Les facteurs de transfert pour les groupes unitaires

J.-P. Labesse
Institut Mathématique de Luminy
UMR 6206

1 Introduction

Langlands et Shelstad ont proposé dans [LS] une construction des facteurs de transfert. Nous allons expliciter cette construction dans un cas particulier pour les groupes unitaires.

Rappelons que les facteurs de transfert entre un groupe G et un groupe endoscopique H ne sont pas uniques. Deux choix de facteurs peuvent différer localement par des constantes, qui sont des nombres complexes de module 1, dont le produit sur toutes les places vaut 1 et par un caractère unitaire des classes d'idèles de H. La détermination de ce caractère est formulée dans [LS] en terme de plongement de L-groupes, lorsqu'un tel plongement existe. Observons qu'un tel plongement existe pour les groupes endoscopiques des groupes unitaires. Un plongement étant fixé le facteur de transfert adèlique est alors unique. Réciproquement, la donnée d'un facteur de transfert détermine le plongement (à conjugaison près).

Nous expliciterons le facteur de transfert, pour les groupe endoscopique d'un groupe unitaire sur les éléments semi-simples fortement réguliers appartenant à un seul tore, à savoir le tore diagonal, lorsque les groupes unitaires sont définis par rapport à une forme hermitienne diagonale. Dans ce cas la formule est très simple. Ceci suffit à déterminer le facteur de transfert sur tous les autres tores et le plongement de L-groupes correspondant.

2 Notations

On note F un corps local ou global de caractéristique zéro et E une extension quadratique. On note $x \mapsto \overline{x}$ l'action du groupe de Galois de E/F. Sauf mention expresse du contraire on notera $|x|$ la valeur absolue normalisée d'un élément x du groupe multiplicatif d'un corps local ou d'un idèle.

Soit G un groupe unitaire relatif à E/F. On suppose que G est une forme intérieure de U_m^* le groupe unitaire quasi-déployé à m variables. Soit

$$H = U_a^* \times U_b^*$$

avec $m = a + b$, un groupe endoscopique. Pour simplifier légèrement l'exposé on supposera de plus que ab est pair (ce qui est automatique lorsque m est impair) et non nul. Lorsque $ab = 0$ le facteur de transfert est trivial.

Dans ce qui suit il est commode de prendre les formes hermitiennes, définissant les divers groupes unitaires qui nous intéressent sous forme diagonale. On peut alors plonger H dans U_m^* sous forme diagonale par blocs. On peut aussi réaliser le tore

$$T = U(1)^m$$

comme sous-groupe des matrices diagonales T_G dans G et T_H dans H. On fixe désormais ces plongements de $T(F)$, $G(F)$ et $H(F)$ dans $GL_m(E)$ ce qui permet d'identifier T, T_G et T_H et on aura

$$T(F) \subset G(F) \cap H(F)$$

Dans toute la suite γ désigne un élément de $T(F)$ vu comme élément diagonal de $GL_m(E)$:

$$\gamma = \mathrm{diag}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_\mathrm{a}, \mathrm{y}_1 \cdots, \mathrm{y}_\mathrm{b}) \ .$$

Les x_i et les y_j sont des élément de $E^\times$ de norme 1 dans $F^\times$. On considérera, par abus de notation, γ comme un élément de $G(F)$ mais aussi de $H(F)$ via les isomorphismes ci-dessus.

Sur la clôture algébrique, H est un sous-groupe de Levi de G. On notera $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. On choisit un ordre sur les racines de T dans $\mathfrak{g}$ et on note $\mathfrak{n}$ l'algèbre de Lie du radical unipotent du sous-groupe parabolique standard de sous-groupe de Levi H. Nous supposerons que les racines de T dans $\mathfrak{n}$ sont les

$$\gamma^{\alpha_{i,j}} = x_i/y_j \ .$$

3 Facteurs de transfert et diagonale

Soit F un corps local. Considérons $\gamma_G \in G(F)$, $\gamma_H \in H(F)$ et

$$\gamma \in T(F) \subset G(F) \cap H(F) \ ,$$

avec γ_G fortement régulier stablement conjugué de γ dans $G(F)$ et γ_H stablement conjugué de γ dans $H(F)$. Soit Δ un facteur de transfert. Le choix d'un plongement de L-groupes détermine un facteur de transfert à une constante près. Un facteur de transfert Δ est défini dans [LS] comme un produit de facteurs Δ_* dont la définition suppose des choix auxillaires, en particulier les a-data et les χ-data. Nous utiliserons la notation $\Delta_*(\gamma)$ plutôt que $\Delta_*(\gamma_H, \gamma_G)$ lorsque le facteur Δ_* ne dépend que de γ. Le facteur Δ_{III_1}, qui est le seul à ne pas dépendre seulement de γ, ne peut être défini lorsque G n'est pas quasi-déployé que comme un facteur "relatif" (cf. [LS, p 246]) : sa définition fait intervenir une autre paire (γ'_H, γ'_G), que nous omettrons pour ne pas alourdir la notation. Avec ces conventions, on a pour notre situation

