Changement de base CM et séries discrètes

J.-P. Labesse
Institut Mathématique de Luminy
UMR 6206

1 Présentation

Soit F un corps de nombres totalement réel et E une extension quadratique totalement imaginaire de F. On s'intéresse aux groupes unitaires $\mathbf{U}$ relatifs à E/F. L'objectif est d'étudier le changement de base quadratique E/F pour les représentations automorphes de U qui sont cohomologiques aux places archimédiennes.

Cet article généralise des résultats et des techniques déjà présents dans [C3],[CL1] et [HL]. Contrairement aux articles précédents, le théorème principal 5.1 ne fait appel à aucune hypothèse supplémentaire de ramification, ni sur le groupe $\mathbf{U}$, ni sur les représentations aux places finies ; toutefois nous supposerons que F est de degré au moins 2 sur $\mathbb{Q}$.[1] Pour les théorèmes de multiplicité un 5.4 et de stabilité 5.5, nous supposerons de plus que les représentation sont non ramifiées à toutes les places finies inertes.

L'outil essentiel est la stabilisation d'une formule des traces tordue. Des progrès spectaculaires ont été faits récemment. La preuve du lemme fondamental, due à Laumon et Ngô pour les groupes unitaires [LN], a été généralisée par Ngô à tous les groupes réductifs ; la variante pondérée est annoncée par Chaudouard et Laumon. Ces travaux, complétés par ceux de Waldspurger ([W1] et [W2]), font que la stabilisation dans le cas non tordu, obtenue par Arthur [A6], est devenue inconditionnelle pour tous les groupes

[1] Les résultats principaux (section 5) devraient encore être vrais dans le cas $F = \mathbb{Q}$, mais ce cas n'est pas traité ici : il demanderait un travail supplémentaire (voir les remarques 3.12 et 5.2). Nous espérons y revenir dans un article ultérieur.

réductifs. Toutefois la preuve de la stabilisation dans le cas tordu n'a pas encore été rédigée en toute généralité, quoique le principal obstacle – à savoir le lemme fondamental tordu [W3], ainsi que sa variante pondérée – soit levé.

Nous proposons une version ad hoc de la stabilisation sous des hypothèses simplificatrices : en nous limitant au cas des représentations automorphes ne faisant intervenir que des séries discrètes aux places réelles pour un groupe unitaire nous donnons, pour le changement de base, une démonstration de la stabilisation pour la trace dans le spectre discret indépendante de la preuve du lemme fondamental pondéré. On en déduit des propriétés du changement de base sous la forme nécessaire pour les applications qui sont au cœur de ce livre. L'hypothèse que F est de degré $d \geq 2$ sur $\mathbb{Q}$, permet l'utilisation de la formule des traces simple et allège ainsi beaucoup les preuves et les pré-requis.

On aurait pu, comme dans [BLS], se contenter d'utiliser la formule des traces sous sa forme primitive (non invariante) et éviter ainsi d'avoir recours à la forme invariante de la formule des traces d'Arthur dont l'établissement est plus technique. C'était le point de vue adopté dans des versions antérieures de ce texte, mais d'une part cela alourdit un peu les arguments donnés ici et d'autre part, puisque nous prenons la formule des traces comme donnée, cela n'aide en rien pour la compréhension des preuves ; nous y avons renoncé.

Comme déjà dit plus haut ce papier reprend des techniques familières. Nous avons cependant fait des rappels assez longs pour le confort du lecteur inexpérimenté, la littérature sur le sujet étant vaste et parfois difficilement pénétrable, mais aussi pour fixer les notations. Nous ferons ces rappels dans le cadre d'un espace tordu sous un groupe réductif général mais nous donnerons la forme explicite des divers objets pour les cas utiles dans nos applications.

2 Groupes et espaces en question

2.1 Groupes unitaires et espaces associés

Soit F un corps de nombres totalement réel et E une extension quadratique totalement imaginaire de F. Soit α_n l'automorphisme non trivial de $GL(n)$ qui fixe l'épinglage canonique :

$$\alpha_n(x) = J_n \ {}^t x^{-1} J_n^{-1}$$

avec $x \mapsto {}^t x$ la transposition et

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $x \mapsto \overline{x}$ l'automorphisme non trivial du groupe de Galois de E/F. Le groupe

$$\mathbf{G}_n = \mathrm{Res}_{E/F}\, GL(n)$$

admet un automorphisme θ_n d'ordre 2 :

$$\theta_n(x) = \alpha_n(\overline{x}) \ .$$

On notera $\widetilde{\mathbf{G}}_n$ l'ensemble défini par la classe de θ_n dans le groupe produit semi-direct $\mathbf{G}_n \rtimes < \theta_n >$:

$$\widetilde{\mathbf{G}}_n = \mathbf{G}_n \rtimes \theta_n \ .$$

C'est un espace tordu suivant la terminologie de [Lab5] rappelée ci-dessous. On note $\mathbf{U}_n^* = \mathbf{U}^*(n, E/F)$ le sous-groupe des points fixes de θ_n dans $\mathbf{G}_n$. C'est le groupe unitaire quasi-déployé attaché à E/F en dimension n. On notera $\mathbf{U}_n$ une forme intérieure de $\mathbf{U}_n^*$. Pour alléger les notations on omettra parfois les indices n si le contexte est clair.

2.2 Espaces tordus

Pour l'étude de la formule des traces tordue, qui est l'outil essentiel de cet article, il est commode d'utiliser le langage des espaces tordus introduit dans [Lab5]. Cela permet en particulier de traiter de manière uniforme le cas tordu et le cas ordinaire c'est-à-dire le cas d'un groupe. C'est une variante du point de vue utilisé par Arthur, dans [Ar2] par exemple, où il développe la formule des traces invariante pour une composante non neutre d'un groupe non connexe.

Rappelons qu'un espace tordu (dans la catégorie des ensembles) est la donnée d'un groupe G, d'un G-espace principal homogène $\widetilde{G}$ à gauche et d'une application

$$\widetilde{\mathrm{Ad}} : \widetilde{G} \to \mathrm{Aut}\,(G)$$

qui est G-équivariante c'est-à-dire que pour tout $x \in G$ et tout $\delta \in \widetilde{G}$ on a

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}(x\delta) = \mathrm{Ad}(x) \circ \widetilde{\mathrm{Ad}}(\delta)$$

où $\mathrm{Ad}(x)$ est comme d'habitude l'automorphisme intérieur défini par x. Choisissons un élément δ_0 de $\widetilde{G}$ et posons

$$\theta = \widetilde{\mathrm{Ad}}(\delta_0) \in \mathrm{Aut}\,(G)\ .$$

On définit une action à droite de G sur $\widetilde{G}$ en posant

$$x\delta_0\, y = x\theta(y)\delta_0\ ,$$

ce qui fournit une action par conjugaison de G sur $\widetilde{G}$ et la notion de classe de G-conjugaison dans $\widetilde{G}$. Ces actions sont indépendantes du choix de δ_0. On a un isomorphisme d'espace tordus

$$\widetilde{G} \simeq G \rtimes \theta \subset G \rtimes \mathrm{Aut}\,(G)$$

défini par $x\delta_0 \mapsto x \rtimes \theta$ pour $x \in G$, mais en général cet isomorphisme dépend du choix de δ_0. En identifiant, via cet isomorphisme, G et $\widetilde{G}$ à des sous-ensembles du groupe $G \rtimes \mathrm{Aut}\,(G)$ on a

$$\delta_0\, x\, \delta_0^{-1} = \theta(x)\ .$$

On appellera représentation d'un espace tordu dans un espace vectoriel V la donnée d'un couple $(\widetilde{\pi}, \pi)$ où $\widetilde{\pi}$ est une application

$$\widetilde{\pi} : \widetilde{G} \to GL(V)$$

et π une représentation de G dans V :

$$\pi : G \to GL(V)$$

vérifiant pour $x, y \in G$ et $\delta \in \widetilde{G}$

$$\widetilde{\pi}(x\delta y) = \pi(x)\widetilde{\pi}(\delta)\pi(y)\ .$$

La donnée de $\widetilde{\pi}$ détermine π : on dira que π est la restriction de $\widetilde{\pi}$ à G. Si V est un espace de Hilbert on dira que $\widetilde{\pi}$ est unitaire si $\widetilde{\pi}$ prend ses valeurs dans le groupe unitaire de V.

Les représentations π que nous rencontrerons seront soit unitaires soit de dimension finie ; dans tous les cas le lemme de Schur sera valable. On dira que $\widetilde{\pi}$ est G-irréductible si π est irréductible. Dans ce cas on a

$$\pi(\theta(x)) = \widetilde{\pi}(\delta_0)\pi(x)\widetilde{\pi}(\delta_0)^{-1}$$

et donc

$$\pi \circ \theta \simeq \pi$$

et on dit que π est θ-invariante (ou θ-stable). Réciproquement, dire que l'automorphisme θ préserve une représentation irréductible (π, V) signifie qu'il existe un opérateur $I_\theta \in GL(V)$ tel que

$$I_\theta \; \pi(x) = \pi(\theta(x)) \, I_\theta \; .$$

Ceci permet de prolonger π en une représentation $\widetilde{\pi}$ de $\widetilde{G}$ en posant

$$\widetilde{\pi}(x\delta_0) = \pi(x) I_\theta \; ;$$

toutefois un tel prolongement n'est pas canonique car I_θ n'est défini par π qu'à un scalaire près.

2.3 Cas des groupes réductifs

On définit de manière analogue la notion d'espace tordu dans la catégorie des variétés algébriques. Par un abus de notation classique on notera par la même lettre une variété algébrique et son ensemble de points sur une clôture algébrique $\overline{F}$ choisie une fois pour toutes.

Dans toute la suite G sera un groupe réductif connexe défini sur un corps de nombres F et $\widetilde{G}$ un G-espace tordu. Nous supposerons donné un isomorphisme, défini sur F

$$\widetilde{G} \to G \rtimes \theta$$

où θ est un F-automorphism de G. On choisit θ de sorte qu'il préserve un sous-groupe parabolique P_0 et un sous-groupe de Levi $M_0 \subset P_0$ minimaux sur F. On notera le plus souvent δ_0 (mais aussi parfois w_0) l'élément de $\widetilde{G}(F)$ image réciproque de $1 \rtimes \theta$ par l'isomorphisme. On dispose de l'espace tordu $\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)$ des points adèliques de $\widetilde{G}$. Tout élément $y \in \widetilde{G}(\mathbb{A}_F)$ est de la forme

$$y = x\delta_0$$

avec $x \in G(\mathbb{A}_F)$.

On note A_G le tore déployé maximal de la restriction des scalaires à $\mathbb{Q}$ du centre Z_G de G. On note $\mathfrak{A}_G$ la composante neutre de $A_G(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{a}_G$ son algèbre de Lie. On suppose que l'automorphisme induit par θ sur $\mathfrak{A}_G$ est d'ordre fini. On notera $\mathfrak{A}_{\widetilde{G}}$ (resp. $\mathfrak{a}_{\widetilde{G}}$) le sous-groupe (resp. la sous-algèbre) des points fixes sous θ dans $\mathfrak{A}_G$ (resp. $\mathfrak{a}_G$).

On dit qu'un élément $\delta \in \widetilde{G}$ est semi-simple si $\widetilde{\mathrm{Ad}}(\delta)$ est un automorphisme semi-simple. On notera G^δ son centralisateur et I_δ le centralisateur stable [Lab5, Définition II.1.3] qui est un sous-groupe de G^δ contenant sa composante neutre. Dans les exemples ci-dessous on aura $I_\delta = G^\delta$ le centralisateur d'un élément semi-simple étant connexe. On dit qu'un élément $\delta \in \widetilde{G}(F)$ est elliptique (cf. [Lab5, section IV.1]) si il est semi-simple et si de plus $\mathfrak{A}_{I_\delta} = \mathfrak{A}_{\widetilde{G}}$.

Les groupes adèliques seront munis de la mesure de Tamagawa et on notera $\tau(G)$ le nombre de Tamagawa de G. Les centralisateurs stables des éléments semi-simples étant quasi-connexes (au sens de [Lab4]) mais non connexes en général il est nécessaire de généraliser la notion de mesure de Tamagawa pour de tels groupes ; c'est ce qui est fait dans [KS] pour les centralisateurs des éléments fortement réguliers (ce sont des groupes diagonalisables) et dans [Lab4] pour le cas général. Mais, dans les exemples qui nous occuperons ici, ce sera inutile les centralisateurs étant connexes.

Pour les applications que nous avons en vue ici on aura soit

$$\text{(A)} \qquad \widetilde{G} = \widetilde{\mathbf{G}}_n = \mathbf{G}_n \rtimes \theta \quad , \quad G = \mathbf{G}_n \quad , \quad \theta = \theta_n$$

soit

$$\text{(B)} \qquad \widetilde{G} = G = \mathbf{U} \quad , \quad \theta = 1 \ .$$

On rencontrera aussi des produits d'espaces tordus et de groupes d'un des types ci-dessus. Dans tous les cas $\delta_0 = 1 \rtimes \theta$.

Dans ces exemples les centralisateurs des éléments semi-simples sont connexes et le groupe $\mathfrak{A}_{\widetilde{G}}$ est trivial. En particulier, un élément semi-simple est elliptique si son centralisateur possède un tore maximal anisotrope.

3 Formule des traces

3.1 Le noyau intégral de la formule des traces

On reprend les notations du cas général au paragraphe 2.3. L'espace homogène

$$X_G = \mathfrak{A}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$$

est de volume fini ; il est compact si G_{der}, le groupe dérivé, est anisotrope. La représentation régulière gauche ρ de $G(\mathbb{A}_F)$ dans $L^2(X_G)$ admet un prolongement naturel en une représentation $\widetilde{\rho}$ de $\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)$; elle est définie par

$$\widetilde{\rho}(g\delta_0)\varphi(x) = \varphi(\theta^{-1}(x\,g))$$

pour $\varphi \in L^2(X_G)$, $g \in G(\mathbb{A}_F)$, $\delta_0 \in \widetilde{G}(F)$, $\theta = \widetilde{\mathrm{Ad}}(\delta_0)$ et $x \in X_G$ ce qui peut aussi s'écrire

$$\widetilde{\rho}(y)\varphi(x) = \varphi(\delta_0^{-1}\,x\,y)$$

si $y = g\delta_0$. La représentation $\widetilde{\rho}$ est indépendante du choix de δ_0. Une représentation automorphe irréductible π du spectre discret, c'est-à-dire réalisée dans un sous-espace $G(\mathbb{A}_F)$-invariant de $L^2(X_G)$, et qui est de plus θ-invariante, admet un prolongement canonique $\widetilde{\pi}$ à $\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)$, dit prolongement automorphe, par restriction de $\widetilde{\rho}$ à l'espace de π.

