \iota_1), (\mathcal{F}_2, \iota_2))$ sur $(\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2, \iota_1 \oplus \iota_2)$ et un morphisme “dans l'autre sens” $\mathcal{P}_S \xrightarrow{\nu^*} \mathcal{Q}_S$ qui consiste simplement à tirer en arrière le Y_S-module inversible unitaire $(\mathcal{F}, \iota)$. De plus, le morphisme ν_* est ν^*-équivariant au sens où il existe un isomorphisme canonique

$$\nu_*(\nu^*(\mathcal{F}, \iota_{\mathcal{F}}) \otimes (\mathcal{G}, \iota_{\mathcal{G}})) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F}, \iota_{\mathcal{F}}) \otimes \nu_*(\mathcal{G}, \iota_{\mathcal{G}})).$$

Le morphisme ν_* peut aussi s'expliciter en termes de triplets de Hitchin $(\mathcal{E}, \Phi, \theta)$. Il consiste simplement à envoyer le couple de fibrés unitaires $(\mathcal{E}_i, \Phi_i)$ de rangs respectifs n_1 et n_2 sur leur somme directe et le couple de morphismes θ_i sur leur somme directe. Cette possibilité de plonger l'espace de Hitchin endoscopique dans l'espace de Hitchin, qui vient du fait qu'on peut plonger le groupe endoscopique dans le groupe, est très particulière aux groupes unitaires.

On vérifie aisément que le morphisme ν_* est une immersion fermée. Un des points-clé est qu'on peut aussi caractériser son image de manière agréable.

3.2.2. Le tore. — Nous voulons construire un tore T_S dans le noyau du morphisme $\mathcal{P}_S \longrightarrow \mathcal{Q}_S$. Posons $K_S := pr_{Z'_S \to S,*}(\mathbb{G}_{m Z'_S})^{\tau=^{-1}}$. La suite exacte $0 \longrightarrow \mathbb{G}_{m Y'_S} \longrightarrow \mathbb{G}_{m Y'_{1,S}} \times \mathbb{G}_{m Y'_{2,S}} \longrightarrow \mathbb{G}_{m Z'_S} \longrightarrow 0$ fournit une flèche de bord $K_S \longrightarrow \mathcal{P}_S$ dont la composée avec $\mathcal{P}_S \longrightarrow \mathcal{Q}_S$ est nulle : une section de K_S fournit une donnée de recollement des modules inversibles triviaux sur $Y_{1,S}$ et $Y_{2,S}$ avec structures unitaires triviales. Comme S est hensélien on peut prolonger le sous-tore maximal de la fibre fermée et nous noterons $T_S \hookrightarrow K_S$ ce tore.

Proposition 3.2 ([30], prop. 3.3.1). — *L'image de l'immersion fermée $\nu_* : \mathcal{N}_S \longrightarrow \mathcal{M}_S$ est le lieu des points fixes de T_S agissant sur $\mathcal{M}_S$ via le morphisme $T_S \longrightarrow \mathcal{P}_S$.*

Démonstration. — Le terme “lieu des points fixes” dans notre contexte catégorique désigne “la sous-catégorie pleine des objets isomorphes à leurs translatés”. On va tenter d'expliquer la preuve pour $GL(n)$, en négligeant les structures unitaires. Soit b un point géométrique de S. Pour tout $z \in Z_b$ et $i = 1, 2$, notons $\mathcal{O}_{Y_{i,b}}^{[[z]]}$ le complété formel de l'anneau local de $Y_{i,b}$ en z et $\mathcal{O}_{Y_{i,b}}^{((z))}$ son anneau total des fractions. Alors la donnée de $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_S(b)$ est équivalente à la donnée de ses restrictions $\mathcal{F}_i^0$, $i = 1, 2$, aux ouverts $Y_{i,b} \setminus Z_b$ et, pour chaque $z \in Z_b$, d'un $\mathcal{O}_{Y_b}^{[[z]]}$-réseau F_z de $(\mathcal{F}_1^0 \otimes \mathcal{O}_{Y_{1,b}}^{((z))}) \oplus (\mathcal{F}_2^0 \otimes \mathcal{O}_{Y_{2,b}}^{((z))})$. Un tel objet $\mathcal{F}$ est isomorphe à un objet de $\mathcal{N}_S(b)$ si et seulement si les F_z sont des

$\mathcal{O}_{Y_{1,b}}^{[[z]]} \times \mathcal{O}_{Y_{2,b}}^{[[z]]}$-réseaux, *i.e.* si et seulement si les F_z sont de la forme $F_z = F_{1,z} \oplus F_{2,z}$ pour des $\mathcal{O}_{Y_{i,b}}^{[[z]]}$-réseaux $F_{i,z}$.

