# Changement de base CM et séries discrètes

*J.-P. Labesse*
*Institut Mathématique de Luminy*
*UMR 6206*

## 1 Introduction

On fixe dans toute la suite un corps de nombres totalement réel $F$ et une extension quadratique totalement imaginaire $E$ de $F$. On s'intéresse aux groupes unitaires $U$ et au changement de base relatifs à $E/F$.

L'objectif est d'étudier la stabilisation pour le changement de base en se limitant au cas des représentations automorphes ne faisant intervenir que des séries discrètes aux places réelles. On obtient ainsi, pour les groupes unitaires sur un corps CM une preuve indépendante de la preuve du lemme fondamental pondéré (qui n'était pas connu au moment où ce projet a pris corps). Nous supposerons de plus que $F$ est de degré $d \geq 2$ sur $\mathbb{Q}$, ce qui permet l'utilisation de la formule des traces simple et allège ainsi beaucoup les preuves et les pré-requis ; en particulier nous éviterons ainsi d'avoir recours à la forme invariante de la formule des traces. Il convient cependant d'observer que pour le cas $d = 1$ c'est-à-dire $F = \mathbb{Q}$ (que nous ne traitons pas ici) le cadre naturel pour les énoncés est la forme invariante de la formule des traces (cf. 4.5).

# 2 Endoscopie et groupes unitaires

## 2.1 Les groupes en question

Soit $\alpha_n$ l'automorphisme non trivial qui fixe l'épinglage canonique de $GL(n)$ :

$$\alpha_n(x) = J_n \ {}^t x^{-1} J_n^{-1}$$

avec $x \mapsto {}^t x$ la transposition et

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $x \mapsto \overline{x}$ l'automorphisme non trivial du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(E/F)$. Le groupe

$$G_n^* = \mathrm{Res}_{E/F}\, GL(n)$$

admet un automorphisme $\theta_n^*$ d'ordre 2 :

$$\theta_n^*(x) = \alpha_n(\overline{x}) \ .$$

Soit $L_n^*$ la classe de $\theta_n^*$ dans le produit semi-direct $G^* \rtimes < \theta_n^* >$ :

$$L_n^* = G_n^* \rtimes \theta_n^*$$

c'est un espace tordu au sens de [Lab4]. On note $U_n^* = U^*(n, E/F)$ le sous-groupe des points fixes de $\theta_n^*$ dans $G_n^*$. C'est le groupe unitaire quasi-déployé attaché à $E/F$ en dimension $n$. Pour alléger les notations on omettra les indices $n$ si le contexte est clair et on écrira parfois $\theta_{G^*}$ pour $\theta_n^*$ . On notera $U$ une forme intérieure de $U^*$.

## 2.2 Caractères et groupes endoscopiques

Les tores maximaux dans $U_n^*$ proviennent de tores maximaux de $G_n^*$ qui sont $\theta_n^*$-invariants. Soit $I$ un tel tore ; la suite spectrale de Hochschild-Serre et le théorème 90 montrent que

$$\mathbf{H}^1(F, I) = \mathbf{H}^1(E/F, I(E))$$

et en particulier c'est un 2-groupe. Les caractères endoscopiques globaux pour le changement de base sont, par définition, les caractères $\kappa$ du groupe

$$\mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F, I \to G_n^*)$$

triviaux sur l'image de $\mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F, G_n^*)$. Mais on a une suite exacte

$$\mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F, G_n^*) \to \mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F, I \to G_n^*) \to \mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F/F, I) \to 1$$

et une application surjective

$$\mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F, G_n^*) \to \mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F, G_n^*) \to 1$$

Les caractères endoscopiques $\kappa$ pour le changement de base sont donc les caractères de $\mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F/F, I)$ ; ils sont d'ordre 2. Un tel $\kappa$ correspond à un $s \in \check{I}$, le tore dual, avec $s^2 = 1$ ce qui montre que les groupes endoscopiques ont pour goupe dual $\check{H} = GL(p) \times GL(q)$ avec $p + q = n$ et compte tenu de l'action de Galois on a

$$H = U_p^* \times U_q^*$$

Les éléments $s$ et $-s$ correspondent à des caractères endoscopiques distincts. Ils définissent le même groupe endoscopique mais les données endoscopiques et en particulier les facteurs de transfert seront différents.

Dans le cas non tordu, les caractères endoscopiques sont, par définition, les caractères du groupe

$$\mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F, I \to U_n^*)$$

triviaux sur l'image de $\mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F, U_n^*)$ mais on a une suite exacte

$$\mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F, U_n^*) \to \mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F, I \to U_n^*) \to \mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F/F, I) \to \mathbf{H}^1_{ab}(\mathbb{A}_F/F, U_n^*)$$

et une application surjective

$$\mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F, U_n^*) \to \mathbf{H}^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F, U_n^*) \to 1$$

Les caractères endoscopiques globaux sont donc les caractères du groupe

$$\ker[\mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F/F, I) \to \mathbf{H}^1_{ab}(\mathbb{A}_F/F, U_n^*)]$$

Maintenant

$$\mathbf{H}^1_{ab}(\mathbb{A}_F/F, U_n^*) = \mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F/F, U_1^*) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

et ici encore les groupes endoscopiques sont de la forme $H = U_p^* \times U_q^*$, mais cette fois les éléments $s$ et $-s$ de $\check{I}$ correspondent au même caractère endoscopique et définissent donc la même donnée endoscopique.

## 2.3 Calcul de constantes

La stabilisation des termes elliptiques de la formule des traces (cf [KS], [Lab3] ou [Lab4]) fait apparaître des facteurs rationnels

$$\iota(\mathcal{E}) = \iota(L, H_{\mathcal{E}})$$

de sorte que

$$T_e^L(\phi) = \sum_{\mathcal{E}} \iota(\mathcal{E}) ST_e^{\mathcal{E}}(\phi^{\mathcal{E}})$$

Proposition 2.1: Si $H = U_p^* \times U_q^*$ avec $p+q=n$ et $p \neq q > 0$ on a

$$\iota(L_n^*, H) = \iota(U_n, H) = \frac{1}{2}$$

Si $q = 0$ c'est-à-dire $H = U_n^*$ on a

$$\iota(L_n^*, H) = \iota(U_n, H) = 1$$

Enfin, si $H = U_p^* \times U_q^*$ avec $p = q$ on a

$$\iota(L_n^*, H) = \iota(U_n, H) = \frac{1}{4}$$

Preuve: On sait que

$$\iota(L^*, H) = \frac{J(\theta)\tau(G)}{\lambda(\mathcal{E})c(L^*, H)\ d(L^*)\tau(H)}$$

et

$$\iota(U, H) = \frac{\tau(U)}{\lambda(\mathcal{E})c(U, H)\ d(U)\tau(H)}$$

Mais ici

$$J(\theta) = 2 \quad , \quad \tau(G) = 1 \quad , \quad \tau(U) = 2 \quad , \quad d(L) = c(L, H) = 1$$

et $\lambda(\mathcal{E}) = 1$ si $H_{\mathcal{E}} = U_p^* \times U_q^*$ avec $p \neq q$ alors que $\lambda(\mathcal{E}) = 2$ si $p = q$.

$\square$

## 2.4 Fonctions de Lefschetz et leur transfert

Soit $V$ une représentation rationnelle irréductible de $U^*(F \otimes \mathbb{R})$. On note $f_V$ une fonction d'Euler-Poincaré sur

$$U^*_\infty = U^*(F \otimes \mathbb{R})$$

relativement à $V$ et $\phi_W$ une fonction de Lefschetz pour $L^*_\infty$ attachée à $W = V \otimes V^{\theta^*}$.