On considère une fonction $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\widetilde{G}(\mathbb{A}_F))$ et l'opérateur $\widetilde{\rho}(\phi)$ défini par la représentation régulière gauche de $\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)$ dans $L^2(X_G)$. L'opérateur $\widetilde{\rho}(\phi)$ est donné par le noyau intégral

$$K(x,y) = \int_{z\in\mathfrak{A}_G} \sum_{\delta\in\widetilde{G}(F)} \phi(x^{-1}\delta\,z\,y)\;\;dz\;.$$

Lorsque X_G est compact la formule des traces est l'égalité entre l'intégrale sur la diagonale du noyau que l'on peut développer en une somme indexée par les classes de conjugaisons dans $\widetilde{G}(F)$, appelée développement géométrique, et d'autre part la trace de $\widetilde{\rho}(\phi)$ développée suivant la décompositions spectrale de $L^2(X_G)$.

Dans le cas général où G_{der} n'est plus nécessairement anisotrope, la formule des traces est l'égalité du développement géométrique et du développement spectral pour la "trace renormalisée" de cet opérateur. Du point de vue géométrique une renormalisation est nécessaire car l'intégrale du noyau sur la diagonale est divergente. Du point de vue spectral une renormalisation est nécessaire car l'opérateur $\widetilde{\rho}(\phi)$ n'est traçable que dans le spectre discret. Or la décomposition spectrale comporte en général un spectre continu.

La renormalisation se fait au moyen de troncatures qui dépendent de divers choix : outre le choix d'un sous-groupe de Levi minimal θ-invariant M_0, il convient de choisir un bon sous-groupe compact maximal K. Cette dépendance implique que la distribution obtenue n'est pas invariante par conjugaison. Pour pallier cet inconvénient un avatar invariant de cette distribution a été construit par Arthur (cf. [Ar2]). La preuve dans le cas tordu en est désormais inconditionnelle grâce au théorème de Paley-Wiener scalaire tordu de Delorme et Mezo [DM]. On notera $T^{\widetilde{G}}(\phi)$ cette trace renormalisée (elle est notée $I^{\widetilde{G}}(\phi)$ chez Arthur). On renvoie le lecteur à [Ar5] pour une introduction détaillée.

3.2 Termes géométriques

Le développement géométrique pour la trace renormalisée est donné par l'intégrale du noyau sur la diagonale mais dont on a retranché des contre-termes pour la rendre convergente puis invariante. Il est la somme de deux termes :

$$T^{\widetilde{G}}(\phi) = T_e^{\widetilde{G}}(\phi) + T_{ne}^{\widetilde{G}}(\phi)$$

Le premier terme $T_e^{\widetilde{G}}(\phi)$ est la contribution des éléments elliptiques, le second est la contribution des éléments non elliptiques.

Le terme $T_e^{\widetilde{G}}(\phi)$ est la distribution invariante définie par l'intégrale absolument convergente sur la diagonale de la partie du noyau donnée par la somme sur l'ensemble $\widetilde{G}(F)_e$ des éléments elliptiques dans $\widetilde{G}(F)$:

$$T_e^{\widetilde{G}}(\phi) = \int_{X_G} \left(\int_{\mathfrak{A}_G} \sum_{\delta \in \widetilde{G}(F)_e} \phi(x^{-1} \delta \, z \, x) \ dz \right) \ dx \ .$$

On pose

$$\phi^0(\delta) = \int_{\mathfrak{A}_{\widetilde{G}}} \phi(\delta \, z) \, dz$$

et

$$\mathcal{O}_\delta(\phi) = \int_{I_\delta(\mathbb{A}_F) \backslash G(\mathbb{A}_F)} \phi(x^{-1} \delta \, x) \ d\dot{x}$$

désigne l'intégrale orbitale. Un calcul élémentaire (voir par exemple [Lab3, 4.1]) montre que

Proposition 3.1:
$$T_e^{\widetilde{G}}(\phi) = J(\widetilde{G}) \sum_{\delta\in\widetilde{G}_e} a^{\widetilde{G}}(\delta)\mathcal{O}_\delta(\phi^0)$$
où $\widetilde{G}_e$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison dans $\widetilde{G}(F)_e$. Le nombre $a^{\widetilde{G}}(\delta)$ est défini par
$$a^{\widetilde{G}}(\delta) = \iota(\delta)^{-1}\,\mathrm{vol}\,(\mathfrak{A}_{\widetilde{G}} I_\delta(F)\backslash I_\delta(\mathbb{A}_F))$$
où $\iota(\delta)$ est l'ordre du quotient $G^\delta(F)/I_\delta(F)$; enfin
$$J(\widetilde{G}) = |\det\,(\theta - 1|\mathfrak{a}_G/\mathfrak{a}_{\widetilde{G}})|\ .$$

Dans les exemples qui interviendrons dans la suite, le groupe $\mathfrak{A}_{\widetilde{G}}$ est trivial et comme de plus les centralisateurs sont connexes, on aura donc simplement
$$T_e^{\widetilde{G}}(\phi) = J(\widetilde{G}) \sum_{\delta\in\widetilde{G}_e} \tau(I_\delta)\mathcal{O}_\delta(\phi)\ .$$

On prendra garde que le facteur $J(\widetilde{G})$ n'apparaît pas dans les formules d'Arthur par suite d'un choix légèrement différent de l'opérateur dont on calcule la trace renormalisée. Nous suivons ici les conventions de [KS], [Lab3] et [Lab5].

Le second terme $T_{ne}^{\widetilde{G}}(\phi)$ fait intervenir les avatars invariants des intégrales orbitales pondérées des éléments semi-simples non elliptiques et des variantes d'icelles pour les éléments ayant une composante unipotente non triviale. Nous n'en donnerons pas l'expression ici ; pour son étude nous renvoyons le lecteur à [Ar5] par exemple. Pour les applications que nous avons en vue on choisira des fonctions ϕ telles que ce second terme $T_{ne}^{\widetilde{G}}(\phi)$ soit nul.

3.3 Termes spectraux

L'expression spectrale pour la trace renormalisée comporte une partie discrète et une partie continue
$$T^{\widetilde{G}}(\phi) = T_{disc}^{\widetilde{G}}(\phi) + T_{cont}^{\widetilde{G}}(\phi)\ .$$
Dans les applications que nous avons en vue nous choisirons des fonctions ϕ telles que la partie continue, qui est l'avatar invariant d'une expression faisant intervenir des intégrales de caractères pondérés, sera nulle :
$$T_{cont}^{\widetilde{G}}(\phi) = 0\ .$$

Ici encore on renvoie le lecteur à [Ar5] pour une étude de ces termes.

La partie discrète $T^{\widetilde{G}}_{disc}$ est une distribution qui contient, entre autre, la trace dans le spectre discret.

$$T^{\widetilde{G}}_{G,disc}(\phi) = \text{ trace } \left(\widetilde{\rho}(\phi)|L^2_{disc}(X_G)\right) = \sum_{\widetilde{\pi}\in\Pi_{disc}(\widetilde{G})} m(\widetilde{\pi}) \text{ trace } \widetilde{\pi}(\phi)$$

où $\Pi_{disc}(\widetilde{G})$ est l'ensemble des classes d'équivalence de représentation $\widetilde{\pi}$ de l'espace tordu $\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)$ dont la restriction π à $G(\mathbb{A}_F)$ reste irréductible et qui interviennent dans le spectre discret

$$L^2_{disc}(X_G) \ .$$

En effet, seules les représentations $\widetilde{\pi}$ qui par restriction à $G(\mathbb{A}_F)$ restent irréductibles donnent une contribution non triviale. Enfin $m(\widetilde{\pi})$ est la multiplicité de $\widetilde{\pi}$ dans le spectre discret.

Nous avons omis la sommation partielle – utilisée chez Arthur – suivant les modules des caractères infinitésimaux à l'infini, désormais inutile puisque, grâce à Müller, nous savons que le spectre discret est traçable et donc la série est absolument convergente [Mü]. En fait grâce aux travaux récents de Finis, Lapid et Müller on sait maintenant que le développement spectral tout entier est absolument convergent.

Remarque 3.2: Soit $\widetilde{\pi}$ une représentation de $\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)$ dont la restriction π à $G(\mathbb{A}_F)$ reste irréductible. Si on note $m(\pi)$ la multiplicité de π dans le spectre discret, on a

$$m(\widetilde{\pi}) \leq m(\pi) \ .$$

Comme n'y a pas unicité du prolongement de π à $\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)$ il n'est pas clair à priori que l'on ait l'égalité $m(\widetilde{\pi}) = m(\pi)$ sauf bien entendu si $G = \widetilde{G}$ ou encore si $m(\pi) \leq 1$, ce qui est le cas lorsque $G = \mathbf{G}_n$. On renvoie le lecteur à [Lab3, section 4.4, pages 106-107] pour une discussion de cas plus généraux.

D'autres termes discrets, quoique provenant du spectre continu, peuvent apparaître dans la trace renormalisée ; nous allons les décrire. On note $\mathcal{L}^0$ l'ensemble des sous-groupes de Levi de G contenant le sous-groupe de Levi minimal θ-invariante fixé M_0. On note $W^{\widetilde{G}}$ l'ensemble de Weyl de $\widetilde{G}$ c'est-à-dire $W^G \rtimes \theta$. Soit $M \in \mathcal{L}^0$ un sous-groupe de Levi de G ; on notera $W^{\widetilde{G}}(M)$ le quotient de l'ensemble des $s \in W^{\widetilde{G}}$ tels que $s(M) = M$ par W^M, le groupe de

Weyl de M. On observera que $W^G(M)$ est un groupe. On notera $W^{\widetilde{G}}(M)_{reg}$ le sous-ensemble des s tels que

$$\det\,(s-1|\mathfrak{a}_M/\mathfrak{a}_G)\neq 0\ .$$

On fixe un tel s, et soit Q un sous-groupe parabolique de G, admettant M comme sous-groupe de Levi. Nous allons rappeler la définition de l'opérateur d'entrelacement $\mathbf{M}_{Q|s(Q)}(0)$ et de l'opérateur $\rho_Q(s,0,\phi)$ utilisés par Arthur dans [Ar2, § 4]. Soit φ une fonction sur $G(\mathbb{A}_F)$ invariante à gauche par $Q(F)N(\mathbb{A}_F)$ et telle que pour tout $x\in G(\mathbb{A}_F)$ la fonction

$$m\mapsto\varphi(mx)$$

soit une forme automorphe du spectre discret de M. On pose, avec des notations standard,

$$\varphi_\lambda(x)=e^{<\lambda+r_Q|H_Q(x)>}\varphi(x)$$

où r_Q est la demi-somme des racines positives pour Q. On notera $V_Q(\lambda)$ l'espace des φ_λ. Soit w_s un représentant de s dans $\widetilde{G}(F)$. Par abus de notation on notera encore s l'automorphisme de M défini par w_s. Arthur introduit [Ar2, p 516] un opérateur $\rho_Q(s,\lambda,y)$ qui envoie $V_Q(\lambda)$ dans $V_{s(Q)}(s(\lambda))$:

$$\rho_Q(s,\lambda,y)\varphi_\lambda(x)=\varphi_\lambda(w_s^{-1}x\,y)\ .$$

On définit un opérateur entre $V_Q(\lambda)$ et $V_Q(s(\lambda))$ en le composant avec l'opérateur d'entrelacement usuel $\mathbf{M}_{Q|s(Q)}(s(\lambda))$ (cf. [Ar1, p. 1292]) :

$$\mathbf{M}_{Q|s(Q)}(s(\lambda))\rho_Q(s,\lambda,y)\varphi_\lambda(x)=\int_{N_s(\mathbb{A}_F)}\varphi_\lambda(w_s^{-1}n_s\,x\,y)\,dn_s$$

où

$$N_s=N\cap s(N)\backslash N\ .$$

L'intégrale ne converge que pour λ dans le translaté d'un cône mais admet un prolongement méromorphe qui, d'après [Langlands2], est holomorphe en $\lambda=0$. On obtient ainsi un endomorphisme de $V_Q(0)$ qui, par intégration contre ϕ fournit l'opérateur

$$\mathbf{M}_{Q|s(Q)}(0)\rho_Q(s,0,\phi)\ .$$

On pose

$$T^{\widetilde{G}}_{M,disc}(\phi)=\sum_{s\in W^{\widetilde{G}}(M)_{reg}}|\det\,(s-1|\mathfrak{a}_M/\mathfrak{a}_G)|^{-1}\ \mathrm{trace}\ (\mathbf{M}_{Q|s(Q)}(0)\rho_Q(s,0,\phi))\ .$$

L'énoncé suivant est emprunté à [Ar2, § 4] (voir aussi [Ar5] pages 133 et 237).

Proposition 3.3: La partie discrète de la formule des traces d'Arthur peut s'écrire :

$$T_{disc}^{\widetilde{G}}(\phi) = \sum_{M \in \mathcal{L}^0} \frac{|W^M|}{|W^G|} \, T_{M,disc}^{\widetilde{G}}(\phi)$$

ou si on préfère

$$T_{disc}^{\widetilde{G}}(\phi) = \sum_{M \in \mathcal{L}^0 / W^G} \frac{1}{|W^G(M)|} \, T_{M,disc}^{\widetilde{G}}(\phi)$$

où la somme porte sur un ensemble de représentants des orbites de W^G dans $\mathcal{L}^0$.

Comme pour le développement géométrique, notre formule et celle d'Arthur, diffèrent par le facteur $J(\widetilde{G})$. En effet, le déterminant de $(s-1)$ est calculé chez Arthur sur le quotient $\mathfrak{a}_M/\mathfrak{a}_{\widetilde{G}}$ alors que nous le calculons sur le quotient $\mathfrak{a}_M/\mathfrak{a}_G$.