Par définition de T, il existe un isomorphisme $(k(b)^\times)^{Z_a} \longrightarrow T_b(k(b))$ de sorte que le terme $t_y \in k(b)^\times$ associé à $y \in Z_a$ envoie, pour tout $z \in Z_b$ se spécialisant en y, le réseau F_z sur le réseau $t.F_z := (t_y, 1)F_z$. Donc les deux modules $\mathcal{F}$ et $t.\mathcal{F}$ sont isomorphes si et seulement si pour tout $z \in Z_b$ le réseau F_z est décomposé en $F_z = F_{1,z} \oplus F_{2,z}$. □

3.2.3. Cohomologie équivariante. — Il y a plusieurs manières de la définir, mais dans le contexte présent, la plus naturelle utilise le langage des champs. On a ici besoin d'une notion relative (sur S). On s'intéresse donc aux complexes $f_{S,*}^T \mathbb{Q}_l$ et $g_{S,*}^T \mathbb{Q}_l$, où $f_S^T : [\mathcal{M}_S/T_S] \longrightarrow S$ et $g_S^T : [\mathcal{N}_S/T_S] \longrightarrow S$ sont les morphismes structuraux des champs quotients $[\mathcal{M}_S/T_S]$ et $[\mathcal{N}_S/T_S]$. Remarquons que ces complexes ne sont en général pas cohomologiquement bornés.

Notons $\mathcal{E}_{\mathcal{N}/T}$ le T_S-torseur "canonique" au-dessus de $[\mathcal{N}_S/T_S]$, image réciproque du torseur universel par le morphisme $[g] : [\mathcal{N}_S/T_S] \longrightarrow B(T_S/S)$ déduit de g par passage au quotient. Si μ est une section sur S du faisceau étale $X^*(T_S)$ des caractères de T_S, alors μ permet de pousser $\mathcal{E}_{\mathcal{N}/T}$ en un $\mathbb{G}_m$-torseur dont la classe de Chern est un morphisme $\mathbb{Q}_{l[\mathcal{N}_S/T_S]} \longrightarrow \mathbb{Q}_{l[\mathcal{N}_S/T_S]}[2](1)$ de faisceaux étales sur $[\mathcal{N}_S/T_S]$. En appliquant $g_{S,*}^T$, en passant à la cohomologie perverse, et en faisceautisant, on obtient un morphisme

$$X^*(T_S) \otimes_{\mathbb{Z}_S} {}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^\bullet(g_{S,*}^T \mathbb{Q}_l) \longrightarrow {}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^\bullet(g_{S,*}^T \mathbb{Q}_l)[2](1)$$

qui munit la somme formelle de faisceaux pervers ${}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^\bullet(g_{S,*}^T \mathbb{Q}_l)$ d'une structure de module *gradué* sur l'anneau étale gradué $\mathrm{Sym}^\bullet(X^*(T_S) \otimes \mathbb{Q}_l(-1))$ (à condition de graduer ce dernier par l'indice $2\bullet$). De même ${}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^\bullet(f_{S,*}^T \mathbb{Q}_l)$ est muni d'une telle structure.

Comme T_S agit trivialement sur $\mathcal{N}_S$, on a un isomorphisme canonique

$${}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^\bullet(g_{S,*}^T \mathbb{Q}_l) \xrightarrow{\sim} {}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^\bullet(g_{S,*} \mathbb{Q}_l) \otimes_{\mathbb{Q}_l} \mathrm{Sym}^\bullet(X^*(T_S) \otimes \mathbb{Q}_l(-1))$$

qui montre que la cohomologie ordinaire et la cohomologie équivariante se déterminent l'une l'autre. Du côté de f_S^T et f_S, on a :

Proposition 3.3. — *Grâce à la pureté de ${}^{p}\mathcal{H}^\bullet(f_{S,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa$ (propositions 2.6 et 2.11),*

1. [30, A.1.1] *il existe un isomorphisme $\mathit{Sym}^\bullet(X^*(T_S) \otimes \mathbb{Q}_l(-1))$-équivariant*

$${}^{p}\mathcal{H}^\bullet(f_{S,*}^T \mathbb{Q}_l)_\kappa \xrightarrow{\sim} {}^{p}\mathcal{H}^\bullet(f_{S,*} \mathbb{Q}_l)_\kappa \otimes \mathit{Sym}^\bullet(X^*(T_S) \otimes \mathbb{Q}_l(-1)).$$

2. [30, A.1.3] *la flèche de restriction ${}^{p}\mathcal{H}^\bullet(f_{S,*}^T \mathbb{Q}_l)_\kappa \longrightarrow {}^{p}\mathcal{H}^\bullet(g_{S,*}^T \mathbb{Q}_l)_\kappa$ est injective.*

Le premier point dit que la κ-partie de la cohomologie ordinaire de f_S et celle de la cohomologie équivariante se déterminent l'une l'autre. Le deuxième point est une variante l-adique, champêtre, et perverse d'un théorème de Atiyah-Borel-Segal. Il montre en particulier que les ${}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^n(f_{S,*}^T \mathbb{Q}_l)_\kappa$ sont eux aussi purs.

3.2.4. "Glissade" et réduction à l'ouvert $S_\natural$. — La proposition suivante permet de ramener l'énoncé du théorème 3.1 à l'énoncé analogue où l'on remplace S par $S_\natural$. On notera $f_{S_\natural}$, $g_{S_\natural}$, etc... les restrictions à $S_\natural$ des objets correspondants relatifs à S.