Lemme 2.2: La fonction $\phi_W$ admet comme transfert stable $cf_V$ avec $c = a/b$ où $a = 2^{nd}$ et $b$ est l'ordre des L-paquets de séries discrètes pour $U^*_\infty$.

Preuve: Le cas des coefficients triviaux est traité dans [CL1] Corollaire A.1.2 et le cas général se traite de même[1] : on observe, en reprenant les calculs de [CL1] pages 120-121, que si $\gamma$ est elliptique régulier de norme $\delta$ les intégrales orbitales de $\phi_W$ et $f_V$ sont données par

$$\mathcal{O}_\delta(\phi_W) = \mathcal{O}_\gamma(f_V) = \text{ trace } (\gamma|V) \ .$$

Les éléments semi-simples non elliptiques ont des intégrales orbitales nulles. On en déduit que $\phi_W$ admet comme transfert $cf_V$ où $c$ est une constante. Il résulte des remarques de [CL1] page 122 que

$$c = a/b$$

où $a = 2^{nd}$ est l'ordre du groupe de 1-cohomologie galoisienne d'un tore maximal compact (or un tel tore est produit de $n \times d$ copies de $U(1)$) et $b$ est l'ordre des L-paquets de séries discrètes pour $U^*_\infty$.

□

**Remarque** – On a $b = b_0^d$ où $b_0$ est le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ avec $p = [\frac{n}{2}]$.

Lemme 2.3: Il y a une seule représentation unitaire irréductible générique $\pi_W$ de $GL(n,\mathbb{C})^d$ à cohomologie non triviale dans $W$ et on a

$$\text{trace } \pi_W(\phi_W) = \pm a \ .$$

le signe dépendant du choix du prolongement de $\pi_W$ à l'espace tordu.

[1] Une regrettable omission de signe entache le théorème A.1.1 sans remettre en cause la suite de cet article. Une nouvelle version, que l'on espère correcte, et qui traite le cas des coefficients quelconques, sera bientôt disponible [CL2].

Preuve: Pour calculer le nombre de Lefschetz il est commode d'utiliser l'automorphisme $x \mapsto {}^t\overline{x}^{-1}$, noté $\theta_{\text{coh}}$ : il fixe $K$ et agit par $-1$ sur le supplémentaire de l'algèbre de Lie de $K$. Par définition des fonctions de Lefschetz on a

$$\text{trace } \pi(\phi_W) = \sum (-1)^q \text{ trace } (\theta_{\text{coh}} | H^q(\mathfrak{g}, K; \pi \otimes \check{W})) \ .$$

Pour un groupe complexe les représentations unitaires irréductibles génériques sont des séries principales. Le calcul de la $\mathfrak{g}$-$K$-cohomologie pour une série principale se fait au moyen de la suite spectrale de Hochschild-Serre (cf. [BW] theorem 3.3 page 93) et on voit qu'il existe une unique représentation $\pi_W$, de la série principale, dont la cohomologie, en tant qu'espace vectoriel gradué, est non nulle. À un décalage de degré $l(s)$ près (où $l(s)$ est la longueur d'un certain élément $s$ du groupe de Weyl), la cohomologie est isomorphe à l'algèbre extérieure de $\mathfrak{a}$, l'algèbre de Lie de la partie déployée du tore maximal ; c'est une algèbre de Lie abélienne de dimension $nd$. L'automorphisme $\theta_{\text{coh}}$ agit par $(-1)^p$ sur $\wedge^p \mathfrak{a}$. La somme alternée des traces est donc la dimension de l'algèbre extérieure soit $2^{nd} = a$ ; c'est donc, au signe près, le nombre cherché.

□

# 3 Formule des traces

## 3.1 Termes géométriques

Soit $L$ un espace tordu sous un groupe $G$. Pour les applications que nous avons en vue ici on aura soit $L = L^* = G_n^* \rtimes \theta^*$ et on pose $\theta = \theta^*$ soit $L = G = U$ et dans ce cas $\theta = 1$. On note $A_G$ le tore déployé maximal de la restriction des scalaires à $\mathbb{Q}$ du centre $Z_G$ de $G$. On note $\mathfrak{A}_G$ la composante neutre de $A_G(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{a}_G$ son algèbre de Lie. On notera $\mathfrak{A}_L$ (resp. $\mathfrak{a}_L$) le sous-groupe des points fixes (resp. la sous-algèbre) sous $\theta$ dans $\mathfrak{A}_G$ (resp $\mathfrak{a}_G$).

On considère une fonction $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(L(\mathbb{A}_F))$ et l'opérateur $\rho(\phi)$ défini par la représentation régulière gauche de $L(\mathbb{A}_F)$ dans

$$L^2(\mathfrak{A}_G G(F) \backslash G(\mathbb{A}_F))$$

L'opérateur $\rho(\phi)$ est donc donné par le noyau

$$K(x,y) = \int_{z \in \mathfrak{A}_G} \sum_{\delta \in L(F)} \phi(x^{-1} \delta \, z \, y) \ dz$$

La formule des traces est l'égalité du développement géométrique et du développement spectral pour $T^L(\phi)$ la trace "renormalisée" de cet opérateur.

Le développement géométrique donné par l'intégrale du noyau sur la diagonale, mais dont on a retranché des contre-termes pour la rendre convergente, comporte en particulier la contribution des termes elliptiques c'est-à-dire l'intégrale sur la diagonale de la somme sur l'ensemble $L(F)_e$ des éléments elliptiques dans $L(F)$ :

$$T_e^L(\phi) = \int_{\mathfrak{A}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} \left( \int_{\mathfrak{A}_G} \sum_{\delta \in L(F)_e} \phi(x^{-1}\delta\, z\, x) \ dz \right) \ dx$$

Un calcul élémentaire [Lab3, 4.1] montre que

Proposition 3.1:

$$T_e^L(\phi) = J(\theta) \sum_{\delta \in L_e} a^L(\delta) \int_{I_\delta(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} \left( \int_{\mathfrak{A}_L} \phi(x^{-1}\delta\, z\, x)\, dz \right) \ d\dot{x}$$

où $L_e$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison dans $L(F)_e$, le sous-groupe $I_\delta$ est la composante neutre du centralisateur de $\delta$, le nombre $a^L(\delta)$ étant défini par

$$a^L(\delta) = \text{ vol } (\mathfrak{A}_L I_\delta(F)\backslash I_\delta(\mathbb{A}_F))$$

enfin

$$J(\theta) = |\det\, (\theta - 1|\mathfrak{a}_G/\mathfrak{a}_L)| \ .$$

On prendra garde que le facteur $J(\theta)$ n'apparaît pas dans les formules d'Arthur par suite d'un choix légèrement différent de l'opérateur dont on calcule la trace renormalisée. Nous suivons ici les conventions de [KS] et [Lab3].

## 3.2 Termes spectraux

L'expression spectrale comporte une somme discrète et une somme continue

$$T^L(\phi) = T^L_{disc}(\phi) + T^L_{cont}(\phi) \ .$$

Dans les applications que nous avons en vue la somme continue sera nulle

$$T^L_{cont}(\phi) = 0 \ .$$

La partie discrète $T^L_{disc}$ contient, entre autre, la trace dans le spectre discret.

$$T^L_{G,disc}(\phi) = \text{ trace } (\rho(\phi)|L^2_{disc}(\mathfrak{A}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)) = \sum_\pi m_G(\pi) \text{ trace } \pi(\phi)$$

la somme portant sur les représentation $\pi$ du spectre discret

$$L^2_{disc}(\mathfrak{A}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$$

qui sont $\theta$-stables et donc se prolongent en des représentations du groupe produit semi-direct

$$G(\mathbb{A}_F) \rtimes < \theta >$$

avec multiplicité $m_G(\pi)$. Des termes supplémentaires discrets, mais provenant du spectre continu, peuvent apparaître et que nous allons décrire.