3.4 Normalisation d'Arthur

Soit π^M une représentation automorphe de M appartenant au spectre discret. Soit comme ci-dessus un sous-groupe parabolique Q de Levi M et de radical unipotent N. On notera $V_Q(\lambda, \pi^M)$ le sous-espace de $V_Q(\lambda)$ formé des fonctions φ_λ où φ est telle que pour tout $x \in G(\mathbb{A}_F)$ la fonction

$$m \mapsto \varphi(mx)$$

soit une forme automorphe de l'espace de π^M. Supposons que l'opérateur

$$\mathbf{M}_{Q|s(Q)}(0)\rho_Q(s,0,y)$$

laisse stable $V_Q(0,\pi^M)$. C'est le cas si et seulement si π^M est s-invariante, c'est-à-dire que l'automorphisme s préserve l'espace de π^M et

$$s(\pi^M) \simeq \pi^M \ .$$

En d'autres termes, π^M se prolonge, au moyen du prolongement automorphe, en une représentation $\widetilde{\pi^M}$ de $\widetilde{M}_s(\mathbb{A}_F)$ où $\widetilde{M}_s$ est l'espace tordu engendré par M et w_s. Seules de telles représentations peuvent fournir une contribution non triviale à la formule des traces. On notera alors

$$I_Q(\widetilde{\pi^M})(y)$$

la restriction de l'opérateur ci-dessus à $V_Q(0,\pi^M)$. Nous dirons que la représentation $I_Q(\widetilde{\pi^M})$ de $\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)$ ainsi obtenue est définie au moyen de la normalisation d'Arthur.

Il convient parfois de remplacer l'opérateur d'entrelacement qui intervient dans la définition de l'opérateur $I_Q(\widetilde{\pi^M})(y)$ par un opérateur normalisé de sorte que

$$I_Q(\widetilde{\pi^M})(y) = n(\widetilde{\pi^M})R_Q(\widetilde{\pi^M})(y)$$

où $n(\widetilde{\pi^M})$ est un facteur de normalisation. (C'est nécessaire par exemple si on souhaite utiliser des opérateurs locaux satisfaisant de bonnes équations fonctionnelles ; voir par exemple [Ar4,§2]). Ce qui précède nous permet de reformuler la proposition 3.3 :

Proposition 3.4: La partie discrète du développement spectral de la formule des traces est donnée par

$$T^{\widetilde{G}}_{disc}(\phi) = \sum_{M\in\mathcal{L}^0/W^G}\ \sum_{s\in W^L(M)_{reg}}\ \sum_{\widetilde{\pi^M}\in\Pi_{disc}(\widetilde{M}_s)} a^{\widetilde{G}}_{disc,\widetilde{M}_s}(\widetilde{\pi^M})\ \text{trace}\ R_Q(\widetilde{\pi^M})(\phi)$$

avec

$$a^{\widetilde{G}}_{disc,\widetilde{M}_s}(\widetilde{\pi^M}) = \frac{m(\widetilde{\pi^M})\,n(\widetilde{\pi^M})}{|\det\ (s-1|\mathfrak{a}_M/\mathfrak{a}_G)|\ |W^G(M)|}$$

où $\Pi_{disc}(\widetilde{M}_s)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de représentations de l'espace tordu adèlique

$$\widetilde{M}_s(\mathbb{A}_F)$$

qui restent irréductibles par restriction à $M(\mathbb{A}_F)$ et $m(\widetilde{\pi^M})$ est la multiplicité de $\widetilde{\pi^M}$ dans le spectre discret de M.

On observera qu'en général les coefficients $a^{\widetilde{G}}_{disc,\widetilde{M}_s}$ ne sont ni entiers ni même positifs : par exemple pour

$$\widetilde{G} = G = GL(2)$$

et M le sous-groupe diagonal, un coefficient $-1/4$ apparait ainsi dans un terme spectral de la formule des traces classique.

Pour la formule des traces sur $\widetilde{G} = G$, de tels termes pour $M \neq G$ seront nuls dans nos applications puisque l'on ne considérera comme fonctions à l'infini que des pseudo-coefficients de séries discrètes (cf.[Ar3] p.268). Mais pour $\widetilde{G} = \widetilde{\mathbf{G}}_n$ ces termes donneront, même dans le cas "simple" (au sens de la section 3.9), des contributions non triviales.

3.5 Normalisation automorphe et terme constant

La représentation de $G(\mathbb{A}_F)$ dans $V_Q(\lambda, \pi^M)$ peut aussi se réaliser comme représentation automorphe au moyen de séries d'Eisenstein : pour φ comme ci-dessus on pose

$$E(x, \varphi, \lambda) = \sum_{\gamma \in Q(F)\backslash G(F)} \varphi_\lambda(\gamma x)$$

la série ne convergeant que pour λ dans le translaté d'un cône et on définit

$$E(x, \varphi) = E(x, \varphi, 0)$$

par prolongement analytique, ce qui a un sens car, d'après [Langlands2] les séries d'Eisenstein n'ont pas de singularités pour les valeurs imaginaires pures de λ. Comme dans la section 3.1, on prolonge la représentation régulière gauche dans l'espace des séries d'Eisenstein en posant pour $y \in \widetilde{G}(\mathbb{A}_F)$

$$\widetilde{\rho}(y)E(x, \varphi, \lambda) = E(w^{-1}\, x\, y, \varphi, \lambda)$$

où w peut être choisi arbitrairement dans $\widetilde{G}(F)$ compte tenu de l'invariance à gauche par $G(F)$ de la série d'Eisenstein (w était noté δ_0 dans 3.1). C'est ce que nous appelons la normalisation automorphe. On a, pour λ dans le cône de convergence

$$\widetilde{\rho}(y)E(x, \varphi, \lambda) = \sum_{\gamma \in Q(F)\backslash G(F)} \varphi_\lambda(\gamma w^{-1} x y)$$

soit encore

$$\widetilde{\rho}(y)E(x, \varphi, \lambda) = \sum_{\xi \in L(F)/Q(F)} \varphi_\lambda(\xi^{-1} x y)$$

Supposons maintenant que π^M est une représentation automorphe cuspidale pour M. Un calcul classique (voir par exemple [Langlands1, Lemma 3 p. 237]) montre que le terme constant de E le long de Q

$$C_Q E(x, \varphi, \lambda) = \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)} E(nx, \varphi, \lambda) dn$$

est égal (pour λ dans le cône de convergence) à :

$$\sum_{w_i \in W^G(M)} \int_{N_i(\mathbb{A}_F)} \varphi_\lambda(w_i^{-1} n_i x y)\, dn_i$$

où
$$N_i = N \cap w_i^{-1} N w_i \backslash N \ .$$
Maintenant, par prolongement analytique cette expression a un sens et est encore vraie pour $\lambda = 0$. Le même calcul monte que le terme constant de $\widetilde{\rho}(y)E$:
$$C_Q \widetilde{\rho}(y) E(x, \varphi, \lambda) = \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)} \widetilde{\rho}(y) E(nx, \varphi, \lambda) dn$$
est égal à :
$$\sum_{w_j \in W^L(M)} \int_{N_j(\mathbb{A}_F)} \varphi_\lambda(w_j^{-1} n_j x y)\, dn_s$$
où N_j est défini au moyen de w_j comme ci-dessus. Supposons maintenant de plus que M est tel que le groupe $W^G(M)$ soit trivial. Sous ces hypothèses l'expression pour le terme constant le long de Q de E se réduit à un seul terme :
$$C_Q E(x, \varphi, \lambda) = \varphi_\lambda(x) \ .$$
Dans ce cas $W^{\widetilde{G}}(M)$ est aussi un singleton et l'expression du terme constant de $\widetilde{\rho}(y)E$ se réduit au terme relatif à w_s :
$$C_Q \widetilde{\rho}(y) E(x, \varphi, \lambda) = \int_{N_s(\mathbb{A}_F)} \varphi_\lambda(w_s^{-1} n_s x y)\, dn_s$$
qui est, par définition
$$I_Q(\widetilde{\pi^M})(y) \varphi_\lambda(x) \ .$$
En résumé on a la

Proposition 3.5: Supposons M tel que le groupe $W^G(M)$ soit trivial alors, si π^M est cuspidale, on a dans le sous-espace des séries d'Eisenstein associées à σ :
$$C_Q \circ \widetilde{\rho}(y) = I_Q(\widetilde{\pi^M})(y) \circ C_Q \ .$$
En d'autres termes, la normalisation d'Arthur est induite, via le terme constant, par la normalisation automorphe.

3.6 Normalisation de Whittaker

Supposons maintenant G quasi-déployé sur F et muni d'un épinglage. Soit N_0 le radical unipotent du sous-groupe de Borel de l'épinglage. Considérons un caractère ψ de $N_0(F)\backslash N_0(\mathbb{A}_F)$, en position générale. On appelle représentations générique une représentation (π, V) admettant une fonctionnelle de Whittaker c'est-à-dire une forme linéaire non nulle $\Lambda : V \to \mathbb{C}$ telle que pour $v \in V$ et $n \in N_0(\mathbb{A}_F)$ on ait

$$\Lambda(\pi(n)v) = \psi(n)\Lambda(v) \ .$$

Une fonctionnelle globale est un produit de fonctionnelles locales. On sait qu'une telle fonctionnelle, si elle existe, est unique, localement partout, à un scalaire non nul près. Lorsque $G = GL(n)$, qui est le seul cas dont nous aurons besoin, ceci est dû, independemment, à Piateskii-Shapiro et Shalika [Shal]. Le cas général est dû à Rodier [Rod].

Supposons donnée une fonctionnelle de Whittaker. Si θ est un automorphisme de G qui préserve une représentation irréductible (π, V) du groupe $G(\mathbb{A}_F)$ il existe une opérateur $I_\theta \in GL(V)$ défini à un scalaire près tel que

$$I_\theta \ \pi(x) = \pi(\theta(x))\, I_\theta \ .$$

Compte tenu de l'unicité il existe une constante c_θ telle que

$$\Lambda \circ I_\theta = c_\theta \Lambda$$

On appelle normalisation de Whittaker l'opérateur I_θ tel que $c_\theta = 1$.

L'intégrale de Whittaker (appelée aussi coefficient de Fourier)

$$W(x, E(\bullet, \varphi)) = \int_{N_0(F)\backslash N_0(\mathbb{A}_F)} E(nx, \varphi)\psi(n)\, dn$$

fournit, si elle n'est pas identiquement nulle, une fonctionnelle de Whittaker sur l'espace de la représentation engendrée par les séries d'Eisenstein $E(\bullet, \varphi)$ lorsque φ varie en posant

$$\Lambda(E(\bullet, \varphi)) = W(e, E(\bullet, \varphi))$$

où e est l'élément neutre de $G(\mathbb{A}_F)$. Supposons de plus que l'automorphisme θ préserve l'épinglage. On notera w_0 (plutôt que δ_0) un élément de $\widetilde{G}(F)$

qui le représente. Supposons maintenant que ψ est θ-invariant. On fait agir $y \in \widetilde{G}(\mathbb{A}_F)$ sur la fonction W par

$$\widetilde{R}(y)W(x, E(\bullet, \varphi)) = W(w_0^{-1}\, xy, E(\bullet, \varphi))$$

ce qui, compte tenu de la θ-invariance de N et ψ, s'écrit encore

$$\int_{N_0(F)\backslash N_0(\mathbb{A}_F)} E(w_0^{-1}\, nxy, \varphi)\psi(n)\, dn = W(x, \widetilde{\rho}(y)E(\bullet, \varphi))$$

c'est à dire que l'on a

$$\widetilde{R}(y)W(x, E(\bullet, \varphi)) = W(x, \widetilde{\rho}(y)E(\bullet, \varphi)) \ .$$

On observe que

$$\widetilde{R}(w_0)W(e, E(\bullet, \varphi)) = W(e, E(\bullet, \varphi))$$

et donc

$$\Lambda(\widetilde{\rho}(w_0)E(\bullet, \varphi)) = \Lambda(E(\bullet, \varphi))$$

Ceci montre que la normalisation automorphe induit la normalisation de Whittaker globale, si la fonctionnelle définie par l'intégrale de Whittaker est non nulle.

On définit de manière analogue, localement partout, la normalisation de Whittaker. Aux places non ramifiées la normalisation de Whittaker donne un opérateur qui laisse fixe le vecteur non ramifié ; on en déduit que la normalisation globale est le produit des normalisations locales. En résumé on a la proposition suivante :

Proposition 3.6: Soit π^M une représentation automorphe cuspidale pour M, stable par s. Supposons que M est tel que $W^G(M)$ soit trivial. Supposons de plus que l'intégrale de Whittaker n'est pas identiquement nulle. Alors, la normalisation d'Arthur de l'action de $\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)$ (définie au moyen de l'opérateur d'entrelacement non normalisé) dans $V_Q(\pi^M)$ est compatible avec la normalisation de Whittaker localement partout.

3.7 Un cas particulier

Proposition 3.7: Lorsque $\widetilde{G} = \widetilde{\mathbf{G}}_{n+1}$ avec $n \geq 2$, la somme des contributions, à la partie discrète de la formule des traces, des sous-groupes de Levi M isomorphes à $\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_n$ est

$$\frac{1}{2} \sum_{\widetilde{\pi^M} \in \Pi_{disc}(\widetilde{M}_s)} \text{trace } I_Q(\widetilde{\pi^M})(\phi)$$

où $s = \theta_M$ et la somme porte sur les $\widetilde{\pi^M}$ dans le spectre discret de M, soit encore

$$\frac{1}{2} \sum_{\widetilde{\pi^M} \in \Pi_{disc}(\widetilde{M}_s)} n(\widetilde{\pi^M}) \text{ trace } R_Q(\widetilde{\pi^M})(\phi) \ .$$

Si R_Q est défini au moyen de la normalisation de Langlands-Shahidi [Shah] pour les opérateurs d'entrelacement et si de plus π^M est cuspidale on a

$$n(\widetilde{\pi^M}) = 1 \ .$$

Enfin la normalisation d'Arthur coïncide avec la normalisation de Whittaker localement partout.