Proposition 3.4. — *Notons j l'immersion ouverte $S_\natural \hookrightarrow S$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il y a des isomorphismes canoniques de faisceaux pervers*

$$j_{!*}{}^p\mathcal{H}^n(f_{S_\natural,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa \xrightarrow{\sim} {}^p\mathcal{H}^n(f_{S,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa \quad et \quad j_{!*}{}^p\mathcal{H}^n(g_{S_\natural,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa \xrightarrow{\sim} {}^p\mathcal{H}^n(g_{S,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa.$$

($j_{!*}$ désigne le prolongement intermédiaire de Deligne).

Démonstration. — Grâce au (1) de la proposition précédente, on peut déduire l'énoncé ci-dessus de l'énoncé analogue pour $f^T_{S,*}$ et $g^T_{S,*}$ par réduction modulo l'idéal d'augmentation. D'après [1, 1.4.25], un faisceau pervers K sur S est isomorphe au prolongement intermédiaire de sa restriction $j_{!*}j^*K$ si et seulement si il n'a ni quotient ni sous-objet supporté par $S \setminus S_\natural$. Sur l'hensélisé strict de S, les faisceaux pervers ${}^p\mathcal{H}^n(f^T_{S_\natural}\mathbb{Q}_l)_\kappa$ et ${}^p\mathcal{H}^n(g^T_{S_\natural}\mathbb{Q}_l)_\kappa$ sont semi-simples, puisqu'ils sont purs. Comme le premier s'injecte dans le second par le (2) de la proposition précédente, il suffit donc de prouver que ${}^p\mathcal{H}^n(g^T_{S_\natural}\mathbb{Q}_l)_\kappa$ n'a pas de sous-objet supporté par $S \setminus S_\natural$.

Ici intervient l'argument de "glissade" ou de "déformation". En termes imprécis, il consiste à remarquer que, pour $b = (b_1, b_2)$ un point géométrique de S, la fibre de Hitchin $\mathcal{N}_b$ ne dépend que des courbes Y_{b_1} et Y_{b_2}, et pas de la manière dont elles s'intersectent. On peut donc glisser "à cohomologie constante" du point $b \in S$ où l'intersection peut être compliquée à un point de $S_\natural$, où elle est le plus simple possible. En formalisant ceci [30, 3.9.1], on en déduit que le support de tout sous-objet de ${}^p\mathcal{H}^n(g^T_{S_\natural}\mathbb{Q}_l)_\kappa$ rencontre $S_\natural$. □

3.2.5. Stratégie sur $S_\natural$. — Rappelons que le tore T_S est par définition contenu dans le S-schéma en groupes commutatifs K_S de 3.2.2. Au-dessus de $S_\natural$, $K_{S_\natural} := K_S \times_S S_\natural$ est lui-même un tore, de dimension r, qui contient en général strictement $T_{S_\natural}$. De même que dans le (1) de la proposition 3.3, on récupère la κ-partie de la cohomologie ${}^p\mathcal{H}^\bullet(f_{S_\natural,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa$ par réduction de celle de la cohomologie équivariante ${}^p\mathcal{H}^\bullet(f^K_{S_\natural,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa$ modulo l'idéal d'augmentation de l'algèbre $\mathrm{Sym}^\bullet(X^*(K_{S_\natural}) \otimes \mathbb{Q}_l(-1))$. Ainsi pour prouver l'énoncé du théorème 3.1, il suffit de prouver l'énoncé analogue où l'on remplace $f_{S,*}$ par $f^K_{S_\natural,*}$ et $g_{S,*}$ par $g^K_{S_\natural,*}$ (et bien sûr $L_{Z'/Z/S}$ par $L_{Z'_\natural/Z_\natural/S_\natural}$).

De même que dans le (2) de la proposition 3.3, la flèche restriction ${}^p\mathcal{H}^\bullet(f^K_{S_\natural,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa \longrightarrow {}^p\mathcal{H}^\bullet(g^K_{S_\natural,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa$ est injective, et le problème est donc de décrire son image. En fait, la preuve de ce point (2) fournit un conoyau au morphisme de restriction, à savoir le morphisme cobord ${}^p\mathcal{H}^\bullet(g^K_{S_\natural,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa \longrightarrow {}^p\mathcal{H}^\bullet(f^K_{S_\natural,*}([j]_!\mathbb{Q}_l))_\kappa[1]$ où $[j]$ désigne l'immersion ouverte du complémentaire de $[\mathcal{N}_{S_\natural}/K_{S_\natural}]$ dans $[\mathcal{M}_{S_\natural}/K_{S_\natural}]$. Pour étudier ce conoyau, Laumon et Ngô introduisent en [30, 3.5] un certain $K_{S_\natural}$-torseur $\mathcal{E}_{12}$ sur $\mathcal{N}_{S_\natural}$, qui apparaissait déja dans [31]. Définissons ce torseur ; soit $U_\natural$ un $S_\natural$-schéma et $((\mathcal{F}_1, \iota_1), (\mathcal{F}_2, \iota_2))$ un objet de $\mathcal{N}_{S_\natural}(U_\natural)$. Comme $Z_{U_\natural}$ est étale sur $U_\natural$, les restrictions $\mathcal{F}_{i|Z_{U_\natural}}$ sont des $\mathcal{O}_{Z_{U_\natural}}$-modules inversibles et le produit $\mathcal{E} := \mathcal{F}_{1|Z_{U_\natural}} \otimes \mathcal{F}_{2|Z_{U_\natural}}{}^{\otimes -1}$ est muni d'un isomorphisme