On note $\mathcal{L}^0$ l'ensemble des sous-groupes de Levi de $G$ contenant un sous-groupe de Levi minimal $\theta$-stable fixé $M_0$. On note $W^L$ l'ensemble de Weyl de $L$ c'est-à-dire $W^G \rtimes \theta$. Soit $M \in \mathcal{L}^0$ un sous-groupe de Levi de $G$ ; on notera $W^L(M)$ le quotient de l'ensemble des $s \in W^L$ tels que $s(M) = M$ par $W^M$ le groupe de Weyl de $M$. On observera que $W^G(M)$ est un groupe. On notera $W^L(M)_{reg}$ le sous-ensemble des $s$ avec

$$\det \ (s - 1|\mathfrak{a}_M/\mathfrak{a}_G) \neq 0$$

La partie discrète de la formule des traces est donnée par Arthur [Ar1, § 4] (voir aussi [Ar4] page 237) sous la forme suivante :

$$T^L_{disc}(\phi) = \sum_{M\in\mathcal{L}^0} \frac{|W^M|}{|W^G|} \ T^L_{M,disc}(\phi)$$

ou si on préfère

$$T^L_{disc}(\phi) = \sum_{M\in\mathcal{L}^0/W^G} \frac{1}{|W^G(M)|} \ T^L_{M,disc}(\phi)$$

où la somme porte sur un ensemble de représentants des orbites de $W^G$ dans $\mathcal{L}^0$ avec

$$T^L_{M,disc}(\phi) = \sum_{s\in W^L(M)_{reg}} |\det \ (s-1|\mathfrak{a}_M/\mathfrak{a}_G)|^{-1} \text{ trace } (M_{Q|s(Q)}(0)\rho_Q(s,0,\phi))$$

Dans cette formule $Q$ est un sous-groupe parabolique de $G$, admettant $M$ comme sous-groupe de Levi ; l'opérateur d'entrelacement $M_{Q|s(Q)}(0)$ et l'opérateur $\rho_Q(s, 0, \phi)$ entre deux représentations induites, à partir de $Q$ et de $s(Q)$, du spectre discret de $M$ sont définis par Arthur dans [Ar1]. Ils seront explicités ci-dessous.

Comme déjà observé pour le développement géométrique, notre formule et celle d'Arthur, diffèrent par le facteur $J(\theta)$. Le déterminant de $(s-1)$ est calculé chez Arthur sur le quotient $\mathfrak{a}_M/\mathfrak{a}_L$ alors que nous le calculons sur le quotient $\mathfrak{a}_M/\mathfrak{a}_G$. De plus nous avons omis la sommation partielle (utilisée chez Arthur) suivant les modules des caractères infinitésimaux à l'infini, désormais inutile puisque, grâce à Müller, nous savons que le spectre discret est traçable et donc la série est absolument convergente.

Soit $\pi_M$ une représentation automorphe appartenant au spectre discret de $M$ et soit $Q$ un sous-groupe parabolique de Levi $M$ et de radical unipotent $N$. On notera $V_Q(\pi_M, \lambda)$ l'espace de la représentation obtenu par induction parabolique à partir de l'espace des fonctions $\varphi_\lambda$ où $\varphi$ est une fonction sur $G(\mathbb{A}_F)$ invariante à gauche par $Q(F)N(\mathbb{A}_F)$ et telle que pour tout $x \in G(\mathbb{A}_F)$ la fonction

$$m \mapsto \varphi(mx)$$

soit une forme automorphe relative à $\pi_M$ et où, avec des notations standard,

$$\varphi_\lambda(x) = e^{<\lambda+\delta_Q|H_Q(x)>}\varphi(x)$$

où $\delta_Q$ est la demi-somme des racines positives pour $Q$. Soit $w_s$ un représentant de $s$ dans $L(F)$. L'opérateur $\rho_Q(s, \lambda, y)$ est défini par

$$\rho_Q(s, \lambda, y)\varphi_\lambda(x) = \varphi_\lambda(w_s^{-1} x\, y)$$

et envoie $V_Q(\pi_M, \lambda)$ dans $V_{s(Q)}(s(\pi_M), s(\lambda))$. On pose

$$N_s = N \cap s(N)\backslash N$$

et

$$M_{Q|s(Q)}(\lambda)\rho_Q(s, \lambda, y)\varphi_\lambda(x) = \int_{N_s(\mathbb{A}_F)} \varphi_\lambda(w_s^{-1} n_s\, x\, y)\, dn_s$$

l'intégrale ne converge que pour $\lambda$ dans un cône mais admet un prolongement méromorphe qui est holomorphe en $\lambda = 0$. L'opérateur composé ainsi défini envoie $V_Q(\pi_M, \lambda)$ dans $V_Q(s(\pi_M), s(\lambda))$. On notera

$$I_Q(\pi_M, s)(y)$$

la restriction à l'espace $V_Q(\pi_M, 0)$ du produit $M_{Q|s(Q)}(0)\rho_Q(s,0,y)$. Seules les représentations qui sont induites à partir de représentations $s$-stables c'est-à-dire telles que

$$s(\pi_M) = \pi_M$$

peuvent fournir une contribution non triviale à la formule des traces. Nous dirons que l'action de $L(\mathbb{A}_F)$ est définie au moyen de la normalisation d'Arthur.

Il convient parfois de remplacer l'opérateur d'entrelacement qui intervient dans la définition de l'opérateur d'Arthur $I_Q(\pi_M, s)(y)$ par un opérateur normalisé de sorte que

$$I_Q(\pi_M, s)(y) = n(\pi_M, s) R_Q(\pi_M, s)(y)$$

où $n(\pi_M, s)$ est un facteur de normalisation. (C'est nécessaire par exemple si on souhaite obtenir des opérateurs locaux satisfaisant de bonnes équations fonctionnelles ; voir [Ar3,§2]).

Proposition 3.2: La partie discrète du développement spectral de la formule des traces est donnée par

$$T^L_{disc}(\phi) = \sum_{M\in\mathcal{L}^0/W^G} \sum_{s\in W^L(M)_{reg}} \sum_{\pi_M} a^L_{disc,M}(\pi_M, s) \text{ trace } R_Q(\pi_M, s)(\phi)$$

avec

$$a^L_{disc,M}(\pi_M, s) = \frac{m_M(\pi_M)\, n(\pi_M, s)}{|\det\, (s-1|\mathfrak{a}_M/\mathfrak{a}_G)|\ |W^G(M)|}$$

où $m_M(\pi_M)$ est la multiplicité de $\pi_M$ dans le spectre discret de $M$.

On remarquera qu'en général les coefficients $a^L_{disc,M}$ ne sont ni entiers ni même positifs : par exemple pour $L = G = GL(2)$ et $M$ le sous-groupe diagonal, un coefficient $-1/4$ apparait ainsi dans un terme spectral de la formule des traces classique.

Pour la formule des traces sur $L = G$, de tels termes pour $M \neq G$ seront nuls dans nos applications puisque l'on ne considérera comme fonction à l'infini que des pseudo-coefficients de séries discrètes (cf.[Ar2] p.268). Mais pour $L = L^*$ ces termes donneront, même dans le cas “simple”, des contributions non triviales.