Preuve: Tout d'abord on utilise que pour les groupes du type $GL(n)$ on dispose du théorème de multiplicité un pour le spectre discret. C'est classique pour le spectre cuspidal [Shal] et cela s'étend à tout le spectre discret grâce à Mœglin et Waldspurger [MW]. Par ailleurs, dans notre cas

$$W^{\widetilde{G}}(M) = W^{\widetilde{G}}(M)_{reg}$$

est réduit à un élément s : la classe de θ_M^*, et on a

$$|\det\,(s-1|\mathfrak{a}_M/\mathfrak{a}_G)| = 2 \ .$$

De plus, si

$$\pi^M = \tau \boxplus \chi$$

avec τ une représentation cuspidale de $\mathbf{G}_n$ et χ un Größencharacter pour E, le facteur de normalisation de Langlands-Shahidi $n(\widetilde{\pi^M})$ est la valeur en $t = 0$ de

$$\frac{L(\tau \otimes \chi^{-1}, 1-t)}{L(\tau \otimes \chi^{-1}, 1+t)}$$

où L est la fonction L de Godement-Jacquet pour $GL(n)$. Comme τ est cuspidale et $n \geq 2$ la fonction L est holomorphe partout et on a

$$n(\widetilde{\pi^M}) = 1 \ .$$

La dernière assertion résulte de 3.5 combinée avec la proposition 3.6 : il convient pour l'appliquer de vérifier que l'intégrale de Whittaker est non identiquement nulle. Dans notre cas cette intégrale a été calculée par Shahidi [Shah, p. 352] : elle s'exprime au moyen de l'inverse de la fonction L ci-dessus. Dire qu'elle est identiquement nulle équivaut à dire que la fonction L a un pôle en $t = 0$; mais comme déjà observé τ est cuspidale et comme $n \geq 2$ la fonction L est une fonction entière.

□

3.8 Un lemme

Supposons que

$$\widetilde{G} = \widetilde{\mathbf{G}}_n = \mathbf{G}_n \rtimes \theta_n$$

et considérons un sous-groupe de Levi de la forme

$$M = \mathbf{G}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{G}_{n_r}$$

On pose

$$\theta_M = \theta_{n_1} \times \cdots \times \theta_{n_r}$$

Lemme 3.8: Soit $s \in W^{\widetilde{\mathbf{G}}}(M)_{reg}$ et soit

$$\pi^M = \pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_r$$

une représentation de M telle que $s(\pi^M) \simeq \pi^M$ alors

$$\theta_M(\pi^M) \simeq \pi^M$$

Preuve: L'action de s sur $\mathfrak{a}_M/\mathfrak{a}_G$ est le produit de l'action induite par un élément w du groupe de Weyl de $\mathbf{G}_n$ et de la symétrie $a \mapsto -a$ qui est induite par θ_M. Pour que s soit régulier il est nécessaire que -1 ne soit pas valeur propre de l'action induite par w. Mais w induit une permutation des facteurs de π. Pour que la valeur propre -1 n'apparaisse pas il est nécessaire que cette permutation ne comporte que des cycle de longueur impaire. Comme par ailleurs θ_M est d'ordre 2, et donc d'ordre premier à l'ordre des cycles, la condition s régulier impose que pour chaque facteur π_i on ait

$$\theta_{n_i}(\pi_i) \simeq \pi_i$$

$\square$

3.9 Formule des traces simple

Soit v une place de F. On dit qu'une fonction $\phi_v \in \mathcal{C}_c^\infty(\widetilde{G}(F_v))$ est cuspidale si les intégrales orbitales $\mathcal{O}_\delta(\phi_v)$ des éléments $\delta \in \widetilde{G}(F_v)$ semi-simples réguliers et non-elliptiques sont nulles.

On dira que, pour un choix convenable de la fonction-test ϕ, la formule des traces est simple si seuls apparaissent des termes elliptiques dans le développement géométrique et des termes discrets dans le développement spectral. Pour cela nous ferons appel à des fonctions cuspidales aux places réelles.

La première apparition du principe qui gouverne les propositions ci-dessous (empruntées pour l'essentiel à Arthur [Ar2, Theorem 7.1]) se trouve dans le chapitre 16 de Jacquet-Langlands. Donnons tout d'abord la proposition spectrale.

Proposition 3.9: Soit F est un corps totalement réel. Soit ϕ_∞ une fonction produit de fonctions cuspidales en chaque place réelle. On a alors

$$T^{\widetilde{G}}(\phi) = T^{\widetilde{G}}_{disc}(\phi) \ .$$

Preuve: La décomposition spectrale de la formule des traces invariante d'Arthur ne comporte que des termes discrets dès que ϕ est cuspidale en une place [Ar2, Theorem 7.1.(a)].

$\square$

Voici maintenant la proposition géométrique.

Proposition 3.10: Soit F est un corps totalement réel de degré ≥ 2. Supposons que ϕ_∞ est un produit de fonctions cuspidales en chaque place réelle. Si de plus en une place finie v la fonction ϕ_v est à support régulier on a alors

$$T^{\widetilde{G}}(\phi) = T^{\widetilde{G}}_e(\phi)$$

Preuve: Les contributions non semi-simples sont éliminées par la condition de support régulier en une place finie. Dans ces conditions, l'annulation de $T_{ne}^{\widetilde{G}}(\phi)$ lorsque ϕ est cuspidale en deux places est un théorème d'Arthur [Ar2, Theorem 7.1.(b)]

$\square$

Corollaire 3.11: Si F est un corps totalement réel de degré ≥ 2 avec ϕ comme dans la proposition 3.10 ci-dessus on a

$$T^{\widetilde{G}}(\phi) = T_e^{\widetilde{G}}(\phi) = T_{disc}^{\widetilde{G}}(\phi) \ .$$

Remarque 3.12: Dans le cas $F = \mathbb{Q}$ avec ϕ_∞ cuspidale et ϕ_v à support régulier en une place finie on aurait

$$T^{\widetilde{G}}(\phi) = T_e^{\widetilde{G}}(\phi) + T_{ss}^{\widetilde{G}}(\phi) = T_{disc}^{\widetilde{G}}(\phi)$$

où $T_{ss}^{\widetilde{G}}(\phi)$ est la contribution des éléments semi-simples non elliptiques. Cette distribution est, dans ce cas, une combinaison linéaire de termes qui sont le produit des avatars invariants des intégrales orbitales pondérées à la place réelle et des intégrales orbitales ordinaires aux autres places.

4 Endoscopie

Cette section contient des rappels sur l'endoscopie en général. Nous ferons également le calcul des divers objets endoscopiques qui interviendront dans nos application (section 5).

4.1 Préliminaires cohomologiques

Pour la cohomologie galoisienne nous utiliserons les notations classiques : si A est un groupe algébrique défini sur un corps F on pose

$$\mathbf{H}^*(F, A) := \mathbf{H}^*(\mathrm{Gal}(\overline{F}/F), A(\overline{F}))$$

et suivant les notations introduites dans [KS] et reprises dans [LBC] et [Lab5] on pose si F est un corps global

$$\mathbf{H}^*(\mathbb{A}_F/F, A) := \mathbf{H}^*(\mathrm{Gal}(\overline{F}/F), A(\overline{\mathbb{A}_F})/A(\overline{F})) \ .$$

Pour le calcul des caractères et des groupes endoscopiques nous utiliserons les groupes de cohomologie abélianisée introduits dans le livre [Lab3], auquel nous renvoyons pour leur définition et leurs propriétés (voir aussi [Intro]). Il nous suffira, pour les exemples traités ici, de rappeler que si un groupe réductif connexe A admet un groupe dérivé A_{der} simplement connexe alors sa cohomologie abélianisée n'est autre que la cohomologie de son cocentre C_A (le tore quotient de A par son groupe dérivé A_{der}) :

$$\mathbf{H}^i_{ab}(*, A) \simeq \mathbf{H}^i(*, C_A)$$

Plus généralement si $A \to B$ est un morphisme entre deux groupes réductifs connexes dont les groupes dérivés sont simplement connexes et dont les cocentres sont C_A et C_B, la cohomologie abélianisée du complexe $[A \to B]$ peut se calculer au moyen de l'hypercohomologie usuelle du complexe de tores $C_A \to C_B$:

$$\mathbf{H}^i_{ab}(*, A \to B) \simeq \mathbf{H}^i(*, C_A \to C_B) \ .$$

Soient F un corps totalement réel, E/F une extension quadratique totalement imaginaire et $\mathbf{U}_n$ un groupe unitaire forme intérieure de $\mathbf{U}^*_n$ le groupe unitaire quasi-déployé de dimension n relatif à E/F. On a en particulier

$$\mathbf{H}^i_{ab}(*, \mathbf{U}_n) = \mathbf{H}^i(*, \mathbf{U}_1) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{H}^i_{ab}(*, \mathbf{G}_n) = \mathbf{H}^i(*, \mathbf{G}_1) \ .$$

Il sera utile d'observer que, par l'isomorphisme de Tate Nakayama, on a

$$\mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F/F, \mathbf{U}_1) = \hat{\mathbf{H}}^{-1}(\mathrm{Gal}(E/F), \mathbb{Z})$$

(où $\hat{\mathbf{H}}^*$ désigne le groupe de cohomologie de Tate) et

$$\hat{\mathbf{H}}^{-1}(\mathrm{Gal}(E/F), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

puisque l'action du groupe de Galois de E/F sur $\mathbb{Z}$ est ici l'action non triviale. On a donc

$$\mathbf{H}^1_{ab}(\mathbb{A}_F/F, \mathbf{U}_n) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

De même, si F_v est un corps local tel que $E_v = E \otimes F_v$ soit un corps on a

$$\mathbf{H}^1_{ab}(F_v, \mathbf{U}_n) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

On en déduit que

$$\ker^1_{ab}(F, \mathbf{U}_n) = \ker^1(F, \mathbf{U}_1) = 1$$

où par définition

$$\ker^1_*(F, G) = \ker[H^1_*(F, G) \to H^1_*(\mathbb{A}_F, G)] \ .$$

4.2 Caractères et groupes endoscopiques

Soit $\delta \in \widetilde{G}(F)$ un élément elliptique et soit I_δ son centralisateur stable ; les caractères endoscopiques relatifs à δ sont les caractères, notés κ, du groupe d'hypercohomologie abélianisé adèlique

$$\mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F, I_\delta \to G)$$

triviaux sur l'image de $\mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F, G)$. Un tel couple (δ, κ) est appelé paire endoscopique. Une paire endoscopique détermine un espace endoscopique elliptique (cf. [Lab5, IV.3]). Le choix d'un facteur de transfert complète la donnée endoscopique. On supposera, pour simplifier l'exposé, que les espaces endoscopiques sont simplement les groupes endoscopiques et qu'il n'est pas nécessaire de faire appel à des extensions centrales de ces groupes pour définir le transfert. Ce sera le cas dans nos applications.

On dira que la paire (δ, κ) est dominée par (δ_0, κ_0) si, à conjugaison stable près, I_δ est un sous groupe de I_{δ_0} et si κ est induit par κ_0 via l'homomorphisme

$$\mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F, I_\delta \to G) \to \mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F, I_{\delta_0} \to G)$$

On dira que (δ, κ) est (δ', κ') sont équivalentes si il existe une paire (δ_0, κ_0) qui les domine. Deux paires équivalentes définissent le même groupe endoscopique. Pour déterminer tous les groupes endoscopiques, il suffit de considérer les éléments réguliers ; ils définissent les paires minimales. On pourrait aussi se contenter de considérer les paires maximales. Le groupe endoscopique principal est celui associé aux paires (δ, κ) où κ est trivial.

Dans les exemples qui nous intéressent l'équivalence entre paires suffit à déterminer l'équivalence entre donnée endoscopiques : dans nos exemples toute paire endoscopique (δ_0, κ_0) maximale est telle que le centralisateur de δ_0 est une forme intérieure du groupe endoscopique (quasi-déployé par définition) associé à la classe de (δ_0, κ_0) ; cette description très simple n'est malheureusement pas valable en général. Nous allons maintenant expliciter ces groupes endoscopiques en invoquant, comme il est classique, le calcul de la cohomologie galoisienne au moyen de l'isomorphisme de Tate-Nakayama. Dans toute la suite de ce paragraphe, F est un corps totalement réel, E/F est une extension quadratique totalement imaginaire.

Considérons tout d'abord le cas du changement de base c'est-à-dire le cas où $\widetilde{G} = \widetilde{\mathbf{G}}_n$. Soit $\delta \in \widetilde{\mathbf{G}}_n(F)$ un éléments elliptique. Soit I_δ son centralisateur dans $\mathbf{G}_n$. Les caractères endoscopiques, relatifs à δ sont par définition les caractères de

$$\mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F, I_\delta \to \mathbf{G}_n)$$

triviaux sur l'image de $\mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F, \mathbf{G}_n)$. Mais on a une suite exacte

$$\mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F, \mathbf{G}_n) \to \mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F, I_\delta \to \mathbf{G}_n) \to \mathbf{H}^1_{ab}(\mathbb{A}_F/F, I_\delta) \to 1$$

et une application surjective

$$\mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F, \mathbf{G}_n) \to \mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F, \mathbf{G}_n) \to 1$$

Le groupe des caractères endoscopiques est donc le dual de Pontryagin du groupe $\mathbf{H}^1_{ab}(\mathbb{A}_F/F, I_\delta)$. Pour simplifier la discussion supposons que δ est régulier de sorte que I_δ est un tore anisotrope. Compte tenu de la suite spectrale de Hochschild-Serre, le théorème 90 de Hilbert montre que

$$\mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F/F, I_\delta) = \mathbf{H}^1(\mathrm{Gal}(E/F), I_\delta(\mathbb{A}_E)/I_\delta(E))$$

et en particulier c'est un 2-groupe. Le groupe endoscopique associé à un caractère κ de ce groupe de cohomologie admet pour tore maximal un tore isomorphe à I_δ et un système de coracines défini au moyen des δ-orbites de coracines pour $\widetilde{G}$ sur lesquelles κ est trivial via l'isomorphisme de Tate-Nakayama (cf. [Lab5, II.4 et IV.3]). Il est plus classique de le formuler comme suit : par dualité de Tate Nakayama un caractère κ correspond à un élément

$$s \in GL(n, \mathbb{C}),$$

avec $s^2 = 1$. Soit p le nombre de $+1$ et q le nombre de -1 comme valeurs propres de s. Le groupe endoscopique H associé à κ a pour groupe dual $\hat{H}$ la composante neutre du centralisateur de s, et donc

$$\hat{H} \simeq GL(p, \mathbb{C}) \times GL(q, \mathbb{C})$$

avec $p + q = n$ et, compte tenu de l'action de Galois, on a

$$H \simeq \mathbf{U}^*_p \times \mathbf{U}^*_q .$$

Dans le cas particulier du tore $I_\delta \simeq (\mathbf{U}_1)^n$ tous les couples (p, q), et donc tous les groupes $\mathbf{U}^*_p \times \mathbf{U}^*_q$, apparaissent comme groupes endoscopiques.