$\iota_1 \otimes \iota_2^{-1} : \tau^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{\otimes -1}$. Un tel $\mathcal{O}_{Z_{U_\natural}}$-module inversible $\mathcal{E}$ définit un $K_{U_\natural}$-torseur. On obtient de la sorte un morphisme $\mathcal{N}_{S_\natural} \longrightarrow B(K_{S_\natural}/S_\natural)$. En tirant en arrière le torseur universel, on obtient le $K_{S_\natural}$-torseur $\mathcal{E}_{12}$ sur $\mathcal{N}_{S_\natural}$ annoncé.

À l'aide de ce torseur $\mathcal{E}_{12}$, nous allons construire une flèche injective

$$L_{Z'_\natural/Z_\natural/S_\natural} \otimes_{\mathbb{Z}_{S_\natural}} {}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^\bullet(g^K_{S_\natural,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa[-2r](-r) \longrightarrow {}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^\bullet(g^K_{S_\natural,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa, \tag{7}$$

puis il faudra expliquer pourquoi l'image de cette flèche coïncide avec l'image de la restriction ${}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^\bullet(f^K_{S_\natural,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa \longrightarrow {}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^\bullet(g^K_{S_\natural,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa$, ce qui achèvera la preuve du théorème.

3.2.6. Construction de la flèche (7). — Le formalisme des classes de Chern (*cf.* 3.2.3) appliqué à $\mathcal{E}_{12}$ munit ${}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^\bullet(g_{S_\natural,*}\mathbb{Q}_l)$ d'une action e_{12} de l'anneau gradué $\mathrm{Sym}^\bullet(X^*(K_{S_\natural})\otimes \mathbb{Q}_l(-1))$. En quotientant $\mathcal{E}_{12}$ par l'action de $K_{S_\natural}$ on obtient un $K_{S_\natural}$-torseur $\mathcal{E}_{12}/K_{S_\natural}$, au-dessus de $[\mathcal{N}_{S_\natural}/K_{S_\natural}]$ (différent du $K_{S_\natural}$ torseur "canonique" $\mathcal{E}_{[\mathcal{N}/K]}$), qui munit donc ${}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^\bullet(g^K_{S_\natural,*}\mathbb{Q}_l)$ d'une action e^K_{12} de $\mathrm{Sym}^\bullet(X^*(K_{S_\natural}) \otimes \mathbb{Q}_l(-1))$. Le lien entre cette action et l'action canonique est le suivant : l'isomorphisme canonique

$${}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^\bullet(g^K_{S_\natural,*}\mathbb{Q}_l) \xrightarrow{\sim} {}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^\bullet(g_{S_\natural,*}\mathbb{Q}_l) \otimes_{\mathbb{Q}_l} \mathrm{Sym}^\bullet(X^*(K_{S_\natural}) \otimes \mathbb{Q}_l(-1))$$

est $\mathrm{Sym}^\bullet(X^*(K_{S_\natural}) \otimes \mathbb{Q}_l(-1))$-équivariant pour l'action e^K_{12} sur le terme de gauche et l'action $(e_{12}\otimes\mathrm{mult})\circ\Delta$ sur le terme de droite, en notant Δ la comultiplication $\mathrm{Sym}^\bullet \longrightarrow \mathrm{Sym}^\bullet \otimes \mathrm{Sym}^\bullet$, *cf.* [30, A.2.1]. On en déduit que ${}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^\bullet(g^K_{S_\natural,*}\mathbb{Q}_l)$ est sans torsion pour l'action de e^K_{12}.

L'action e^K_{12} fournit en particulier un morphisme

$$\mathrm{Sym}^r(X^*(K_{S_\natural})) \otimes_{\mathbb{Z}_{S_\natural}} {}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^\bullet(g^K_{S_\natural,*}\mathbb{Q}_l) \longrightarrow {}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^\bullet(g^K_{S_\natural,*}\mathbb{Q}_l)[2r](r).$$

La flèche (7) que l'on veut définir sera la κ-partie de la composée du morphisme ci-dessus avec le plongement

$$L_{Z'_\natural/Z_\natural/S_\natural} \longrightarrow \mathrm{Sym}^r(X^*(K_{S_\natural})) \tag{8}$$

que nous définissons maintenant.