## 3.3 Normalisation des entrelacements

La représentation $V_Q(\pi_M,\lambda)$ peut se réaliser concrètement comme représentation automorphe au moyen de séries d'Eisenstein : pour $\varphi$ comme cidessus on pose

$$E_Q(x,\varphi,\lambda) = \sum_{\gamma\in Q(F)\backslash G(F)} \varphi_\lambda(\gamma x)$$

la série ne convergeant que pour $\lambda$ dans un cône et on définit

$$E_Q(x,\varphi) = E_Q(x,\varphi,0)$$

par prolongement analytique. Il est naturel de définir $\rho(y)$ pour $y \in L(\mathbb{A}_F)$ par

$$\rho(y)E_Q(x,\varphi) = E_Q(w^{-1}\,x\,y,\varphi)$$

où $w$ peut être choisi arbitrairement dans $L(F)$ compte tenu de l'invariance de $E_Q$ à gauche par $G(F)$. C'est ce que nous appelerons la normalisation automorphe. On a, pour $\lambda$ dans le cône de convergence

$$\rho(y)E_Q(x,\varphi,\lambda) = \sum_{\gamma\in Q(F)\backslash G(F)} \varphi_\lambda(\gamma w^{-1}xy)$$

soit encore

$$\rho(y)E_Q(x,\varphi,\lambda) = \sum_{\xi\in L(F)/Q(F)} \varphi_\lambda(\xi^{-1}xy)$$

Supposons maintenant que $\pi_M$ est une représentation automorphe cuspidale pour $M$. Un calcul classique (voir par exemple [Langlands, Lemma 3 p. 237]) montre que terme constant de $E_Q$ le long de $Q$

$$C_QE_Q(x,\varphi,\lambda) = \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)} E_Q(nx,\varphi,\lambda)dn$$

peut s'écrire (pour $\lambda$ dans le cône de convergence) :

$$\sum_{w_i\in W^G(M)} \int_{N_i(\mathbb{A}_F)} \varphi_\lambda(w_i^{-1}n_ixy)\,dn_s$$

où $N_i$ est un quotient de sous-groupes unipotents convenables. De même, le terme constant de $\rho(y)E_Q$

$$C_Q\rho(y)E_Q(x,\varphi,\lambda) = \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)} \rho(y)E_Q(nx,\varphi,\lambda)dn$$

peut s'écrire (pour $\lambda$ dans le cône de convergence) :

$$\sum_{w_j\in W^L(M)}\int_{N_j(\mathbb{A}_F)}\varphi_\lambda(w_j^{-1}n_jxy)\,dn_s$$

où $N_j$ est un quotient de sous-groupes unipotents convenables. On observe que le terme pour $w_j=w_s$ est l'intégrale qui définit l'opérateur d'Arthur :

$$\int_{N_s(\mathbb{A}_F)}\varphi_\lambda(w_s^{-1}n_sxy)\,dn_s$$

Supposons de plus que $M$ est tel que le groupe $W^G(M)$ soit trivial. Sous ces hypothèses le terme constant le long de $Q$ de $E_Q$ se réduit à $\varphi_\lambda$ :

$$C_QE_Q(x,\varphi,\lambda)=\varphi_\lambda(x)$$

et de même le terme constant de $\rho(y)E_Q$ se réduit au terme relatif à $w_s$ :

$$C_Q\rho(y)E_Q(x,\varphi,\lambda)=I_Q(\pi_M,s)(y)\varphi_\lambda(x)$$

Ceci montre que la normalisation d'Arthur est induite, via le terme constant, par la normalisation automorphe :

$$C_Q\circ\rho(y)=I_Q(\pi_M,s)(y)\circ C_Q$$

Supposons maintenant $G$ quasi-déployé et $\theta$ un automorphisme qui préserve un épinglage ; on notera $w_0$ un élément de $L(F)$ qui le représente. Considérons un caractère $\psi$ de $N_0(F)\backslash N_0(\mathbb{A}_F)$, où $N_0$ est la radical unipotent du sous-groupe de Borel de l'épinglage, en position générale et $\theta$-invariant. On dispose de l'intégrale de Whittaker

$$W(x,E_Q)=\int_{N_0(F)\backslash N_0(\mathbb{A}_F)}E_Q(nx,\varphi)\psi(n)\,dn$$

et on fait agir $y\in L(\mathbb{A}_F)$ (avec un abus de notation évident) par

$$\rho(y)W(x,E_Q)=W(w_0^{-1}\,xy,E_Q)$$

ce qui, compte tenu de l'invariance de $\psi$, s'écrit encore

$$\int_{N_0(F)\backslash N_0(\mathbb{A}_F)}E_Q(w_0^{-1}\,nxy,\varphi)\psi(n)\,dn=W(x,\rho(y)E_Q)$$

c'est à dire que l'on a

$$\rho(y)W(x, E_Q) = W(x, \rho(y)E_Q)$$

Ceci montre que la normalisation automorphe induit la normalisation de Whittaker globale. Maintenant la fonctionnelle de Whittaker globale est un produit de fonctionnelles locales, à ceci près que pour que ce produit converge il est nécessaire de renormaliser les facteurs (voir par exemple [Sha,§5]) ; l'existence d'une factorisation montre que la normalisation de Whittaker locale en chaque place fournit la normalisation globale. En conclusion on a montré que

Proposition 3.3: Soit $\pi_M$ est une représentation automorphe cuspidale pour $M$, stable par $s$. Supposons que $M$ est tel que $W^G(M)$ soit trivial. Alors, la normalisation d'Arthur de l'action de $L(\mathbb{A}_F)$ (définie au moyen de l'opérateur d'entrelacement non normalisé) dans $V_Q(\pi_M, s)$ est compatible avec la normalisation de Whittaker localement partout.

## 3.4 Deux cas simples

Il nous reste à discuter deux cas particuliers. Supposons tout d'abord que

$$L = L^* = G_n^* \rtimes \theta_n^*$$

et considérons

$$M = G_{n_1}^* \times \cdots \times G_{n_r}^*$$

On pose

$$\theta_M^* = \theta_{n_1}^* \times \cdots \times \theta_{n_r}^*$$

Lemme 3.4: Soit $s \in W^{L^*}(M)_{reg}$ et soit

$$\pi_M = \pi_1 \times \cdots \times \pi_r$$

une représentation de $M$ telle que $s(\pi_M) \simeq \pi_M$ alors

$$\theta_M^*(\pi_M) \simeq \pi_M$$

Preuve: L'action de $s$ sur $\mathfrak{a}_M/\mathfrak{a}_G$ est le produit de l'action induite par un élément $w$ du groupe de Weyl de $G_n^*$ et de la symétrie $a \mapsto -a$ qui est induite par $\theta_M^*$. Pour que $s$ soit régulier il est nécessaire que $-1$ ne soit pas valeur propre de l'action induite par $w$. Mais $w$ induit une permutation des facteurs de $\pi$. Pour que la valeur propre $-1$ n'apparaisse pas il est nécessaire que cette permutation ne comporte que des cycle de longueur impaire. Comme ailleurs $\theta_M^*$ est d'ordre 2, et donc d'ordre premier à l'ordre des cycles, la condition $s$ régulier impose que pour chaque facteur $\pi_i$ on ait

$$\theta_{n_i}^*(\pi_i) \simeq \pi_i$$

□

Proposition 3.5: Lorsque $L = L_{n+1}^*$ avec $n \geq 2$, la somme des contribution, à la partie discrète de la formule des traces, des sous-groupes de Levi $M$ isomorphes à $G_1^* \times G_n^*$ est

$$\frac{1}{2} \sum_{s(\pi_M) \simeq \pi_M} \text{trace } I_Q(\pi_M, s)(\phi)$$

où la somme porte sur les $\pi_M$ dans le spectre discret de $M$, soit encore

$$\frac{1}{2} \sum_{s(\pi_M) \simeq \pi_M} n(\pi_M, s) \text{ trace } R_Q(\pi_M, s)(\phi) \ .$$