On prendra garde que les éléments s et $-s$ correspondent à des caractères endoscopiques inéquivalents si $p \neq q$. Ils définissent des groupes endoscopiques isomorphes mais les facteurs de transfert seront distincts (voir par exemple [HL] pour la discussion de $s = \pm 1$ et [Rog] pour le cas général, du point de vue plongements de L-groupe). On en déduit que lorsque $\widetilde{G} = \widetilde{\mathbf{G}}_n$ les classes d'équivalence de données endoscopiques sont en bijection avec l'ensemble des couples (p, q) avec $p + q = n$.

Traitons maintenant le cas de l'endoscopie ordinaire pour les groupes unitaires. Soit $\delta \in \mathbf{U}_n(F)$ elliptique et soit I_δ son centralisateur. Les caractères endoscopiques relatifs à δ sont, par définition, les caractères du groupe

$$\mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F, I_\delta \to \mathbf{U}_n)$$

triviaux sur l'image de $\mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F, \mathbf{U}_n)$ mais on a une suite exacte

$$\mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F, \mathbf{U}_n) \to \mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F, I_\delta \to \mathbf{U}_n) \to \mathbf{H}^1_{ab}(\mathbb{A}_F/F, I_\delta) \to \mathbf{H}^1_{ab}(\mathbb{A}_F/F, \mathbf{U}_n)$$

et compte tenu de ce que

$$\ker^1_{ab}(F, \mathbf{U}_n) = \ker^1(F, \mathbf{U}_1) = 1$$

on a une application surjective

$$\mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F, \mathbf{U}_n) \to \mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F, \mathbf{U}_n) \to 1$$

Les caractères endoscopiques relatifs à I_δ sont donc les caractères du groupe

$$\ker[\mathbf{H}^1_{ab}(\mathbb{A}_F/F, I_\delta) \to \mathbf{H}^1_{ab}(\mathbb{A}_F/F, \mathbf{U}_n)] \ .$$

On a vu plus haut que

$$\mathbf{H}^1_{ab}(\mathbb{A}_F/F, \mathbf{U}_n) = \mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F/F, \mathbf{U}_1) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ .$$

Donc, ici encore un caractère endoscopique κ correspond à un $s \in GL(n, \mathbb{C})$ d'ordre 2 et les groupes endoscopiques sont de la forme $H = \mathbf{U}^*_p \times \mathbf{U}^*_q$, mais cette fois les éléments s et $-s$ correspondent au même caractère endoscopique. On en déduit que lorsque $\widetilde{G} = \mathbf{U}_n$ les classes d'équivalence de données endoscopiques sont en bijection avec l'ensemble des couples (p, q) avec $p + q = n$ et $p \geq q$.

4.3 κ-intégrales orbitales

Dans les exemples qui nous préoccupent la conjugaison stable pour des éléments semi-simples est la conjugaison sur la clôture algébrique. Pour le cas général on renvoie le lecteur à [Lab5]. Si $\widetilde{G}$ est un espace tordu sous un groupe réductif connexe G et $\delta \in \widetilde{G}(F)$ un élément semi-simple rationnel son intégrale orbitale stable est définie par

$$\mathcal{SO}_\delta(\phi) = \int_{(I_\delta\backslash G)(\mathbb{A}_F)} e(x^{-1}I_\delta\, x)\phi(x^{-1}\delta\, x)\, d\dot{x}$$

où $e(x^{-1}I_\delta\, x)$ est le signe de Kottwitz. Ce signe vaut 1 pour les éléments réguliers. Plus généralement, soit κ un caractère endoscopique relatif à δ ; on définit une fonction sur l'ensemble

$$(I_\delta\backslash G)(\mathbb{A}_F) = \mathbf{H}^0(\mathbb{A}_F, I_\delta \to G)$$

en composant κ avec le morphisme naturel

$$\mathbf{H}^0(\mathbb{A}_F, I_\delta \to G) \to \mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F, I_\delta \to G)\ .$$

On note encore κ ce composé et on pose

$$\mathcal{O}^\kappa_\delta(\phi) = \int_{(I_\delta\backslash G)(\mathbb{A}_F)} \kappa(x)e(x^{-1}I_\delta\, x)\phi(x^{-1}\delta\, x)\, d\dot{x}\ .$$

4.4 Norme

Le transfert repose sur la notion de norme entre classes de conjugaisons semi-simples dans $\widetilde{G}$ et classes de conjugaisons stables d'un groupe endoscopique H. Nous allons en rappeler la définition pour les cas utilisés dans la suite. Dans les cas qui nous préoccupent ici, les définitions sont simples car, contrairement au cas général, on peut identifier H à un sous groupe de $\mathbf{U}^*_n$, qui est le groupe endoscopique principal, qui est lui même un sous groupe de $\mathbf{G}_n$ (voir §4.2), et de plus, les groupes dérivés étant simplement connexes, les centralisateurs des éléments semi-simples sont connexes. On renvoie le lecteur à [KS] et [Lab5] pour le cas général. Nous définirons en même temps la notion d'élément $\widetilde{G}$-H-régulier.

Considérons tout d'abord le cas $\widetilde{G} = G = \mathbf{U}$ où $\mathbf{U}$ est une forme intérieure d'un groupe unitaire quasi-déployé $\mathbf{U}^*$. Notons

$$\psi : \mathbf{U} \to \mathbf{U}^*$$

un isomorphisme sur la clôture algébrique. Soit H un groupe endoscopique de $\mathbf{U}$. On note φ un plongement

$$\varphi : H \to \mathbf{U}^*\ .$$

Soit $\gamma \in H$ semi-simple et $\delta^* = \varphi(\gamma)$; on dira que γ est G-H-régulier si I_γ, le centralisateur de γ dans H, et I_{δ^*}, le centralsiateur de δ^* dans $\mathbf{G}$, sont isomorphes (sur la clôture algébrique). On dira qu'un élément elliptique $\gamma \in H(F)$ est une norme de $\delta \in \mathbf{U}(F)$ si $\delta^* = \varphi(\gamma)$ est conjugué à $\psi(\delta)$ dans $\mathbf{U}^*$ sur la clôture algébrique et si il existe un caractère endoscopique κ relatif à δ tel que H soit associé à (δ, κ).

Passons maintenant au cas $\widetilde{G} = \widetilde{\mathbf{G}}$. On remarquera d'abord que pour $\delta = x\delta_0 \in \widetilde{\mathbf{G}}$ on a $\delta^2 = x\theta(x) \in \mathbf{G}$. Soit H un groupe endoscopique pour $\widetilde{\mathbf{G}}$. On note φ un plongement

$$\varphi : H \to \mathbf{U}^* \subset \mathbf{G} \ .$$

On dira qu'un élément semi-simple $\gamma \in H$ est $\widetilde{G}$-H-régulier s'il existe un élément $\delta^* \in \widetilde{\mathbf{G}}$ tel que $\varphi(\gamma) = (\delta^*)^2$ et tel que I_γ et I_{δ^*} soient isomorphes (sur la clôture algébrique). On dira qu'un élément elliptique $\gamma \in H(F)$ est une norme de $\delta \in \widetilde{\mathbf{G}}(F)$ si $\varphi(\gamma)$ est conjugué sur la clôture algébrique à δ^2 dans $\mathbf{G}$ et si il existe un caractère endoscopique κ relatif à δ tel que H soit associé à κ.

Pour l'endoscopie ordinaire et pour le changement de base qui sont les cas qui nous préoccupent ici, l'existence d'une norme (γ, H) pour tout couple (δ, κ) repose sur un résultat ancien de Steinberg généralisé par Kottwitz et on montre que I_γ est une forme intérieure de I_δ. Ceci est établi dans [K1, lemma 5.8] lorsque κ est trivial c'est-à-dire lorsque $H = \mathbf{U}^*$. Pour le cas général il convient d'observer que les racines de $\mathbf{U}$, pour un tore contenant $\phi(\gamma)$, et pour lesquelles $\phi(\gamma)^\alpha = 1$ correspondent à des coracines sur lesquelles κ est trivial et ce sont donc des racines de $\phi(H)$; il s'en suit que le centralisateur de γ dans H et de $\phi(\gamma)$ dans $\mathbf{U}$ sont isomorphes. En particulier, si $\gamma \in H(F)$ est une norme d'un élément semi-simple de $\widetilde{G}$ il est $\widetilde{G}$-H-régulier.

Remarque 4.1: Le prototype des éléments qui ne sont pas $\widetilde{G}$-H-réguliers est fourni par l'exemple suivant : supposons que $\widetilde{G} = G$ et que H soit associé à un caractère endoscopique non trivial ; en particulier $H \neq G$. Dans ce cas, l'élément neutre $1 \in H(F)$ n'est pas G-H-régulier. On observe qu'il n'est la norme d'aucun élément semi-simple de G ; en effet l'unique candidat est $1 \in G(F)$ mais seul le caractère endoscopique trivial est associé à cet élément.

4.5 Transfert

Soit $\mathcal{E}$ une donnée endoscopique et soit H le groupe endoscopique associé à $\mathcal{E}$. Dans nos exemples une donnée endoscopique est la donnée d'un groupe $H \simeq \mathbf{U}_p^* \times \mathbf{U}_q^*$, d'un plongement

$$\varphi : H \to \mathbf{U}_n^*$$

d'un caractère κ de

$$\mathbf{H}^1_{ab}(\mathbb{A}_F/F, H)$$

définissant H comme groupe endoscopique et d'un facteur de transfert $\Delta_v^{\mathcal{E}}$ pour toute place v de F.

Les facteurs de transfert $\Delta_v^{\mathcal{E}}$ sont des fonctions sur l'ensemble des couples (δ, γ) d'éléments semi-simples réguliers dans

$$\widetilde{G}(F_v) \times H(F_v)$$

où γ est une norme de δ. Le facteur de transfert est invariant par conjugaison stable de $\gamma \in H(F_v)$ et on a

$$\Delta_v^{\mathcal{E}}(x^{-1}\delta\, x, \gamma) = \kappa_v(x)\Delta_v^{\mathcal{E}}(\delta, \gamma)$$

pour tout $x \in (I_\delta \backslash G)(F_v)$. De plus le produit sur toutes les places vaut 1 sur les couples rationnels :

$$\prod_v \Delta_v^{\mathcal{E}}(\delta, \gamma) = 1$$

si $\delta \in \widetilde{G}(F)$ et $\gamma \in H(F)$ est une norme de δ.

Les facteurs de transfert ont été construits par Langlands et Shelstad ; ils supposent un choix qui peut se décrire au moyen d'un plongement entre L-groupes pour H et G ; c'est ce point de vue adopté par Langlands et Shelstad (cf.[KS]). Lorsque κ est trivial le facteur de transfert peut être choisi trivial.

Considérons une fonction $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\widetilde{G}(\mathbb{A}_F))$. On appelle transfert endoscopique de ϕ sur H une fonction $\phi^{\mathcal{E}} \in \mathcal{C}_c^\infty(H(\mathbb{A}_F))$ (parfois notée simplement ϕ^H), telle que l'on ait localement partout l'identité :

$$\mathcal{SO}_\gamma(\phi_v^{\mathcal{E}}) = \Delta_v^{\mathcal{E}}(\delta, \gamma)\mathcal{O}_\delta^\kappa(\phi_v)$$

si $\gamma \in H(F_v)$ est une norme de $\delta \in \widetilde{G}(F_v)$ semi-simple et régulier et

$$\mathcal{SO}_\gamma(\phi_v^{\mathcal{E}}) = 0$$

si γ est $\widetilde{G}$-H-régulier, mais n'est pas une norme.

On en déduit que globalement

$$\mathcal{SO}_\gamma(\phi^{\mathcal{E}}) = \mathcal{O}^\kappa_\delta(\phi)$$

lorsque $\gamma \in H(F)$ est une norme de $\delta \in \widetilde{G}(F)$ et

$$\mathcal{SO}_\gamma(\phi^{\mathcal{E}}) = 0$$

si γ est $\widetilde{G}$-H-régulier, mais n'est pas localement partout une norme.

On appelle transfert stable, le transfert sur le groupe endoscopique principal (c'est-à-dire le groupe endoscopique correspondant au caractère endoscopique trivial) avec facteur de transfert trivial. Rappelons que $\mathbf{U}_n^*$ est le groupe endoscopique principal pour $\widetilde{\mathbf{G}}_n$. Il est usuel de dire que $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\widetilde{\mathbf{G}}_n(\mathbb{A}_F))$ et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{U}_n^*(\mathbb{A}_F))$ sont associées si f est un transfert stable de ϕ. Le lemme suivant est un cas particulier du théorème 4.4 dont la preuve est ancienne et beaucoup plus élémentaire.

Lemme 4.2: Pour toute place finie v et toute $\phi_v \in \mathcal{C}_c^\infty(\widetilde{\mathbf{G}}_n(F_v))$ il existe $f_v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{U}_n^*(F_v))$ associée. Réciproquement toute f_v est associée à une ϕ_v.

Preuve: Le transfert sur le groupe endoscopique principal c'est-à-dire l'existence du transfert pour le changement de base stable est connu depuis longtemps [Lab3] : il se ramène par descente au cas des formes intérieures ce qui est acquis grâce à des travaux de Waldspurger. Observons de plus qu'il résulte de [Lab3 ; 2.5.3] que, dans notre cas, la norme pour le changement de base est surjective et que donc pour toute f_v sur $\mathbf{U}^*(F_v)$ il existe ϕ_v sur $\widetilde{\mathbf{G}}(F_v)$ telle que f_v et $\phi_v^{\mathbf{U}^*}$ sont associées.