Rappelons que $K_{S_\natural}$ est la partie "τ-impaire" de $pr_{Z'_\natural\to S_\natural,*}\mathbb{G}_m$, et introduisons temporairement sa partie τ-paire $K'_{S_\natural}$. La structure d'anneau de $X_*(\mathbb{G}_m) = \mathcal{E}nd_{Z'_\natural}(\mathbb{G}_m)$ induit une action $X_*(K_{S_\natural}) \otimes X_*(K'_{S_\natural}) \longrightarrow X_*(K_{S_\natural})$ de la partie paire sur la partie impaire. Par dualité et puissance tensorielle, on a une action $\mathrm{Tens}^r X^*(K_{S_\natural}) \otimes \mathrm{Tens}^r X_*(K'_{S_\natural}) \longrightarrow \mathrm{Tens}^r X^*(K_{S_\natural})$ qui envoie $\bigwedge^r X^*(K_{S_\natural}) \otimes \bigwedge^r X_*(K'_{S_\natural})$ dans $\mathrm{Sym}^r(X^*(K_{S_\natural}))$. Maintenant, l'isomorphisme canonique $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} X_*(\mathbb{G}_m)$ d'anneaux étales sur $Z'_{S_\natural}$ induit, par construction, un isomorphisme $L_{Z'_\natural/Z_\natural/S_\natural} \xrightarrow{\sim} \bigwedge^r X_*(K_{S_\natural}) \otimes \bigwedge^{-r} X_*(K'_{S_\natural})$. Mais comme $L_{Z'_\natural/Z_\natural/S_\natural}$ est d'ordre 2, il est aussi isomorphe à $\bigwedge^r X^*(K_{S_\natural}) \otimes \bigwedge^r X_*(K'_{S_\natural})$. Le choix d'un isomorphisme achève de définir la flèche (8) et donc la flèche (7). Cette flèche (7) est injective puisque l'action e^K_{12} est sans torsion.

3.2.7. Fin de la preuve. — Il s'agit de prouver que la flèche injective (7) et la flèche injective de restriction ${}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^{\bullet}(f^{K}_{S_\natural,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa \longrightarrow {}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^{\bullet}(g^{K}_{S_\natural,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa$ ont la même image dans ${}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^{\bullet}(g^{K}_{S_\natural,*}\mathbb{Q}_l)_\kappa$.

Supposons un instant que $r=1$, de sorte que $Z_\natural \simeq S_\natural$, $K_{S_\natural} \simeq U_{Z'_\natural/S_\natural}(1)$ et $L_{Z'_\natural/Z_\natural/S_\natural} \simeq X^*(K_\natural)$. Posons $S'_\natural := Z'_\natural$ et changeons tout le monde de base. Le choix d'une section $S'_\natural \xrightarrow{z'} Z'_\natural \times_{S_\natural} S'_\natural$ induit un isomorphisme $K_{S'_\natural} \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_m$, de sorte que $\mathcal{E}'_{12} := \mathcal{E}_{12} \times_{S_\natural} S'_\natural$ est simplement un $\mathbb{G}_m$-torseur au-dessus de $\mathcal{N}_{S'_\natural}$. Notons $\mathbb{P}'_{12}$ la compactification projective relative de $\mathcal{E}'_{12}$, qui est donc un fibré en droites projectives au-dessus de $\mathcal{N}_{S'_\natural}$. Si $U'_\natural$ est un $S'_\natural$-schéma, une section $U'_\natural \longrightarrow \mathbb{P}_{12}$ est la donnée d'une paire $((\mathcal{F}_1,\iota_1),(\mathcal{F}_2,\iota_2))$ dans $\mathcal{N}_{S'_\natural}(U'_\natural)$ plus un facteur direct de rang 1 de $\mathcal{F}_{1,z'} \oplus \mathcal{F}_{2,z'}$. Ce facteur direct détermine un sous-$\mathcal{O}_{Y_{U'_\natural}}$-module sans torsion de rang 1 $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$. L'amalgamé de $\mathcal{F}$ et $\tau^*(\mathcal{F}^\vee)$ au-dessus de $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$ est muni d'une structure unitaire évidente et définit un objet de $\mathcal{M}_{S'_\natural}(U'_\natural)$. On obtient ainsi un morphisme $\mathbb{P}'_{12} \longrightarrow \mathcal{M}_{S'_\natural}$ qui envoie isomorphiquement $\mathcal{E}'_{12}$ sur le complémentaire de $\mathcal{N}_{S'_\natural}$ et qui identifie les sections 0 et ∞ de $\mathbb{P}'_{12}$. L'image de l'immersion $\mathcal{N}_{S'_\natural} \hookrightarrow \mathcal{M}_{S'_\natural}$ est justement cette section double. On a donc une prise sur le complémentaire de $\mathcal{N}_{S'_\natural}$ dans $\mathcal{M}_{S'_\natural}$. La cohomologie de cette situation géométrique assez simple est étudiée dans l'appendice A.2 de [30]. Après descente subtile de $S'_\natural$ à $S_\natural$, on en déduit le résultat cherché dans ce cas $r=1$.

Le jeu est alors de se ramener à cette situation $r=1$. L'idée est de faire intersecter les courbes Y_1 et Y_2 "petit à petit" en considérant une suite de courbes intermédiaires entre $Y_1 \bigsqcup Y_2$ et Y. La réalisation formelle de ce programme est assez technique et occupe les six pages de la section 3.6. de [30].

3.3. Le lemme fondamental

Comme on l'a mentionné après la conjecture 2.12, on obtient en prenant les traces de Frobenius des deux côtés de l'isomorphisme du théorème 3.1 une égalité entre une intégrale orbitale stable sur $H = U_{X'|X}(n_1) \times U_{X'|X}(n_2)$ et une κ-intégrale orbitale sur $G = U_{X'|X}(n)$. Il est probable que cela mène à un transfert explicite des fonctions 1_D sur G vers son groupe endoscopique H et qu'on puisse en déduire le lemme fondamental par des arguments de formule des traces et d'approximation du local par le global. Toutefois, la stratégie suivie par Laumon et Ngô est de nature plus géométrique.