Si $R_Q$ est défini au moyen de la normalisation de Langlands-Shahidi [Sha] pour les opérateurs d'entrelacement et si de plus $\pi_M$ est cuspidale on a

$$n(\pi_M, s) = 1$$

Preuve: Tout d'abord on utilise que pour les groupes du type $GL(n)$ on dispose du théorème de multiplicité un. Par ailleurs, dans notre cas

$$W^L(M) = W^L(M)_{reg}$$

est réduit à un élément $s$ : la classe de $\theta_M^*$, et on a

$$|\det\ (s - 1|\mathfrak{a}_M/\mathfrak{a}_G)| = 2 \ .$$

Par ailleurs, si

$$\pi_M = \tau \boxplus \chi$$

avec $\tau$ une représentation cuspidale de $G_n^*$ et $\chi$ un Größencharacter pour $E$, le facteur de normalisation de Langlands-Shahidi $n(\pi_M, s)$ est la valeur en $\sigma = 0 \in \mathbb{R}$ de

$$\frac{L(\tau \otimes \chi^{-1}, 1-\sigma)}{L(\tau \otimes \chi^{-1}, 1+\sigma)}$$

où $L$ est la fonction $L$ de Godement-Jacquet pour $G_n^*$. Comme $\tau$ est cuspidale cette fonction est holomorphe et on a

$$n(\pi_M, s) = 1$$

□

## 3.5 Formule des traces simple

On dira que, pour un choix convenable de la fonction test $\phi$, la formule des traces est simple si seuls apparaissent des termes elliptiques dans le développement géométrique et des termes discrets dans le développement spectral.

Rappelons que la première apparition du principe qui gouverne les propositions ci-dessous se trouve dans Jacquet-Langlands. Nous l'utiliserons ici sous la forme suivante donnée en deux propositions. Voici la proposition géométrique.

Proposition 3.6: Soit $F$ est un corps totalement réel de degré $\geq 2$. Soit $\phi_\infty$ une fonction de Lefschetz, produit de fonctions très cuspidales en chaque place réelle. Si de plus en une place finie $v$ la fonction $\phi_v$ est à support régulier on a alors

$$T^L(\phi) = T_e^L(\phi)$$

Preuve: Une assertion similaire mais pour la formule invariante d'Arthur est établie dans [Ar1]. Pour la formule des traces non invariante une preuve plus élémentaire, en ce sens qu'elle n'utilise que la forme primitive de la formule des traces et ne fait pas appel au théorème de Paley Wiener scalaire, a été donnée dans [BLS]. Rappelons que la preuve utilise les formules de descente et décomposition pour les intégrales orbitales pondérées. On prouve ainsi l'annulation des contributions à la formule des traces des éléments semi-simples non elliptiques si les fonctions sont cuspidales en un nombre assez grand de places. Pour se limiter à deux places on invoque de plus le fait que les fonctions de Lefschetz peuvent être choisies très cuspidales au sens de Laumon (cf. [Lab2]).

□

Donnons maintenant la proposition spectrale.

Proposition 3.7: Soit $F$ est un corps totalement réel de degré $d \geq 2$. Soit $\phi_\infty$ une fonction de Lefschetz produit de fonctions très cuspidales en chaque place réelle. On a alors

$$T^L(\phi) = T^L_{disc}(\phi) \ .$$

Preuve: La décomposition spectrale de la formule des traces invariante d'Arthur ne comporte que des termes discrets dès que $\phi$ est cuspidale en une place. Si nous utilisons la formule des traces sous sa forme primitive on aura le même résultat en utilisant deux places où la fonction est très cuspidale. La preuve est alors similaire à celle de 3.6 : il convient d'utiliser les formules de descente et décomposition pour les caractères pondérés.

□

Corollaire 3.8: Si $F$ est un corps totalement réel de degré $\geq 2$ avec $\phi$ comme en 3.6 ci-dessus on a

$$T^{L^*}(\phi) = T^{L^*}_e(\phi) = T^{L^*}_{disc}(\phi) \ .$$

De même

$$T^U(f) = T^U_e(f) = T^U_{disc}(f) \ .$$

si $f_\infty$ une fonction d'Euler-Poincaré produit de fonctions très cuspidales en chaque place réelle et $f_v$ à support régulier en une place finie $v$.

# 4 Stabilisation et changement de base

## 4.1 Termes elliptiques et changement de base

Modulo la conjecture de transfert (ou si on préfère le Lemme Fondamental) et qui, compte tenu des travaux récents de Ngô et Waldspurger est désormais un théorème, on sait stabiliser les termes elliptiques (cf [Lab3] et [Lab4]) :

$$T_e^L(\phi) = \sum_{\mathcal{E}\in\underline{\mathcal{E}}(L)} \iota(\mathcal{E}) ST_e^{\mathcal{E}}(\phi^{\mathcal{E}})$$

où $\phi^{\mathcal{E}}$ est un transfert de $\phi$ pour la donnée endoscopique $\mathcal{E}$. Toutefois, dans notre situation, on a une preuve plus élémentaire.

Rappelons tout d'abord que $U^*$ est le groupe endoscopique principal pour $L^*$ ; c'est le groupe correspondant au caractère endoscopique trivial. On dit que $f_v \in \mathcal{C}_c^\infty(U^*(F_v))$ est le transfert stable de $\phi_v \in \mathcal{C}_c^\infty(L^*(F_v))$ si pour $\delta \in L(F_v)$ semi-simple régulier avec pour norme $\gamma \in U^*(F_v)$ on a égalité des intégrales orbitales stables

$$SO_\delta(\phi_v) = SO_\gamma(f_v)$$

et

$$SO_\gamma(f_v) = 0$$

si $\gamma$ n'est pas une norme. On dira aussi que $f_v$ et $\phi_v$ sont associées.

Lemme 4.1: Pour toute $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(L^*(\mathbb{A}_F))$ il existe $f \in \mathcal{C}_c^\infty U^*(\mathbb{A}_F))$ associée (localement partout). Réciproquement toute $f$ est associée à une $\phi$.

Preuve: Le transfert sur le groupe endoscopique principal c'est-à-dire l'existence du transfert pour le changement de base stable est connu [Lab3] : il se ramène par descente au cas des formes intérieures ce qui est acquis grâce aux travaux de Waldspurger. Observons de plus qu'il résulte de [Lab3 ; 2.5.3] que, dans notre cas, la norme pour le changement de base est surjective et que donc pour toute $f$ sur $U^*$ il existe $\phi$ sur $L$ telle que $f$ et $\phi^{U^*}$ sont associées. □

Par ailleurs le lemme fondamental stable pour le changement de base, est dû à Kottwitz pour l'élément neutre et s'étend à toute l'algèbre de Hecke sphérique par les techniques de Clozel ou Labesse. Aux places archimédiennes le transfert a été explicité plus haut en 2.2.

Théorème 4.2: Si $\phi_\infty$ est une fonction de Lefschetz, et si $f$ est la fonction $\phi^{U^*}$, on a

$$T_e^{L^*}(\phi) = ST_e^{U^*}(f) \ .$$

Preuve: Ce résultat est déjà utilisé dans [CL1] et dans [HL]. Rappelons en la preuve. Soit $\phi_\infty$ une fonction de Lefschetz ; on sait que $\phi_\infty$ est stabilisante [CL1, Corollaire A.1.2]. Ceci signifie que $\phi_\infty$ est cuspidale (c'est-à-dire que les intégrales orbitales $\mathcal{O}_\delta(\phi)$ des éléments $\delta$ semi-simples réguliers non-elliptiques sont nulles) et que les $\kappa$-intégrales orbitales $\mathcal{O}_\delta^\kappa(\phi_\infty)$ sont nulles pour tout $\delta$ semi-simple $\mathbb{R}$-elliptique sauf, peut-être, si $\kappa = 1$. De plus le lemme A.2.1 de [CL1] affirme que $\{\infty\}$ l'ensemble des places archimédiennes est un ensemble $(G^*, U^*)$ essentiel au sens de [Lab3]. Le corollaire de ces observations est que seul le groupe endoscopique principal $H = U^*$ contribue à la stabilisation de la partie elliptique de la formule des traces tordue pour $L^*$. On a donc

$$T_e^{L^*}(\phi) = \iota(L^*, U^*) ST_e^{U^*}(f)$$

L'assertion

$$\iota(L^*, U^*) = 1$$

résulte de 2.1 et est reprise de [CL1, A.3.1].