□

Aux places non ramifiées on a un énoncé plus précis ; le lemme fondamental pour toute l'algèbre de Hecke sphérique affirme que le transfert est compatible à la fonctorialité, au moins pour les représentations sphériques :

Théorème 4.3: Soit v une place finie non ramifié dans E/F. Soit h une fonction dans l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}(\mathbf{G}_n(F_v))$. Considérons la fonction sur $\widetilde{G}(\mathbb{A}_F)$:

$$\phi_v(x \rtimes \theta_n) = h(x)$$

On dispose de l'homomorphisme de changement de base

$$b : \mathcal{H}(\mathbf{G}_n(F_v)) \to \mathcal{H}(\mathbf{U}_n^*(F_v))$$

Alors le transfert stable est compatible à l'homomorphisme de changement de base, c'est-à-dire que ϕ_v est associée à $f_v = b(h)$. De même pour tout groupe endoscopique H de $\mathbf{U}_n^*$ on dispose d'un homomorphisme

$$\psi_H : \mathcal{H}(\mathbf{U}_n^*(F_v)) \to \mathcal{H}(H(F_v))$$

compatible au transfert.

Preuve: Le lemme fondamental stable pour le changement de base, dû à Kottwitz [K3] pour l'élément neutre, s'étend à toute l'algèbre de Hecke sphérique par les techniques de Clozel [C2] ou Labesse [Lab1]. Pour l'endoscopie ordinaire des groupes unitaires ceci est dû à Hales [Hal] compte tenu de la validité du lemme fondamental pour l'élément unité qui résulte de [LN] et [W2]. □

Nous aurons également besoin de tous les transferts endoscopiques aux places finies pour les groupes unitaires. Nous donnons ci-dessous le théorème général.

Théorème 4.4: Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\widetilde{G}(\mathbb{A}_F))$ et toute donnée endoscopique $\mathcal{E}$ il existe une fonction $\phi^{\mathcal{E}} \in \mathcal{C}_c^\infty(H(\mathbb{A}_F))$, qui est un transfert endoscopique de ϕ.

Preuve: Pour les places réelles l'existence du transfert est dû à Shelstad dans le cas non tordu et à Renard en général. Pour les places finies Waldspurger a montré, dans une longue série de travaux parmi lesquels nous citerons [W1], [W2] et [W3], que l'existence du transfert, ainsi que la validité du lemme fondamental aux places non ramifiées pour les unités de l'algèbre de Hecke en caractéristique zéro, résulte du lemme fondamental en caractéristique positive qui lui-même est désormais un théorème grâce aux travaux de Laumon et Ngô pour les groupes unitaires [LN] et généralisés par Ngô à tous les groupes réductifs. □

Le transfert endoscopique pour les fonctions d'Euler-Poincaré, et plus généralement pour les pseudo-coefficients de séries discrètes, sur un groupe unitaire aux places réelles est construit de façon élémentaire dans [Lab6, § 7.2]. Pour nos applications le transfert stable pour le changement de base aux places archimédiennes fait l'objet du lemme 4.7.

4.6 Transfert et terme constant

Soit Q un sous-groupe parabolique standard de $\mathbf{G}$ de sous-groupe de Levi M et de radical unipotent N. On note $\widetilde{M}$ l'espace tordu engendré par M et θ_M. Soit v une place non ramifiée et soit h une fonction dans l'algèbre de Hecke sphérique sur $\mathbf{G}(F_v)$. Le terme constant de h le long de Q est défini par

$$h_Q(m) = \delta_Q(m)^{1/2} \int_{N(F_v)} h(mn)\, dn$$

où δ_Q est la fonction module pour Q. Considérons la fonction sur $\widetilde{\mathbf{G}}(\mathbb{A}_F)$ définie par

$$\phi_v(x \rtimes \theta_n) = h(x) \ .$$

On appellera terme constant de ϕ_v le long de Q la fonction sur $\widetilde{M}(F_v)$ définie par

$$\phi_{v,Q}(m \rtimes \theta_M) = h_Q(m) \ .$$

Soit λ un caractère non ramifié de $M_0(F_v)$ le sous-groupe diagonal de $\mathbf{G}_n(F_v)$. Soit π_λ la représentation de la série principale de $\mathbf{G}_n(F_v)$ et π_λ^M la représentation de la série principale de $M(F_v)$ définies par induction parabolique normalisée par λ.

Supposons que $w(\lambda) = \lambda$ pour un $w \in W^{\widetilde{M}}$ alors $\theta_M(\pi_\lambda^M) \simeq \pi_\lambda^M$ et on peut prolonger π_λ^M en une représentation $\widetilde{\pi^M}_\lambda$ de $\widetilde{M}(F_v)$ en imposant que l'opérateur $\widetilde{\pi^M}(\theta_M)$ fixe les vecteurs invariants sous le sous-groupe compact hyperspécial (ce qui est la normalisation naturelle dans le cas non ramifié). De même on prolonge π_λ en une représentation $\widetilde{\pi}_\lambda$ de $\widetilde{\mathbf{G}}(F_v)$

Lemme 4.5: Dans ces conditions on a

$$\text{trace } \widetilde{\pi}_\lambda(\phi_v) = \text{ trace } \widetilde{\pi^M}_\lambda(\phi_{v,Q}) \ .$$

Preuve: L'induction par étages montre que

$$\text{trace } \pi_\lambda(h) = \text{ trace } \pi_\lambda^M(h_Q) \ .$$

L'opérateur associé à θ_M agit trivialement sur le vecteur invariant par le compact hyperspécial ; on aura donc

$$\text{trace } \widetilde{\pi^M}_\lambda(\phi_{v,Q}) = \text{ trace } \pi_\lambda^M(h_Q) \ .$$

De même on a
$$\text{trace } \widetilde{\pi}_\lambda(\phi_v) = \text{ trace } \pi_\lambda(h)$$
ce qui fournit l'égalité souhaitée.

□

Soit $\mathbf{U}$ un groupe unitaire et soit H un groupe endoscopique pour $\mathbf{U}$. On sait que H est un produit de groupes unitaires quasi-déployées. Le groupe H_E obtenu par extension des scalaires à E est un produit de groupes linéaires. On pose
$$M^H = \mathrm{Res}_{E/F} H_E \ .$$
C'est un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$. Soit θ_H l'automorphisme de M^H défini par l'action de Galois. On note $\widetilde{M}^H$ l'espace tordu défini par θ_H.

On suppose choisi pour chaque groupe endoscopique H un facteur de transfert Δ^H. Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{U}(\mathbb{A}_F))$; on note f^H un transfert de f sur H. Le transfert dépend du choix du facteur de transfert mais nous avons omis cette dépendance dans la notation. Ceci n'engendre aucune ambiguïté puisqu'un groupe endoscopique pour $\mathbf{U}$ ne figure que dans une seule classe d'équivalence de données endoscopiques.

Proposition 4.6: (i) Il existe pour chaque H une fonction $\widetilde{f}^H$ sur $\widetilde{M}^H(\mathbb{A}_F)$, admettant f^H comme transfert stable sur $H(\mathbb{A}_F)$. On notera ϕ la fonction $\widetilde{f}^H$ lorsque $H = \mathbf{U}^*$.
(ii) Considérons une place non ramifiée telle que ϕ_v est la translatée d'une fonction dans l'algèbre de Hecke sphérique. Alors, à torsion près par un caractère du déterminant sur chaque facteur de M^H, dépendant du choix du facteur de transfert Δ^H, la fonction $\widetilde{f}_v^H$ a les mêmes intégrales orbitales stables que le terme constant ϕ_{v,Q^H} de ϕ_v le long du sous-groupe parabolique standard Q^H de sous-groupe de Levi M^H.

Preuve: L'existence de $\widetilde{f}^H$ résulte de la surjectivité de la norme pour le changement de base stable dans notre cas (Lemme 4.2). Lorsque $H = \mathbf{U}^*$ cela revient à dire qu'il existe $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\widetilde{\mathbf{G}}(\mathbb{A}_F))$ de sorte que $f = \phi^{\mathbf{U}^*}$. Le lemme fondamental pour toute l'algèbre de Hecke (théorème 4.3) montre que le transfert est compatible à la fonctorialité au moins pour les représentations sphériques. On conclut en invoquant le lemme 4.5.

□

4.7 Fonctions de Lefschetz et leur transfert stable

Pour un groupe de Lie $G_\infty = G(F \otimes \mathbb{R})$ on notera $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et K_G un sous-groupe compact maximal.

Soit V une représentation rationnelle irréductible de $\mathbf{U}$. On note f_V une fonction d'Euler-Poincaré sur $\mathbf{U}_\infty$ relativement à V c'est-à-dire une fonction lisse et à support compact sur $\mathbf{U}_\infty$ telle que

$$\text{trace } \sigma(f_V) = \sum (-1)^q \dim H^q(\mathfrak{u}, K_{\mathbf{U}}; \sigma \otimes \check{V})$$

pour toute représentation admissible σ de $\mathbf{U}_\infty$. Dans le cas du groupe quasi-déployé $\mathbf{U}^*$ la fonction d'Euler-Poincaré sera notée f_V^*.

Considérons $W = V \otimes V^\theta$ et soit $\widetilde{W}$ un prolongement de W à $\widetilde{\mathbf{G}}_\infty$. On note $\phi_{\widetilde{W}}$ une fonction de Lefschetz pour $\widetilde{\mathbf{G}}_\infty$ attachée à $\widetilde{W}$. Par définition $\phi_{\widetilde{W}}$ est une fonction lisse et à support compact sur $\widetilde{\mathbf{G}}_\infty$ telle que pour toute représentation admissible $\widetilde{\pi}$ de $\widetilde{\mathbf{G}}_\infty$

$$\text{trace } \widetilde{\pi}(\phi_{\widetilde{W}}) = \sum (-1)^q \text{ trace } (\theta_c | H^q(\mathfrak{g}, K_{\mathbf{G}}; \widetilde{\pi} \otimes \check{\widetilde{W}}))$$

où θ_c est l'involution de Cartan relative à $K_{\mathbf{G}}$.

La construction de fonctions d'Euler-Poincaré est classique ; pour celles de Lefschetz on renvoie le lecteur à [Lab2] (voir aussi [C3]).

Lemme 4.7: La fonction $\frac{1}{a}\phi_{\widetilde{W}}$ admet comme transfert stable $\frac{1}{b^*} f_V^*$ où $a = 2^{nd}$ et b^* est l'ordre des L-paquets de séries discrètes pour $\mathbf{U}_\infty^*$.

Preuve: Le cas des coefficients triviaux traité dans [CL1] Corollaire A.1.2 a été complété (et certaines bévues corrigées) dans [CL2] qui traite le cas général. Rappelons en l'argument. On observe, en reprenant les calculs de [CL1] pages 120-121, que si γ est elliptique régulier de norme δ les intégrales orbitales de $\phi_{\widetilde{W}}$ et f_V sont données par

$$\mathcal{O}_\delta(\phi_{\widetilde{W}}) = \mathcal{O}_\gamma(f_V) = \text{ trace } (\gamma | V) \ .$$

Les éléments semi-simples non elliptiques ont des intégrales orbitales nulles. En passant aux intégrales orbitales stables il résulte de [CL2] que $\frac{1}{a}\phi_{\widetilde{W}}$ admet comme transfert stable $\frac{1}{b^*} f_V^*$ où $a = 2^{nd}$ est l'ordre du groupe de 1-cohomologie galoisienne d'un tore maximal compact (or un tel tore est produit de $n \times d$ copies de $\mathbf{U}(1)$) et b^* est l'ordre des L-paquets de séries discrètes pour $\mathbf{U}_\infty^*$.

□

Remarque 4.8: On a $b^* = (b_0^*)^d$ où b_0^* est le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ avec $p = [\frac{n}{2}]$.

Soit $\mathbf{U}$ une forme intérieure de $\mathbf{U}^*$; on note f_V une fonction d'Euler-Poincaré pour $\mathbf{U}$ relativement à V. Une variante de la preuve ci-dessus fournit le

Lemme 4.9: La fonction $\frac{1}{b} f_V$ admet comme transfert stable $\frac{1}{b^*} f_V^*$ où b est l'ordre des L-paquets de séries discrètes pour $\mathbf{U}_\infty$.

Lemme 4.10: Il y a une seule représentation unitaire irréductible générique π_W de $\mathbf{G}_\infty \simeq GL(n,\mathbb{C})^d$ à cohomologie non triviale dans W et on a

$$\text{trace } \widetilde{\pi}_W(\phi_{\widetilde{W}}) = \pm a \ ,$$

le signe dépendant du choix du prolongement de π_W à l'espace tordu.

Preuve: On supposera que θ_c agit sur $\widetilde{W}$ par permutation des facteurs. Par définition des fonctions de Lefschetz on a

$$\text{trace } \widetilde{\pi}(\phi_{\widetilde{W}}) = \sum (-1)^q \text{ trace } (\theta_c | H^q(\mathfrak{g}, K; \widetilde{\pi} \otimes \check{\widetilde{W}})) \ .$$

Pour un groupe complexe les représentations unitaires irréductibles génériques sont des séries principales. Le calcul de leur $\mathfrak{g}$-K-cohomologie est classique ; il se fait au moyen de la suite spectrale de Hochschild-Serre (cf. [BW] theorem 3.3 page 93) et on voit qu'il existe une unique représentation π_W de la série principale, dont la cohomologie, en tant qu'espace vectoriel gradué, est non nulle. Elle est calculée dans [C1, lemme 3.14] : à un décalage de degré $l(s)$ près (où $l(s)$ est la longueur d'un certain élément s du groupe de Weyl), la cohomologie est isomorphe à l'algèbre extérieure de $\mathfrak{a}$, l'algèbre de Lie de la partie déployée du tore maximal ; c'est une algèbre de Lie abélienne de dimension nd. L'automorphisme θ_c agit par $(-1)^p$ sur $\wedge^p \mathfrak{a}$. La somme alternée des traces est donc la dimension de l'algèbre extérieure soit $2^{nd} = a$; c'est donc, au signe près, le nombre cherché.

$\square$

4.8 Stabilisation des termes elliptiques

La stabilisation des termes elliptiques de la formule des traces est due à Langlands et Kottwitz [K2] dans le cas standard. Elle a été étendue au cas tordu dans [KS] pour les éléments elliptiques fortement réguliers. Enfin [Lab5] traite, dans le cas tordu, tous les éléments elliptiques. La stabilisation des termes elliptiques suppose l'existence du transfert, ce qui était une conjecture lors de la rédaction des articles cités ci-dessus.