3.3.1. Conséquence numérique du théorème 3.1. — On fixe $a \in \mathcal{A}^{ell}_D(k)$. Le théorème 2.4 montre comment le quotient $[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}_a]$ se décompose en un produit d'analogues locaux indexés par les points fermés de X. Dans le cas unitaire, on peut raffiner cette décomposition en un produit indexé par les points fermés de la courbe spectrale Y_a. Notons en effet A_y l'anneau semi-local avec involution τ complété de Y'_a le long de l'image réciproque de y et introduisons les classifiants $\mathcal{M}_{a,y}$, resp. $\mathcal{P}_{a,y}$, des A_y-modules sans torsion de rang 1 "unitaires", resp. inversibles "unitaires". Lorsque y est un point lisse, le quotient de $\mathcal{M}_{a,y}$ par $\mathcal{P}_{a,y}$ est bien sûr trivial. La même preuve que pour le théorème 2.4 fournit alors un isomorphisme de k-champs $[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}_a] \xrightarrow{\sim}$

$\prod_{y\in Y^{sing}}[\mathcal{M}_{a,y}/\mathcal{P}_{a,y}]$. Lorsque $a=(a_1,a_2)$ et $y\in Y_{a_1}$ ou $y\in Y_{a_2}$, on définit de même $A_{1,y}$ et $A_{2,y}$, puis les classifiants $\mathcal{N}_{a,y}$ et $\mathcal{Q}_{a,y}$, et on a une décomposition $[\mathcal{N}_a/\mathcal{Q}_a] \xrightarrow{\sim} \prod_{y\in Y^{sing}}[\mathcal{N}_{a,y}/\mathcal{Q}_{a,y}]$..

De même que dans la discussion qui suit le théorème 2.4, on a besoin de sections $[\mathcal{M}_{a,y}/\mathcal{P}_{a,y}] \longrightarrow [\mathcal{M}_a/\mathcal{P}_a]$ pour définir les accouplements $\langle \mathrm{inv}(m_y),\kappa\rangle$ pour m_y un objet de $[\mathcal{M}_{a,y}/\mathcal{P}_{a,y}]$. Ces sections s'obtiennent en introduisant des versions génériquement rigidifiées $\mathcal{M}^\bullet_{a,y}$ et $\mathcal{P}^\bullet_{a,y}$ par un *point-base bien choisi.* Laumon et Ngô utilisent un *point de Kostant du groupe endoscopique* qui se décrit concrètement comme $(\mathcal{K},\iota_{\mathcal{K}}) := \nu_*((\mathcal{K}_1,\iota_{\mathcal{K}_1})(\mathcal{K}_2,\iota_{\mathcal{K}_2}))$ où, pour $\alpha=1,2$, on prend $\mathcal{K}_\alpha := pr^*_{Y'_{a_\alpha}\to X'}\mathcal{O}_{X'}((n-1)D)$ qui est une racine carrée du dualisant relatif $\omega_{Y'_{a_\alpha}/X'}$ et qui provient de X, donc est muni d'une structure unitaire ι_α (de descente).

Corollaire 3.5 ([30], Th. 3.10.6). — *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 3.1, notons Z^{inerte} l'ensemble des points fermés de Z qui sont inertes dans Z' et, pour chaque tel point, r_z la longueur de la $k(z)$-algèbre artinienne $\mathcal{O}_{Z,z}$. Alors on a l'égalité*

$$\prod_{z\in Z^{\mathrm{inerte}}}\left(|\mathcal{P}^0_{a,z}(k)| \sum_{m_z\in[\mathcal{M}_{a,z}/\mathcal{P}_{a,z}](k)_{/\sim}} \frac{\langle inv(m_z),\kappa\rangle}{Aut(m_z)}\right)$$
$$= \prod_{z\in Z^{\mathrm{inerte}}}\left((-|k(z)|)^{r_z}|\mathcal{Q}^0_{a,z}(k)| \sum_{n_z\in[\mathcal{N}_{a,z}/\mathcal{Q}_{a,z}](k)_{/\sim}} \frac{1}{Aut(n_z)}\right)$$

Démonstration. — En prenant la trace de Frobenius du théorème 3.1, on obtient la formule

$$|\mathcal{P}^0_a(k)| \prod_{y\in Y^{sing}}\left(\sum_{m_y}\frac{\langle \mathrm{inv}(m_y),\kappa\rangle}{Aut(m_y)}\right) = \varepsilon_{Z'/Z/S}\, q^r |\mathcal{Q}^0_a(k)| \prod_{y\in Y^{sing}}\left(\sum_{n_y}\frac{1}{Aut(n_y)}\right)$$

où $\varepsilon_{Z'/Z/S}$ est le signe de Frobenius qui détermine $L_{Z'/Z/S}$. Le lemme [30, 3.4.1] montre que ce signe est la parité de $\sum_{z\in Z^{\mathrm{inerte}}} r_z$. On a aussi par définition $q^r = \prod_{y\in Y^{sing}} |k(y)|^{r_y}$ si on convient de poser $r_y=0$ pour $y\in Y^{sing}\setminus Z$. Les termes $|\mathcal{P}^0_a(k)|$ et $|\mathcal{Q}^0_a(k)|$ ne se décomposent pas en produits de termes locaux, mais en explicitant le quotient $[\mathcal{Q}^0_a/\mathcal{P}^0_a]$, on montre que leur quotient se décompose en un tel produit.