□

**Remarque** – En reprenant les arguments de [CL1, Lemme A.2.1] on voit que ce théorème est encore essentiellement vrai plus généralement si on remplace $U^*$ par un groupe réductif $G$ quasi-déployé sur $F$ et $L^*$ par l'espace tordu associé au groupe obtenu à partir de $G$ par extension puis restriction des scalaires pour $E/F$ sous les hypothèses suivantes :

– le groupe dérivé de $G$ est simplement connexe,

– le cocentre de $G$ est un produit d'un tore déployé et d'un produit de tores $U(1)$ associés à $E/F$.

Toutefois la présence d'un tore déployé introduit une constante dans l'égalité.

## 4.2 Avatars stables et élimination d'une restriction

Nous souhaitons établir, au moins pour les groupes unitaires, l'analogue stable des propositions 3.6 et 3.7 :

$$ST^{U^*}(f) = ST_e^{U^*}(f) = ST_{disc}^{U^*}(f)$$

Il faut au préalable définir le premier et le dernier terme de ces égalités sans faire appel aux résultats d'Arthur sur la stabilisation qui eux supposent non seulement la validité du lemme fondamental mais aussi celle du lemme fondamental pondéré.

Nous disposons pour les groupes unitaires du théorème de Laumon-Ngô[2]. Compte tenu des résultats de Waldspurger, le transfert endoscopique existe. Plus précisément, pour toute donnée endoscopique $\mathcal{E}$ pour $U^*$ on dispose d'une fonction $f^{\mathcal{E}}$ sur le groupe endoscopique $H(\mathbb{A}_F)$ associé à $\mathcal{E}$ et sur laquelle les distributions invariantes sont bien définies par la donnée de $f$. On prendra garde que par contre les intégrales orbitales pondérées ainsi que les caractères pondérés de $f^{\mathcal{E}}$ ne sont pas uniquement définis par la donnée de $f$.

Nous faisons l'hypothèse que $f_v$ est très cuspidale aux places $v|\infty$ et que le nombre de ces places est au moins $2$ ; il en est de même pour $f_v^{\mathcal{E}}$ et il en résulte que les termes non invariants de la formule des traces ordinaire $T^{\mathcal{E}}(f^{\mathcal{E}}) = T^H(f^{\mathcal{E}})$, sur $H$, s'annulent et donc l'application

$$f \mapsto T^{\mathcal{E}}(f^{\mathcal{E}})$$

est bien définie. On observe enfin que les groupes endoscopiques d'un groupe unitaire sont des produits de groupes unitaires. Compte tenu de ces remarques on peut définir la distribution $ST^{U^*}$ pour des fonctions de ce type par récurrence en la supposant définie pour les groupes endoscopiques autres que le groupe endoscopique principal (qui ici est $U^*$ lui même) par la formule

$$ST^{U^*}(f) = T^{U^*}(f) - \sum_{\mathcal{E}\in\underline{\mathcal{E}}^0(U^*)} \iota(\mathcal{E}) ST^{\mathcal{E}}(f^{\mathcal{E}})$$

où $\underline{\mathcal{E}}^0(U^*)$ est le sous-ensemble des donnée endoscopiques non principales pour $U^*$. On définit de manière analogue $ST^{U^*}_{disc}(f)$.

Proposition 4.3: Supposons que $U^*$ est un groupe unitaire et que $F$ est un corps totalement réel de degré $\geq 2$. Si $f_\infty$ est une fonction d'Euler-Poincaré, produit en chaque place réelle d'une fonction choisie très cuspidale, et si de plus en une place finie $v$ la fonction $f_v$ est à support régulier on a alors

$$ST^{U^*}(f) = ST^{U^*}_e(f) = ST^{U^*}_{disc}(f)$$

[2] Ngô a désormais traité le cas d'un groupe quelconque

Preuve: On définit $ST^{U^*}$ par récurrence en la supposant définie pour les groupes endoscopiques autres que le groupe endoscopique principal. On suppose de plus que l'assertion est vraie pour ces groupes. On a donc, par définition,

$$ST^{U^*}(f) = T^{U^*}(f) - \sum_{\mathcal{E}\neq 1} \iota(\mathcal{E}) ST^{\mathcal{E}}(f^{\mathcal{E}})$$

et par ailleurs on sait que

$$ST_e^{U^*}(f) = T_e^{U^*}(f) - \sum_{\mathcal{E}\neq 1} \iota(\mathcal{E}) ST_e^{\mathcal{E}}(f^{\mathcal{E}})$$

On observe ensuite que les éléments elliptiques $U^*$-réguliers sont a fortiori $H$-réguliers. La première assertion

$$ST^{U^*}(f^{U^*}) = ST_e^{U^*}(f^{U^*})$$

résulte donc de 3.6 et de l'hypothèse de récurrence. La seconde

$$ST^{U^*}(f) = ST_{disc}^{U^*}(f)$$

résulte de 3.7 et de l'hypothèse de récurrence.

□

Nous allons maintenant combiner les résultats de 4.2 et 4.3 et éliminer l'hypothèse sur le support aux places finies.

Théorème 4.4: Soit $F$ est un corps totalement réel de degré $d \geq 2$ et soit $U^*$ un groupe unitaire. Soient $f$ et $\phi$ associées et on suppose que $\phi_\infty$ est une fonction de Lefschetz. On suppose de plus que $\phi_\infty$ et $f_\infty$ sont choisies comme produits de fonctions très cuspidales en chaque place. On a alors

$$T_{disc}^{L^*}(\phi) = ST_{disc}^{U^*}(f)$$

Preuve: Supposons pour l'instant que de plus en une place finie $v$ la fonction $\phi_v$ est à support régulier, on obtient alors en combinant 3.8, 4.2 et 4.3

$$T_{disc}^{L^*}(\phi) = T_e^{L^*}(\phi) = ST_e^{U^*}(f) = ST_{disc}^{U^*}(f)$$

On choisit une place $v$ finie, non ramifiée pour $F$ et déployée dans $E$. En une telle place $U_v^* = GL(n, F_v)$. Pour $\phi_v$ on considère une fonction élémentaire au sens de [Lab1] fortement régulière (les valeurs propres de l'élément semi-simple définissant $\phi_v$ a des valeurs propres de modules deux à deux distincts). Les arguments de [Lab1] montrent que l'égalité

$$T_{disc}^{L^*}(\phi) = ST_{disc}^{U^*}(f)$$

qui est vraie si $\phi_v$ est élémentaire fortement régulière fournit la même identité mais avec pour $\phi_v$ une fonction dans l'algèbre de Hecke sphérique. En variant $v$ on obtient l'identité cherchée en général.