$$\Delta(\gamma_H, \gamma_G) = c\, \Delta_I(\gamma)\, \Delta_{II}(\gamma)\, \Delta_{III_1}(\gamma_H, \gamma_G)\, \Delta_{III_2}(\gamma)\, \Delta_{IV}(\gamma)$$

où c est une constante. Le facteur $\Delta_I(\gamma)$ est indépendant de $\gamma \in T(F)$ et est un signe. Un changement de plongement de L-groupes modifie Δ via le facteur Δ_{III_2} par un caractère du groupe $H(F)$. On a

$$\Delta_{IV}(\gamma) = |\det(1 - \mathrm{Ad}(\gamma) \,|\, \mathfrak{g}/\mathfrak{h})|^{1/2} = \prod_{i,j} \frac{|(x_i - y_j)|}{|x_i y_j|^{1/2}} \ .$$

Un facteur de transfert doit vérifier

$$\Delta(\gamma_H, \gamma_G) = \kappa(x)\Delta(\gamma, \gamma)$$

où $x \in G(\overline{F})$ est tel que

$$x^{-1}\gamma_G\, x = \gamma$$

et où κ est le caractère endoscopique définissant H. Pour spécifier un facteur de transfert $\Delta(\gamma_G, \gamma_H)$ entre G et H pour le tore T il suffit donc de donner sa valeur sur la diagonale $\Delta(\gamma, \gamma)$.

4 Facteurs de transfert de Kottwitz et séries discrètes

Pour les tores elliptiques dans un groupe unitaire, sur les réels, la définition des facteurs de transfert est presque évidente. En effet, pour déterminer le transfert des pseudo-coefficients de représentations des séries discrètes entre $G(\mathbb{R})$ et $H(\mathbb{R})$ on est amené à comparer leurs intégrales orbitales et donc à comparer les formules pour certaines combinaisons linéaires de caractères de séries discrètes sur $G(\mathbb{R})$ et sur $H(\mathbb{R})$ (cf. [Lab5]). Or on sait que la formule du caractère pour une série discrète est, avec des notations familières, de la forme

$$\Theta_\pi(\gamma) = (-1)^{q(G)} \frac{\sum_{w\in W^G_{\mathbb{R}}} \varepsilon(w) e^{<w(\mu),X>}}{\sum_{w\in W^G_{\mathbb{C}}} \varepsilon(w) e^{<w(\rho_G),X>}}$$

lorsque $\gamma = \exp(X) \in T(\mathbb{R})$ si π est une série discrète de paramètre μ, et ρ_G est la demi-somme des racines positives de T dans G pour un ordre convenable. On voit alors qu'un candidat naturel pour le facteur de transfert, en un couple de points (γ_H, γ_G) représentés par la même matrice diagonale

$$\gamma = \exp(X)$$

est le quotient des dénominateurs de Weyl pour γ^{-1} :

$$(-1)^{q(G)-q(H)} \frac{\sum_{w\in W^G_{\mathbb{C}}} \varepsilon(w) e^{-<w(\rho_G),X>}}{\sum_{w\in W^H_{\mathbb{C}}} \varepsilon(w) e^{-<w(\rho_H),X>}}$$

ce qui peut s'écrire

$$(-1)^{q(G)-q(H)} e^{<(\rho_H-\rho_G),X>} D_{\mathfrak{n}}(\gamma)$$

avec

$$D_{\mathfrak{n}}(\gamma) = \det(1 - \mathrm{Ad}(\gamma)\,|\,\mathfrak{n}) = \prod_\alpha (1-\gamma^\alpha)$$

où le produit porte sur les racines positives α de T dans G qui ne sont pas dans H.

Mais ce candidat naturel ne définit pas une fonction sur le groupe car

$$X \mapsto e^{<(\rho_H-\rho_G),X>}$$

définit un caractère d'un revêtement double du tore $T(\mathbb{R})$ qui ne descend pas à $T(\mathbb{R})$ en général. Cette obstruction peut aussi se voir comme suit : le paramètre μ d'une série discrète pour G est de la forme

$$\mu = \lambda_G + \rho_G$$

où λ_G est un poids de T. Mais il n'est pas vrai en général que

$$\mu = \lambda_H + \rho_H$$

où λ_H est un poids de T. Le transfert des séries discrètes de H à G suppose donc une translation sur le paramètre μ.

L'impossibilité de prolonger au groupe le facteur de transfert naturel, se reflète du côté dual : l'action du groupe de Galois sur $\widehat{G}$ n'induit pas sur le sous-groupe $\widehat{H}$ l'action souhaitée. Toutefois, dans notre cas, le plongement naturel de $\widehat{H}$ dans $\widehat{G}$ peut se prolonger en un plongement de L-groupes après torsion par un 1-cocycle du groupe de Weil.