La stabilisation complète de la formule des traces dans le cas ordinaire (i.e. non tordu) est due à Arthur ; elle utilise le lemme fondamental pondéré dont de la preuve vient d'être annoncée par Chaudouard et Laumon. Nous n'y ferons pas appel. En effet dans notre situation, qui pourtant invoque le cas tordu, de nombreux arguments se simplifient. Comme dans [Lab3] nous utiliserons des stabilisations conditionnelles indépendantes de la stabilisation d'Arthur et du lemme fondamental pondéré.

Si H est un groupe réductif connexe on note ST_e^H la distribution stable

$$ST_e^H(f) = \tau(H) \sum_\gamma \tilde{\iota}(\gamma)^{-1} \mathcal{SO}_\gamma(f^0)$$

où la somme porte sur un ensemble de représentants des classes de conjugaisons stables d'éléments elliptiques et $\tilde{\iota}(\gamma)$ est l'ordre du groupe des points rationnels du groupe quotient H^γ/I_γ, c'est-à-dire du groupe des composantes connexes du centralisateur de γ. On rappelle que les groupes adèliques sont munis de la mesure de Tamagawa et que $\tau(H)$ désigne le nombre de Tamagawa de H. Dans nos applications on aura simplement :

$$ST_e^H(f) = \tau(H) \sum_\gamma \mathcal{SO}_\gamma(f)$$

puisque les centralisateurs des éléments elliptiques seront connexes et les espaces vectoriels $\mathfrak{a}_H$ triviaux.

Si H est un groupe endoscopique appartenant à une donnée endoscopique $\mathcal{E}$ pour un espace tordu $\widetilde{G}$ on notera $ST_e^{\mathcal{E}}$ la variante de la distribution ST_e^H où on ne somme que sur les γ elliptiques qui satisfont de plus la condition de $\widetilde{G}$-H-régularité. Dans les applications que nous donnons ici, les deux distributions coïncident.

Pour chaque donnée endoscopique $\mathcal{E}$ on définit des nombres rationnels

$$\iota(\mathcal{E}) = \iota(\widetilde{G}, H) = \frac{J(\widetilde{G})\tau(G)}{\lambda(\widetilde{G}, H) c(\widetilde{G}, H)\ d(\widetilde{G})\tau(H)}$$

où τ désigne le nombre de Tamagawa, $J(\widetilde{G})$ est le déterminant de $1-\theta$ dans le quotient $\mathfrak{a}_G/\mathfrak{a}_{\widetilde{G}}$, l'entier $d(*)$ désigne l'ordre d'une obstruction cohomologique [Lab5, IV.1.3] et $c(*,*)$ est le quotient de deux mesures de Haar canoniques sur les algèbre de Lie isomorphes $\mathfrak{a}_{\widetilde{G}}$ et $\mathfrak{a}_H$. Enfin $\lambda(\widetilde{G},H)$ est l'ordre du groupe des automorphismes extérieurs du couple $(\widetilde{G},H)$. L'énoncé ci-dessous est emprunté à [Lab5].

Théorème 4.11: Pour $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\widetilde{G}(\mathbb{A}_F))$, la partie elliptique de la formule des traces $T_e^{\widetilde{G}}(\phi)$ est donnée par

$$T_e^{\widetilde{G}}(\phi) = \sum_{\mathcal{E}} \iota(\mathcal{E}) ST_e^{\mathcal{E}}(\phi^{\mathcal{E}})$$

où la somme porte sur les classes d'équivalence de données endoscopiques et où $\phi^{\mathcal{E}}$ est le transfert de ϕ sur le groupe endoscopique H.

4.9 Calcul des constantes

Nous allons calculer les constantes $\iota(\mathcal{E})$ qui interviennent dans le théorème 4.11 pour les exemples utiles ici.

Proposition 4.12: Si $H = \mathbf{U}_p^* \times \mathbf{U}_q^*$ avec $p+q=n$, $p \neq q$ et $pq \neq 0$ on a

$$\iota(\widetilde{\mathbf{G}}_n, H) = \iota(\mathbf{U}_n, H) = \frac{1}{2}$$

Si $pq = 0$ c'est-à-dire $H = \mathbf{U}_n^*$ on a

$$\iota(\widetilde{\mathbf{G}}_n, H) = \iota(\mathbf{U}_n, H) = 1$$

Enfin, si $H = \mathbf{U}_p^* \times \mathbf{U}_q^*$ avec $p = q$ on a

$$\iota(\widetilde{\mathbf{G}}_n, H) = \iota(\mathbf{U}_n, H) = \frac{1}{4}$$

Preuve: Rappelons que $\mathfrak{a}_G$ désigne l'algèbre de Lie de la partie déployée de la restriction à $\mathbb{Q}$ du centre de G et $\mathfrak{a}_{\widetilde{G}}$ la sous algèbre des points fixes sous θ. On rappelle que

$$\iota(\widetilde{G}, H) = \frac{J(\widetilde{G})\tau(G)}{\lambda(\widetilde{G},H)c(\widetilde{G},H)\ d(\widetilde{G})\tau(H)}$$

Mais ici $\mathfrak{a}_{\mathbf{G}_n}$ est de dimension 1 et θ agit par -1. On en déduit que $\mathfrak{a}_{\widetilde{\mathbf{G}}}$ est nulle de même que $\mathfrak{a}_{\mathbf{U}}$ et $\mathfrak{a}_H$; donc

$$J(\widetilde{\mathbf{G}}_n) = 2 \quad \text{et} \quad c(\widetilde{\mathbf{G}}, H) = 1 \ .$$

Il est bien connu que

$$\tau(\mathbf{G}_n) = 1 \quad , \quad \tau(\mathbf{U}_n^*) = 2 \ ,$$

donc $\tau(H) = 2$ si $pq = 0$ et 4 sinon ; on a toujours $d(G) = 1$, donc $d(\mathbf{U}_n) = 1$ et on voit facilement que $d(\widetilde{\mathbf{G}}_n) = 1$. Enfin $\lambda(\widetilde{\mathbf{G}}_n, H) = 1$ si $H = \mathbf{U}_p^* \times \mathbf{U}_q^*$ avec $p \neq q$ alors que $\lambda(\widetilde{\mathbf{G}}_n, H) = 2$ si $p = q$.

□

4.10 Termes elliptiques et changement de base stable

Nous devons maintenant rappeler un résultat technique essentiel, appelé identité de changement de base :

Théorème 4.13: Si ϕ_∞ est une fonction de Lefschetz, et si f est associée à ϕ (c'est-à-dire $f = \phi^{\mathbf{U}^*}$) on a

$$T_e^{\widetilde{\mathbf{G}}_n}(\phi) = ST_e^{\mathbf{U}^*}(f) \ .$$

Preuve: Ce résultat est déjà utilisé dans [CL1] et dans [HL]. Rappelons-en la preuve. Soit ϕ_∞ une fonction de Lefschetz ; on sait que ϕ_∞ est stabilisante [CL2]. Ceci signifie que ϕ_∞ est cuspidale et que les κ-intégrales orbitales $\mathcal{O}_\delta^\kappa(\phi_\infty)$ sont nulles pour tout δ semi-simple $\mathbb{R}$-elliptique sauf, peut-être, si $\kappa = 1$. De plus le lemme A.2.1 de [CL1] affirme que $\{\infty\}$ l'ensemble des places archimédiennes est un ensemble $(\mathbf{G}_n, \mathbf{U}^*)$ essentiel au sens de [Lab3]. Le corollaire de ces observations est que seul le groupe endoscopique principal $H = \mathbf{U}^*$ contribue à la stabilisation de la partie elliptique de la formule des traces tordue pour $\widetilde{\mathbf{G}}$. On a donc

$$T_e^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\phi) = \iota(\widetilde{\mathbf{G}}, \mathbf{U}^*) ST_e^{\mathbf{U}^*}(f)$$

L'assertion

$$\iota(\widetilde{\mathbf{G}}, \mathbf{U}^*) = 1$$

résulte de la proposition 4.12 et est reprise de [CL1, A.3.1].

□

Remarque 4.14: En reprenant les arguments de [CL1, Lemme A.2.1] on voit que ce théorème est encore essentiellement vrai plus généralement si on remplace $\mathbf{U}^*$ par un groupe réductif G quasi-déployé sur F et $\widetilde{\mathbf{G}}$ par l'espace tordu associé au groupe obtenu à partir de G par extension puis restriction des scalaires pour E/F sous les hypothèses suivantes :

– le groupe dérivé de G est simplement connexe,

– le cocentre de G est un produit d'un tore déployé et d'un produit de tores $\mathbf{U}(1)$ associés à E/F.

Toutefois la présence d'un tore déployé introduirait une constante dans l'égalité.

5 Applications

Dans toute la suite, F est un corps totalement réel de degré $d \geq 2$, E/F est une extension quadratique totalement imaginaire et $\mathbf{U}$ un groupe unitaire forme intérieure du groupe quasi-déployé $\mathbf{U}^*$ relatif à E/F.

5.1 Le résultat principal

Théorème 5.1: Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{U}(\mathbb{A}_F))$. On suppose que f_∞ est un pseudo-coefficient de série discrète. Alors, avec les notations du paragraphe 4.6, il existe pour chaque H une fonction $\widetilde{f}^H$ sur $\widetilde{M}^H(\mathbb{A}_F)$, cuspidale en chaque place réelle, admettant f^H comme transfert stable (pour le changement de base) sur $H(\mathbb{A}_F)$ et on a l'identité suivante :

$$T_{disc}^{\mathbf{U}}(f) = \sum \iota(\mathbf{U}, H)\ T_{disc}^{\widetilde{M}^H}(\widetilde{f}^H)\ .$$

Preuve: L'existence de $\widetilde{f}^H$ est établie dans la proposition 4.6. Sous nos hypothèses simplificatrices on dispose de la formule pour le changement de base stable du théorème 4.13

$$T_e^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\phi) = ST_e^{\mathbf{U}^*}(f^{\mathbf{U}^*})$$

avec $\phi = \widetilde{f}$ et donc plus généralement

$$T_e^{\widetilde{M}^H}(\widetilde{f}^H) = ST_e^H(f^H)\ .$$

On a d'autre part la formule de stabilisation du théorème 4.11

$$T_e^{\mathbf{U}}(f) = \sum \iota(\mathbf{U}, H)\ ST_e^H(f^H)$$

d'où on déduit l'identité :

$$T_e^{\mathbf{U}}(f) = \sum \iota(\mathbf{U}, H)\ T_e^{\widetilde{M}^H}(\widetilde{f}^H)$$

Supposons de plus pour l'instant que la fonction f_v est à support régulier en une place finie v ; grâce au corollaire 3.11 on obtient l'identité

$$T_{disc}^{\mathbf{U}}(f) = \sum \iota(\mathbf{U}, H)\ T_{disc}^{\widetilde{M}^H}(\widetilde{f}^H)$$

pour la famille de fonctions considérées. On choisit comme place v une place finie, non ramifiée pour F et déployée dans E. En une telle place on a

$$\mathbf{U}_v^* = GL(n, F_v)\ .$$

Pour f_v on considère une fonction élémentaire au sens de [Lab1] fortement régulière (f_v est définie par un élément d'un tore déployé de $GL(n)$, dont les valeurs propres ont des modules deux à deux distincts). Les arguments de [Lab1] montrent que l'égalité

$$T_{disc}^{\mathbf{U}}(f) = \sum \iota(\mathbf{U}, H)\ T_{disc}^{\widetilde{M}^H}(\widetilde{f}^H)$$

qui est vraie si f_v est élémentaire fortement régulière fournit la même identité mais avec pour f_v une fonction dans l'algèbre de Hecke sphérique. Il convient essentiellement d'observer que si on varie f_v, et donc aussi $\widetilde{f}_v^H$, dans l'une ou l'autre de ces familles de fonctions alors, compte tenu de la proposition 4.6, les traces $T_{disc}^{\mathbf{U}}(f)$ ainsi que $T_{disc}^{\widetilde{M}^H}(\widetilde{f}^H)$ s'expriment au moyen de sommes finies de caractères du tore maximal déployé de $GL(n, F_v)$. En variant v on obtient l'identité cherchée en général.

$\square$

Remarque 5.2: L'hypothèse sur le degré de F n'intervient ici que pour pouvoir invoquer le corollaire 3.11. Elle n'est sans doute pas nécessaire pour 5.1 mais nous n'avons pas rédigé la preuve lorsque $F = \mathbb{Q}$.

Soit σ une représentation automorphe cuspidale pour $\mathbf{U}$ et telle que σ_∞ est une série discrète. Nous dirons que σ vérifie hypothèse $(*)$ si la propriété suivante est vraie :
$(*)$ *Soit* f_∞ *un pseudo-coefficient pour* σ_∞*. Les représentations* σ' *du spectre discret de* $\mathbf{U}$ *avec* $\sigma'_f \simeq \sigma_f$ *sont telles que les entiers* trace $\sigma'_\infty(f_\infty)$ *sont tous de même signe que* trace $\sigma_\infty(f_\infty)$

On observe que $(*)$ est vérifiée si le paramètre de σ_∞ est assez régulier pour que les seules représentations unitaires avec le même caractère infinitésimal sont les séries discrètes du L-paquet de σ_∞. En particulier $(*)$ est toujours vérifiée si $\mathbf{U}_\infty$ est compact. La propriété $(*)$ a été établie pour toutes les représentations à cohomologie de certain groupes unitaires anisotropes par Kottwitz [K4].

Corollaire 5.3: Soit σ une représentation du spectre discret pour $\mathbf{U}$ qui vérifie la propriété $(*)$. On suppose que σ_∞ est une représentation de la série discrète. Alors il existe une partition

$$n = n_1 + \cdots + n_r$$

et une collection π_i de représentation automorphes discrètes et θ_{n_i}-invariantes telles que

$$\pi_1 \boxplus \cdots \boxplus \pi_r$$

définisse un changement de base faible pour σ.