□

On en déduit une assertion analogue pour la formule des traces invariante. On note $I$ (resp. $SI$) les distributions invariantes (resp. stablement invariantes) d'Arthur ; on a le corollaire suivant :

Corollaire 4.5: Soit $F$ est un corps totalement réel de degré $d \geq 2$ et soit $U^*$ un groupe unitaire. Si $\phi_\infty$ est une fonction de Lefschetz, alors

$$I^{L^*}(\phi) = SI^{U^*}(f)$$

Preuve: Il suffit d'observer que sous les hypothèses de 4.4 on a

$$I^{L^*}(\phi) = T_{disc}^{L^*}(\phi)$$

□

**Remarque** – L'hypothèse sur le degré de $F$ dans 4.4 et 4.5 est sans doute superflue mais, dans le cas $d = 1$, la preuve en serait plus difficile : les termes d'erreur qui mesurent les différences

$$T_{disc}^{L^*}(\phi) - T_e^{L^*}(\phi) \qquad \text{et} \qquad ST_{disc}^{U^*}(f) - ST_e^{U^*}(f)$$

ne sont plus automatiquement nuls et il convient établir leur égalité.

Théorème 4.6: Soit $F$ est un corps totalement réel de degré $d \geq 2$ et soit $U$ un groupe unitaire. On suppose de plus que $f_\infty$ est choisie comme produits de fonctions très cuspidales en chaque place. On a alors

$$T_{disc}^{U}(f) = \sum \iota(U, H)\ ST_{disc}^{H}(f^H)$$

Preuve: On sait que

$$T_e^U(f) = \sum \iota(U,H)\ ST_e^H(f^H)$$

pour toute fonction $f$ et donc, compte tenu de 3.8 et 4.3, on a

$$T_{disc}^U(f) = \sum \iota(U,H)\ ST_{disc}^H(f^H)$$

si $f_v$ est à support régulier en une place finie. Supposons cette place déployée dans $E/F$ ; en de telles places les groupes endoscopiques sont de sous-groupes de Levi et le transfert endoscopique est donné par le calcul du terme constant. En faisant appel aux fonctions élémentaires comme ci-dessus on élimine la condition de support.

□

Dans cet énoncé, les condition sur $U$, $F$ et $f$ ne sont là que pour simplifier les preuves. Le théorème en toute généralité est dû à J. Arthur modulo le lemme fondamental pondéré annoncé par Chaudouard et Laumon.

# 5 Applications

Dans toute cette partie $F$ est un corps totalement réel de degré $\geq 2$ et $U$ un groupe unitaire forme intérieure de $U^*$. L'hypothèse sur le degré de $F$ n'intervient ici que pour pouvoir invoquer 4.4 et 4.6. Comme déjà observé ci-dessus, elle n'est sans doute pas nécessaire.

## 5.1 Le résultat principal

Théorème 5.1: Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(U(\mathbb{A}_F))$. On suppose que $f_\infty$ est un pseudo-coefficient de série discrète choisi très cuspidal en chaque place. Il existe pour chaque $H$ une fonction $\phi^H$ sur $L^H(\mathbb{A}_F)$, très cuspidale en chaque place réelle, admettant $f^H$ comme transfert stable (pour le changement de base) sur $H(\mathbb{A}_F)$ et on a alors l'identité suivante :

$$T_{disc}^U(f) = \sum \iota(U,H)\ T_{disc}^{L^H}(\phi^H)$$

Preuve: L'existence de $\phi^H$ résulte de la surjectivité de la norme pour le changement de base. Sous nos hypothèses simplificatrices on a d'une part la formule pour le changement de base 4.4

$$T_{disc}^L(\phi) = ST_{disc}^{U^*}(f^{U^*})$$

avec $\phi = \phi^{U^*}$ et plus généralement

$$T_{disc}^{L^H}(\phi^H) = ST_{disc}^H(f^H)$$

et on a d'autre part la formule de stabilisation 4.6

$$T_{disc}^U(f) = \sum \iota(U,H)\ ST_{disc}^H(f^H)$$

On obtient en les combinant l'identité souhaitée.

□

Soit $\sigma$ une représentation automorphe cuspidale pour $U$ et telle que $\sigma_\infty$ est une série discrète. Nous dirons que $\sigma$ vérifie hypothèse $(*)$ si la propriété suivante est vraie :
$(*)$ *Soit $f_\infty$ un pseudo-coefficient pour $\sigma_\infty$. Les représentations $\sigma'$ du spectre discret de $U$ avec $\sigma'_f \simeq \sigma_f$ sont telles que les entiers* trace $\sigma'_\infty(f_\infty)$ *sont tous de même signe que* trace $\sigma_\infty(f_\infty)$

La propriété $(*)$ a été établie pour toutes les représentations à cohomologie de certain groupes unitaires anisotropes par Kottwitz. On observe que $(*)$ est automatiquement vérifiée si le paramètre de $\sigma_\infty$ est assez régulier car alors les seules représentations unitaires avec le même caractère infinitésimal sont les séries discrètes du $L$-paquet de $\sigma_\infty$.

Corollaire 5.2: Soit $\sigma$ une représentation du spectre discret pour $U$ qui vérifie la propriété $(*)$. On suppose que $\sigma_\infty$ est une représentation de la série discrète. Alors il existe une partition

$$n = n_1 + \cdots + n_r$$

et une collection $\pi_i$ de représentation automorphes discrètes et $\theta_{n_i}^*$-stables telles que

$$\pi_1 \boxplus \cdots \boxplus \pi_r$$

définisse un changement de base faible pour $\sigma$

Preuve: Nous allons esquisser la preuve de ce corollaire. Soient $\sigma$ et $\sigma'$ deux représentations automorphes. On dira que $\sigma'$ est faiblement équivalente à $\sigma$ si $\sigma'_v \simeq \sigma_v$ pour presque toute place $v$. Les classes d'équivalence pour cette relation seront appelées paquets automorphes. En séparant les chaînes de valeurs propres de Hecke pour $G_n^*$ dans l'identité de formules des traces donnée par 5.1, on sépare les paquets automorphes et obtient une identité raffinée où seules interviennent à gauche les représentations appartenant à un même paquet automorphe ; on peut d'autre part invoquer la description par Mœglin et Waldspurger du spectre discret pour $GL(n)$ et d'autre part la classification de Jacquet-Shalika des représentation automorphes pour $GL(n)$ pour conclure que seules des représentations induites pour (au plus) un seul sous-groupe de Levi $M$ interviennent à droite (mais, sauf si $M = G_n^*$, un tel sous-groupe de Levi intervient lui dans plusieurs espaces $L_H$). On notera $m(\sigma)$ la multiplicité de $\sigma$ dans le spectre discret. Sous la propriété $(*)$ la distribution

$$f^\infty \mapsto \sum_{\sigma' \simeq \sigma} m(\sigma') \text{ trace } \sigma'(f_\infty \otimes f^\infty)$$

est non nulle lorsque $f_\infty$ est un pseudo-coefficient de série discrète. Ceci résulte de l'indépendance linéaire des caractères. C'est dire que le paquet automorphe défini par $\sigma$ contribue non trivialement à identité raffinée lorsque $f_\infty$ est un pseudo-coefficient de série discrète. Le second membre de l'identité raffinée est donc aussi non nul. L'assertion résulte alors de 3.4.

□

## 5.2 Représentations à changement de base cuspidal

Comme ci-dessus $F$ est un corps totalement réel et $U$ un groupe unitaire forme intérieure de $U^*$. Nous supposons de plus dans ce paragraphe que $E$ est une extension quadratique de $F$, totalement imaginaire partout non ramifiée aux places finies et que $U$ est quasi-déployé en toute place finie inerte.

Théorème 5.3: Soit $\sigma$ une représentation automorphe cuspidale pour $U$ admettant un changement de base faible $\pi$ qui est cuspidal. On suppose que $\sigma_\infty$ est une représentation de la série discrète et que $\sigma_v$ est sphérique en toute place $v$ finie inerte. Alors, au moins si $\sigma$ vérifie la propriété $(*)$, la représentation $\sigma$ apparaît avec multiplicité un.