Il reste alors à montrer que pour $y\in Y^{sing}\setminus Z^{\mathrm{inerte}}$, on a l'égalité

$$|\mathcal{P}^0_{a,y}(k)| \sum_{m_y}\frac{\langle \mathrm{inv}(m_y),\kappa\rangle}{Aut(m_y)} = |k(y)||\mathcal{Q}^0_{a,y}(k)| \sum_{n_y}\frac{1}{Aut(n_y)}.$$

Pour y hors de Z, c'est immédiat. Pour $y\in Z\setminus Z^{\mathrm{inerte}}$, il faut faire un calcul, qui rappelle la descente des intégrales orbitales.

□

3.3.2. Plongement d'une situation locale dans une situation globale. — On fixe ici la courbe X, son revêtement X' que l'on suppose décomposé en un point x_∞, et un diviseur de degré "assez grand". On a alors la surface réglée $\Sigma_D^0 \longrightarrow X$.

On se donne ensuite un contexte local comme dans 1.8.1. On a donc $F = \mathbb{F}_q[[x]]$, F' son extension quadratique non ramifiée, des extensions séparables $(F_i)_{i\in I}$ de F disjointes de F' et des élément entiers $\gamma_i \in F_i'$ tels que $\gamma_i + \tau(\gamma_i) = 0$. On se donne aussi une partition $I = I_1 \sqcup I_2$ et on pose $A_{I_\alpha} = \prod_{i\in I_\alpha} \mathcal{O}_{F'}[\gamma_i]$ pour $\alpha = 1, 2$.

PROPOSITION 3.6 ([30], prop. 4.6.1). — *Il existe des entiers non nuls $N = N_1 + N_2$, une caractéristique $(a_1, a_2) \in \mathcal{A}_H(k)$ pour le groupe endoscopique $H := U_{X'|X}(N_1) \times U_{X'|X}(N_2)$ de $G = U_{X'|X}(N)$ telle que les courbes spectrales associées Y_{a_1} et Y_{a_2} soient géométriquement irréductibles, et un point rationnel z_0 de l'intersection Z de Y_{a_1} et Y_{a_2} dans la surface réglée Σ_D^0, ayant les propriétés suivantes :*

- *en tout point fermé $z \in Z \setminus z_0$, les courbes spectrales se coupent transversalement.*
- *z_0 est inerte dans Z', de préimage un point fermé noté $z_0' \in Z'$. Alors x_0 est aussi inerte dans X', et on note $x_0' \in X'$ le point fermé au-dessus.*
- *Il existe des isomorphismes compatibles aux involutions et compatibles entre eux*
  - $\widehat{\mathcal{O}}_{X',x_0'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{F'}$
  - $A_{\alpha,z_0} = \widehat{\mathcal{O}}_{Y'_{a_\alpha},z_0'} \xrightarrow{\sim} A_{I_\alpha} = \prod_{i\in I_\alpha} \mathcal{O}_{F'}[\gamma_i]$ *pour* $\alpha = 1, 2.$

La preuve de cette proposition utilise un lemme d'approximation local-global [30, 4.2] et un théorème à la Bertini sur les corps finis, dû à Poonen [34].

3.3.3. Fin de la preuve du lemme fondamental. — Il faut étudier l'égalité donnée par le corollaire 3.5 dans la situation de la proposition ci-dessus. Une description explicite [30, 4.6] des catégories quotients $[\mathcal{M}_{a,z}/\mathcal{P}_{a,z}]$ montre que les termes indexés par $Z^{\text{inerte}} \setminus z_0$ des deux côtés sont égaux. Il subsiste donc une égalité des deux termes indexés par z_0. La même description montre aussi les égalités suivantes (tout a été fait pour) :

$$|\mathcal{Q}^0_{a,z_0}(k)| \sum_{n_{z_0}\in[\mathcal{N}_{a,z_0}/\mathcal{Q}_{a,z_0}](k)_{/\sim}} \frac{1}{Aut(n_{z_0})} = SO^H_{\gamma_I}.$$

et

$$|\mathcal{P}^0_{a,z_0}(k)| \sum_{m_{z_0}\in[\mathcal{M}_{a,z_0}/\mathcal{P}_{a,z_0}](k)_{/\sim}} \frac{\langle \mathrm{inv}(m_{z_0}), \kappa\rangle}{Aut(m_{z_0})} = O^\kappa_{\gamma_I}$$

Le lemme fondamental (théorème 1.6) en découle.

RÉFÉRENCES

[1] J. Bernstein A. Beilinson and P. Deligne. *Analyse et topologie sur les espaces singuliers (I : Faisceaux Pervers).* Astérisque 100.