Preuve: Nous allons esquisser la preuve de ce corollaire. Soient σ et σ' deux représentations automorphes. On dira que σ' est faiblement équivalente à σ si $\sigma'_v \simeq \sigma_v$ pour presque toute place v. Les classes d'équivalence pour cette relation seront appelées paquets automorphes. En séparant les chaînes de valeurs propres de Hecke dans l'identité de formules des traces donnée par 5.1 et compte tenu de la proposition 4.6, on sépare les paquets automorphes et obtient une identité raffinée où seules interviennent à gauche les représentations appartenant à un même paquet automorphe ; on peut d'autre part invoquer la description par Mœglin et Waldspurger du spectre discret pour $GL(n)$ et d'autre part la classification de Jacquet-Shalika des représentation automorphes pour $GL(n)$ pour conclure que seules des représentations induites pour (au plus) un seul sous-groupe de Levi M interviennent à droite (mais, sauf si $M = \mathbf{G}_n$, un tel sous-groupe de Levi intervient lui dans plusieurs groupes M^H). On notera $m(\sigma)$ la multiplicité de σ dans le spectre discret. Sous la propriété $(*)$ la distribution

$$f^\infty \mapsto \sum_{\sigma' \simeq \sigma} m(\sigma') \text{ trace } \sigma'(f_\infty \otimes f^\infty)$$

est non nulle lorsque f_∞ est un pseudo-coefficient de série discrète. Ceci résulte de l'indépendance linéaire des caractères. C'est dire que le paquet automorphe défini par σ contribue non trivialement à identité raffinée lorsque f_∞ est un pseudo-coefficient de série discrète. Le second membre de l'identité raffinée est donc aussi non nul. L'assertion résulte alors du lemme 3.8.

□

5.2 Représentations à changement de base cuspidal

Nous supposons de plus dans ce paragraphe que E/F est une extension partout non ramifiée aux places finies, et que $\mathbf{U}$ est quasi-déployé en toute place finie inerte.

Pour les représentations sphériques des groupes locaux non ramifiés le changement de base est défini. Soient $\sigma = \otimes\sigma_v$ une représentation automorphe irréductible pour $\mathbf{U}$ et $\pi = \otimes\pi_v$ une représentation automorphe irréductible pour $\mathbf{G}_n$; on dit que π est un changement de base faible de σ si, pour presque toute place finie v non ramifiée (pour les groupes et les représentations) π_v est le changement de base de σ_v (en tant que représentations sphériques).

Théorème 5.4: Soit π une représentation automorphe cuspidale de $\mathbf{G}_n$ qui est θ-invariante et cohomologique à l'infini. Alors π est un changement de base faible pour une représentation automorphe du spectre discret de $\mathbf{U}$ cohomologique à l'infini. Soit σ une telle représentation. On suppose que σ est cuspidale, que σ_∞ est une représentation de la série discrète et que σ_v est sphérique en toute place v finie inerte. Alors, au moins si σ vérifie la propriété $(*)$, la représentation σ apparaît avec multiplicité un.

Preuve: D'après 5.1 on a

$$T^{\mathbf{U}}_{disc}(f) = \sum \iota(\mathbf{U}^*, H)\ T^{\widetilde{M}^H}_{disc}(\widetilde{f}^H)$$

pour des fonctions choisies comme il convient à l'infini. En séparant les chaînes de valeurs propres de Hecke pour $\mathbf{G}_n$ on obtient une identité raffinée et on peut alors, compte tenu de la proposition 4.6, invoquer la classification de Jacquet-Shalika pour s'assurer que les contributions endoscopiques n'interfèrent pas avec les paquets dont le changement de base est cuspidal. Compte tenu de la rigidité pour $GL(n)$ (c'est-à-dire qu'une représentation automorphe cuspidale de $GL(n)$ est déterminée par sa classe d'équivalence presque partout) et puisque par hypothèse π est cuspidale, cohomologique à l'infini et θ-invariante, π contribue non trivialement à la formule des traces pour $\widetilde{G}$ (pour la famille de fonctions utilisée dans 5.1) et on obtient en particulier l'identité

$$\sum_{\sigma'} m(\sigma') \text{ trace } \sigma'(f) = \text{ trace } \widetilde{\pi}(\phi)$$

où la somme porte sur les σ' intervenant, avec multiplicité $m(\sigma')$, dans le spectre discret pour $\mathbf{U}$ dont le changement de base faible est π. Le second membre étant non identiquement nul l'existence de représentations σ' en résulte. Supposons maintenant que σ, l'une de ces représentations, est cuspidale, que σ_∞ est une représentation de la série discrète et que σ_v est sphérique en toute place v finie inerte. Comme on a séparé les caractères de Hecke et que par hypothèse toutes les places finies inertes sont non ramifiées σ'_f est uniquement déterminée par π et l'identité raffinée peut encore s'écrire

$$\sum_{\sigma'_\infty} m(\sigma'_\infty \otimes \sigma_f) \text{ trace } \sigma'_\infty(f_\infty) = \varepsilon \text{ trace } \widetilde{\pi}_\infty(\phi_\infty)$$

où ε est un signe dépendant de choix locaux. On choisit pour f_∞, au signe $(-1)^{q(\mathbf{U})}$ près, un pseudo-coefficient pour la série discrète σ_∞ de $\mathbf{U}(F \otimes \mathbb{R})$ de même caractère infinitésimal qu'une représentation de dimension finie V de sorte que f_∞ a les mêmes intégrales orbitales stables que

$$\frac{1}{b} f_V$$

On considère sur $\widetilde{\mathbf{G}}_\infty$ une fonction égale à une constante près à une fonction de Lefschetz associée à $W = V \otimes V^\theta$

$$\phi_\infty = \frac{1}{a} \phi_{\widetilde{W}}$$

(autrement dit ϕ_∞ est au signe près un pseudo-coefficient tordu pour $\widetilde{\pi}_W$). Compte tenu de 4.7 et 4.9 l'identité ci-dessus s'applique à ce couple de fonctions. Rappelons que l'on a choisi f_∞ telle que

$$\text{trace } \sigma_\infty(f_\infty) = (-1)^{q(\mathbf{U})}$$

et par hypothèse

$$m(\sigma_\infty \otimes \sigma_f)$$

est un entier non nul. Donc, compte tenu de l'hypothèse $(*)$ le premier membre

$$\sum_{\sigma'_\infty} m(\sigma'_\infty \otimes \sigma_f) \text{ trace } \sigma'_\infty(f_\infty)$$

est un entier non nul. Le second membre est alors aussi non nul et compte tenu de 4.10, on a nécessairement $\pi_\infty = \pi_W$. Le second membre est donc égal à ± 1. Il en résulte que seule σ_∞ peut contribuer au premier membre et que

$$m(\sigma_\infty \otimes \sigma_f) = 1$$

□

Théorème 5.5: Soit σ^* une représentation automorphe cuspidale pour $\mathbf{U}^*$ admettant un changement de base faible π qui est cuspidal. On suppose que σ^*_∞ est une représentation de la série discrète et que σ^*_v est sphérique en toute place v finie inerte. Alors, si l'hypothèse $(*)$ est vérifiée pour $\mathbf{U}^*$ il existe une représentation cuspidale σ pour $\mathbf{U}$ telle que $\sigma_f = \sigma^*_f$ et σ_∞ a le même caractère infinitésimal que σ^*_∞. En particulier elle est cohomologique. Lorsque le caractère infinitésimal de σ^*_∞ est assez régulier alors on sait de plus que σ_∞ est une série discrète et toutes les séries discrètes du même L-paquet apparaissent ainsi.

Preuve: En reprenant la preuve de 5.4 on voit que après séparation des caractères de Hecke on a

$$m(\sigma^*) \text{ trace } \sigma^*(f^*) = \text{ trace } \widetilde{\pi}(\phi)$$

et que

$$\sum_{\sigma} m(\sigma) \text{ trace } \sigma(f) = \text{ trace } \widetilde{\pi}(\phi)$$

où la somme porte sur les σ intervenant, avec multiplicité $m(\sigma)$, dans le spectre cuspidal pour $\mathbf{U}$ dont le changement de base faible est π, lorsque f et ϕ ont pour transfert stable f^*, les trois fonctions étant choisies cuspidales aux places archimédiennes. En particulier $\sigma_f = \sigma^*_f$ et l'hypothèse $(*)$ pour $\mathbf{U}^*$ étant supposée vérifiée l'identité raffinée peut encore s'écrire compte tenu de 5.4

$$\sum_{\sigma_\infty} m(\sigma_\infty \otimes \sigma_f) \text{ trace } \sigma_\infty(f_\infty) = \text{ trace } \sigma^*_\infty(f^*_\infty) = (-1)^{q(\mathbf{U}^*)} .$$

Le premier membre est donc non nul ce qui implique l'existence d'une représentation σ pour $\mathbf{U}$ avec $\sigma_f \simeq \sigma_f^*$ et σ_∞ de même caractère infinitésimal que σ_∞^*. La dernière assertion du théorème s'obtient en faisant varier le pseudo-coefficient.

□

6 Bibliographie

[Ar1] J. Arthur, *On a family of distributions obtained from Eisenstein series II : Explicit formulas*, Amer. J. Math. **104** (1988), p. 1289-1336

[Ar2] J. Arthur, *The invariant trace formula II*, J. Am. Math. Soc. **1** (1988), p. 501-554

[Ar3] J. Arthur, *The L^2 - Lefschetz numbers of Hecke operators*, Invent. Math. **97** (1989), no. 2, p. 257–290

[Ar4] J. Arthur, *Intertwining Operators and Residues I. Weighted Characters*, J. Funct. Analysis. **84** (1989), p. 19-84

[Ar5] J. Arthur, *An introduction to the trace formula*, Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, Clay Math. Proc. **4** Amer. Math. Soc., Providence, RI (2005), p. 1-263

[A6] J. Arthur, *A stable trace formula. III. Proof of the main theorems*, Ann. of Math. **158** (2003), p. 769-873

[BLS] A. Borel J.-P. Labesse J. Schwermer, *On the cuspidal cohomology of S-arithmetic groups of reductive groups over number fields*, Compositio Math. **102** (1996), p. 1-40

[BW] A. Borel N. Wallach, *Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups*, Annals of Math. Studies **94** Princeton Univ. Press (1980)

[C1] L. Clozel, *Motifs et formes automorphes,* Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions, Perspectives in Math. **10** (1990), p. 77-159

[C2] L. Clozel, *The fundamental lemma for stable base change*, Duke Math. J. **61** (1990), p 255-302.

[C3] L. Clozel, *Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de* $\mathrm{GL}(n)$, Inst. Hautes tudes Sci. Publ. Math. **73** (1991), p. 97-145

[CL1] L. Clozel J.-P. Labesse, *Changement de base pour les représentations cohomologiques de certains groupes unitaires*, Astérisque **257** (1999), p. 121-136

[CL2] L. Clozel J.-P. Labesse, *Orbital integrals and distributions*, Preprint (2008)

[DM] P. Delorme P. Mezo, *A twisted invariant Paley-Wiener theorem for real reductive groups*, Duke Math. J. **144** (2008), p. 341-380

[Hal] Thomas Hales, *On the fundamental lemma for standard endoscopy : reduction to unit elements.*, Canad. J. Math. **47** (1995), p 974-994

[HL] M. Harris J.-P. Labesse, *Conditional base change for unitary groups*, Asian J. Math. **8** (2004), p. 653-684

[K1] R. Kottwitz, *Rational conjugacy classes in reductive groups*, Duke Math. J. **49** (1982), p. 785-806

[K2] R. Kottwitz, *Stable trace formula : elliptic singular terms*, Math. Ann. **275** (1986), p. 365-399

[K3] R. Kottwitz, *Base change for unit elements of Hecke algebras*, Compositio Math. (1986), p 237-250

[K4] R. Kottwitz, *On the λ-adic representations associated to some simple Shimura varieties*, Invent. Math. **108** (1992), p. 653-665

[KS] R. Kottwitz D. Shelstad, *Foundations of twisted endoscopy*, Asterisque **255** (1999)

[Lab1] J.-P. Labesse, *Le lemme fondamental pour le changement de base stable*, Duke Math. J. **61** (1990), p. 519-530

[Lab2] J.-P. Labesse, *Pseudo-coefficients très cuspidaux et K-théorie*, Math. Ann. **291** (1991), p. 607-616

[Lab3] J.-P. Labesse, *Cohomologie, stabilisation et changement de base*, Asterisque **257** (1999), p. 1-116

[Lab4] J.-P. Labesse, *Nombres de Tamagawa des groupes réductifs quasi-connexes*, Manuscripta Math. **104** (2001) p. 407-430

[Lab5] J.-P. Labesse, *Stable Twisted Trace Formula : Elliptic Terms*, Jour. Inst. Math. Jussieu **3** (2004), p. 473-530

[Lab6] J.-P. Labesse, *Introduction to Endoscopy*, Contemporary Math. **472** (2008) p. 175-213

[Langlands1] R.P. Langlands, *Eisenstein Series (AMS Conference, Boulder 1965)*, Proc. Sympos. Pure Math. **9** (1966), p 235-252

[Langlands2] R.P. Langlands, *On the functional equation satisfied by Eisenstein Series*, Lecture Notes in Math. **544** Springer (1976)

[LN] G. Laumon B.C. Ngô, *Le lemme fondamental pour les groupes unitaires*, Ann. of Math. **168** (2008), p 477-573

[MW] C. Mœglin J.-L. Waldspurger, *Le spectre résiduel de* $\mathrm{GL}(n)$, Ann. Sci. ENS **22** (1989), p. 605-674

[Mü] W. Müller, *The trace class conjecture in the theory of automorphic forms. II*, Geom. Funct. Anal. **8** (1998), p. 315-355

[Rod] F. Rodier, *Whittaker models for admissible representations of reductive p-adic groups (AMS Conference, Williamstown 1972)*, Proc. Symp. Pure Math. **26** (1973), p 425-430

[Rog] J. Rogawski, *Automorphic Representations of Unitary Groups in Three Variables*, Annals of Math. Studies **123** (1990).

[Shah] F. Shahidi, *On certain L-functions*, Amer. J. Math. **103** (1981), p. 297-355

[Shal] J. Shalika, *The multiplicity one theorem for* GL_n, Annals of Math. **100** (1974), p 171-193

[W1] J.-L. Waldspurger, *Le lemme fondamental implique le transfert*, Compositio Math. **105** (1997), p 153-236

[W2] J.-L. Waldspurger, *Endoscopie et changement de caractéristique*, J. Inst. Math. Jussieu **5** (2006), p 423-525

[W3] J.-L. Waldspurger, *L'endoscopie tordue n'est pas si tordue*, Mem. Amer. Math. Soc. **194** (2008)