Preuve: D'après 5.1 on a

$$T^U_{disc}(f) = \sum \iota(U^*, H)\; T^{L^H}_{disc}(\phi^H)$$

pour des fonctions choisies comme il convient à l'infini. En séparant les chaînes de valeurs propres de Hecke pour $G_n^*$ on obtient une identité raffinée et on peut alors invoquer la classification de Jacquet-Shalika pour s'assurer que les contributions endoscopiques n'interfèrent pas avec les paquets dont le changement de base est cuspidal. Compte tenu de la rigidité, on obtient en particulier, puisque par hypothèse $\pi$ est cuspidale, l'identité

$$\sum_{\sigma'} m(\sigma') \text{ trace } \sigma'(f) = \text{ trace } \pi(\phi)$$

où la somme porte sur les $\sigma'$ intervenant, avec multiplicité $m(\sigma')$, dans le spectre discret pour $U^*$ dont le changement de base faible est $\pi$. Comme on a séparé les caractères de Hecke et que par hypothèse toutes les places finies inertes sont non ramifiées $\sigma'_f$ est uniquement déterminée par $\pi$ et l'identité raffinée peut encore s'écrire

$$\sum_{\sigma'_\infty} m(\sigma'_\infty \otimes \sigma_f) \text{ trace } \sigma'_\infty(f_\infty) = \varepsilon \text{ trace } \pi_\infty(\phi_\infty)$$

où $\varepsilon$ est un signe dépendant de choix locaux. On choisit pour $f_\infty$, au signe $(-1)^{q(U)}$ près, un pseudo-coefficient pour la série discrète $\sigma_\infty$ de $U(F \otimes \mathbb{R})$ de même caractère infinitésimal qu'une représentation de dimension finie $V$ de sorte que $f_\infty$ a les mêmes intégrales orbitales stables que

$$\frac{1}{b} f_V$$

On considère sur $L_\infty$ une fonction égale à une constante près à une fonction de Lefschetz associée à $W = V \otimes V^\theta$

$$\phi_\infty = \frac{1}{a} \phi_W$$

(autrement dit $\phi_\infty$ est au signe près un pseudo-coefficient tordu pour $\pi_W$). Compte tenu de 2.2 l'identité ci-dessus s'applique à ce couple de fonctions. Rappelons que l'on a choisi $f_\infty$ telle que

$$\text{trace } \sigma_\infty(f_\infty) = (-1)^{q(U)}$$

et par hypothèse

$$m(\sigma_\infty \otimes \sigma_f)$$

est un entier non nul. Donc, compte tenu de l'hypothèse $(*)$ le premier membre

$$\sum_{\sigma'_\infty} m(\sigma'_\infty \otimes \sigma_f) \text{ trace } \sigma'_\infty(f_\infty)$$

est un entier non nul. Le second membre est alors aussi non nul et compte tenu de 2.3, on a nécessairement $\pi_\infty = \pi_W$. Le second membre est donc égal à $\pm 1$. Il en résulte que seule $\sigma_\infty$ peut contribuer au premier membre et que

$$m(\sigma_\infty \otimes \sigma_f) = 1$$

□

Théorème 5.4: Soit $\sigma^*$ une représentation automorphe cuspidale pour $U^*$ admettant un changement de base faible $\pi$ qui est cuspidal. On suppose que $\sigma^*_\infty$ est une représentation de la série discrète et que $\sigma^*_v$ est sphérique en toute place $v$ finie inerte. Alors, si l'hypothèse $(*)$ est vérifiée pour $U^*$ il existe une représentation cuspidale $\sigma$ pour $U$ telle que $\sigma_f = \sigma^*_f$ et $\sigma_\infty$ a le même caractère infinitésimal que $\sigma^*_\infty$. Lorsque le caractère infinitésimal de $\sigma^*_\infty$ est assez régulier alors on sait de plus que $\sigma_\infty$ est une série discrètes et toutes les séries discrète du même $L$-paquet apparaissent ainsi.

Preuve: En reprenant la preuve de 5.3 on voit que après séparation des caractères de Hecke on a

$$m(\sigma^*) \text{ trace } \sigma^*(f^*) = \text{ trace } \pi(\phi)$$

et que

$$\sum_\sigma m(\sigma) \text{ trace } \sigma(f) = \text{ trace } \pi(\phi)$$

où la somme porte sur les $\sigma$ intervenant, avec multiplicité $m(\sigma)$, dans le spectre cuspidal pour $U$ dont le changement de base faible est $\pi$, lorsque $f$ et $\phi$ ont pour transfert stable $f^*$, les trois fonctions étant choisies très cuspidales aux places archimédiennes. En particulier $\sigma_f = \sigma^*_f$ et l'hypothèse $(*)$ pour $U^*$ étant supposée vérifiée l'identité raffinée peut encore s'écrire compte tenu de 5.3

$$\sum_{\sigma_\infty} m(\sigma_\infty \otimes \sigma_f) \text{ trace } \sigma_\infty(f_\infty) = \text{ trace } \sigma^*_\infty(f^*_\infty) = (-1)^{q(U^*)} .$$

Le premier membre est donc non nul ce qui implique l'existence d'une représentation $\sigma$ pour $U$ avec $\sigma_f \simeq \sigma^*_f$ et $\sigma_\infty$ de même caractère infinitésimal que $\sigma^*_\infty$. La dernière assertion du théorème s'obtient en faisant varier le pseudo-coefficient.

□

## 6 Bibliographie

[Ar1] J. Arthur, *The invariant trace formula II*, J. Am. Math. Soc. **1** (1988) p. 501-554

[Ar2] J. Arthur, *The $L^2$ - Lefschetz numbers of Hecke operators*, Invent. Math. **97** (1989) no. 2, p. 257–290

[Ar3] J. Arthur, *Intertwining Operators ans Residues I. Weighted Characters*, J. Funct. Analysis. **84** (1989) p. 19-84

[Ar4] J. Arthur, *An introduction to the trace formula*, Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, Clay Math. Proc. **4** Amer. Math. Soc., Providence, RI (2005) p. 1-263

[BLS] A. Borel J.-P. Labesse J. Schwermer, *On the cuspidal cohomology of S-arithmetic groups of reductive groups over number fields*, Compositio Math. **102** (1996) p. 1-40

[BW] A. Borel N. Wallach, *Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups*, Annals of Math. Studies **94** Princeton Univ. Press (1980)

[CL1] L. Clozel J.-P. Labesse, *Changement de base pour les représentations cohomologiques de certains groupes unitaires*, Astérisque **257** (1999) p. 121-136

[CL2] L. Clozel J.-P. Labesse, *Orbital integrals and distributions*, Preprint (2008)

[HL] M. Harris J.-P. Labesse, *Conditional base change for unitary groups*, Asian J. Math. **8** (2004) p. 653-684

[KS] R. Kottwitz D. Shelstad, *Foundations of twisted endoscopy*, Asterisque **255** (1999)

[Lab1] J.-P. Labesse, *Le lemme fondamental pour le changement de base stable*, Duke Math. J. **61** (1990) p. 519-530

[Lab2] J.-P. Labesse, *Pseudo-coefficients très cuspidaux et $K$-théorie*, Math. Ann. **291** (1991) p. 607-616

[Lab3] J.-P. Labesse, *Cohomologie, stabilisation et changement de base*, Asterisque **257** (1999) p. 1-116

[Lab4] J.-P. Labesse, *Stable Twisted Trace Formula : Elliptic Terms*, Jour. Inst. Math. Jussieu **3** (2004) p. 473-530

[Langlands] R.P. Langlands, *Eisenstein Series (AMS Conference, Boulder)*, Proc. Sympos. Pure Math. **9** (1966), p 235-252

[Sha] F. Shahidi, *On certain L-functions*, Amer. J. Math. **103** (1981) p. 297-355