[2] J. Arthur. A stable trace formula II : Global descent. *Invent. Math.*, 143:157–220, 2001.

[3] J. Arthur. A stable trace formula I : General expansions. *J. Inst. Math. Jussieu*, 1(2):175–277, 2002.

[4] J. Arthur. A stable trace formula III : Proof of the main theorems. *Ann. of Math.*, 158, 2003.

[5] A. Beauville, M.S. Narasimhan, et S. Ramanan. Spectral curve and the generalized Theta divisor. *J. reine angew. Math.*, 398:169–179, 1989.

[6] I. Biswas et S. Ramanan. Infinitesimal study of Hitchin pairs. *J. London Math. Soc.*, 49:219–231, 1994.

[7] A. Borel. Automorphic L-functions. volume 33(2), pages 27–63, 1979.

[8] A. Borel and H. Jacquet. Automorphic forms and automorphic representations. volume 33(1), pages 189–202, 1979.

[9] L. Breen. *On the classification of* 2*-gerbes and* 2*-stacks*, Astérisque 225. 1994.

[10] G. Faltings. Stable G-bundles and projective connections. *J. Alg. Geom.*, 2:507–568, 1993.

[11] M. Goresky, R. Kottwitz, et R. Macpherson. Homology of affine Springer fibers in the unramified case. *Duke Math. J.*, 121:509–561, 2004.

[12] T.C. Hales. A simple definition of transfer factors for unramified groups. *Contemporary Math*, 145:109–134, 1993.

[13] T.C. Hales. On the fundamental lemma for standard endoscopy : reduction to unit elements. *Canad. J. Math.*, 47:974–994, 1995.

[14] T.C. Hales. A statement of the fundamental lemma. *ArXiv:math.RT/0312227*, 2003.

[15] N. Hitchin. Stable bundles and integrable connections. *Duke Math. J.*, 54:91–11, 1987.

[16] D. Kazhdan et G. Lusztig. Fixed points varieties on affine flag manifolds. *Israel. J. Math.*, 62:129–168, 1988.

[17] R.E. Kottwitz. Stable trace formula : Cuspidal tempered terms. *Duke Math. J.*, 51:611–650, 1984.

[18] R.E. Kottwitz. Stable trace formula : Elliptic singular terms. *Math. Ann.*, 275:365–399, 1986.

[19] R.E. Kottwitz. Tamagawa numbers. *Ann. of Maths*, 127:629–646, 1988.

[20] R.E. Kottwitz. Transfer factors for Lie algebras. *Represent. Theory*, 3:127–138, 1999.

[21] R.E. Kottwitz et D. Shelstad. *Foundations of twisted endoscopy.* Astérisque 225. 1999.

[22] J.-P. Labesse. Stable twisted trace formula : elliptic terms. *J. Inst. Math. Jussieu*, 3(4).

[23] J.-P. Labesse. *Cohomologie, stabilisation et changement de base*, Astérisque 257. 1999.

[24] J.-P. Labesse et R.P. Langlands. L-indistinguishability for $SL(2)$. *Canad. J. Math*, 31, 1979.

[25] R.P. Langlands. *Les débuts d'une formule des traces stable*. Publ. Math. Univ. Paris 7. 1979.

[26] R.P. Langlands et D. Shelstad. On the definition of transfer factors. *Math. Ann.*, 278:219–271, 1987.

[27] R.P. Langlands et D. Shelstad. Descent for transfer factors. *The Grothendieck Fetschrift*, vol II, 485–563, Prog. Math. 87, 1990.

[28] G. Laumon. Sur le lemme fondamental pour les groupes unitaires. *math AG/0212245*, 2002.

[29] G. Laumon et L. Moret-Bailly. *Champs algébriques*. Ergebnisse der Mathematik. Springer, 2000.

[30] G. Laumon et B.C. Ngô. Le lemme fondamental pour les groupes unitaires. 2004.

[31] G. Laumon et M. Rapoport. A geometric approach to the fundamental lemma for unitary groups. *math AG/9711021*, 1997.

[32] B.C. Ngô. Sur l'endoscopie des groupes orthogonaux et symplectiques et leur fibration de Hitchin. *En préparation.*

[33] B.C. Ngô. Fibration de Hitchin et endoscopie. *math AG/0406599*, 2004.

[34] B. Poonen. Bertini theorems over finite fields. *math AG/0204002*, 2002.

[35] J.-L. Waldspurger. Sur les intégrales orbitales tordues des groupes linéaires. Un lemme fondamental. *Canad. J. Math.* 4;852–896, 1991.

[36] J.-L. Waldspurger. Le lemme fondamental implique le transfert. *Compositio Math.*, 105:153–236, 1997.

[37] J.-L. Waldspurger. *Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes non ramifiés*, Astérisque 269. 2001.

[38] J.-L. Waldspurger. Endoscopie et changement de caractéristique. Prépublication disponible sur la page *http://www.math.jussieu.fr/ waldspur*, 2004.

Jean-François DAT

Université Paris-Nord
Avenue J.-B. Clément
F–93430 Villetaneuse
E-mail : `dat@math.univ-paris13.fr`