Un facteur de transfert est obtenu en tordant le "candidat naturel" par le caractère d'une représentation de dimension 1 d'un revêtement de $H(\mathbb{R})$ de sorte que l'expression descende sur $T(\mathbb{R})$. Il n'y a pas unicité : une telle torsion n'est définie que modulo un caractère arbitraire de $H(\mathbb{R})$. On obtient ainsi la formule pour les facteurs de transfert proposée par Kottwitz dans [K] :

$$\Delta^K(\gamma,\gamma) = (-1)^{q(G)-q(H)}\chi(\gamma)D_{\mathfrak{n}}(\gamma)$$

où χ est un caractère convenable de $T(\mathbb{R})$ (cf. [K, p 184]). Le caractère dépend du plongement de L-groupes et, réciproquement, un choix admissible de ce caractère détermine le plongement.

Supposons de plus $G = U^*$ quasi-déployé ; dans ce cas Langlands et Shelstad définissent un facteur qui est canonique à un signe près dépendant du choix d'un épinglage et, comme toujours, du choix d'un plongement de L-groupes. Notons le $\Delta_{\mathbb{R}}^{LS}$. Les "a-data" utilisés dans [LS] pour la construction des facteurs Δ_I et Δ_{II} doivent être ici des nombres complexes imaginaires purs que l'on peut choisir égaux à $i = \sqrt{-1}$. En comparant, terme à terme le facteur défini dans [LS] et celui de Kottwitz (une telle comparaison est faite en détail plus loin) on a

$$\Delta_{\mathbb{R}}^{LS} = \pm(i)^{ab}\Delta^K$$

et comme nous supposons ab pair les facteurs coïncident au signe près.

5 Une application de Hilbert 90

Soit $\gamma \in T(F) \subset H(F) \subset U^*(F)$ avec

$$\gamma = \mathrm{diag}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_\mathrm{a}, \mathrm{y}_1 \cdots, \mathrm{y}_\mathrm{b}) \ .$$

Posons

$$d(\gamma) = \prod_{i,j} (y_j - x_i) \qquad \text{et} \qquad \eta(\gamma) = \prod_{i,j} x_i y_j \ .$$

On remarque que η est la valeur en γ d'un caractère rationnel de H et que

$$d(\gamma) = (y_1 \cdots y_b)^a \prod_{i,j} (1 - \gamma^{\alpha_{i,j}}) = (y_1 \cdots y_b)^a D_{\mathfrak{n}}(\gamma)$$

où les $\alpha_{i,j}$ sont les racines de T dans $\mathfrak{n}$. On dit que γ est G-H-régulier si $d(\gamma) \neq 0$.

Lemme 1: Supposons ab pair. Alors, sur l'ensemble des éléments G-H-réguliers d est congru modulo $F^\times$ à un caractère de $H(F)$ à valeurs dans $E^\times/F^\times$. On a un analogue adèlique : soit F un corps global, alors sur l'ensemble des éléments $\gamma \in T(\mathbb{A}_F)$ tels que $d(\gamma)$ soit un idèle, d est congru modulo C_F à un caractère de $H(\mathbb{A}_F)$ à valeurs dans C_E/C_F.

Preuve: Considérons $\gamma \in T(F)$ qui est G-H-régulier. Les x_i et les y_j sont des éléments de $E^\times$ de norme 1 ; il existe des α_i et des β_j dans $E^\times$ bien déterminés modulo $F^\times$ tels que

$$x_i = \frac{\alpha_i}{\overline{\alpha}_i} \qquad \text{et} \qquad y_j = \frac{\beta_j}{\overline{\beta}_j}$$

et donc

$$d(\gamma) = \prod_{i,j} \frac{(\beta_j \overline{\alpha_i} - \overline{\beta_j} \alpha_i)}{\overline{\alpha_i \beta_j}}$$

Comme on a supposé ab pair le numérateur, qui est non nul par hypothèse de régularité, est à valeurs dans $F^\times$. Le produit

$$\delta(\gamma) = \prod_{i,j} \alpha_i \beta_j$$

est un élément de $E^\times$ bien défini par γ à un facteur de $F^\times$ près. Donc δ est un caractère à valeurs dans $E^\times/F^\times$. On conclut en observant que

$$d(\gamma) \equiv \delta(\gamma) \qquad \text{modulo} \qquad F^\times \ .$$

Dans le cas adèlique la preuve est similaire.

□

On pourra observer que

$$\eta(\gamma)=\frac{\delta(\gamma)}{\overline{\delta(\gamma)}}\qquad \text{et que}\qquad \Delta_{IV}(\gamma)=|d(\gamma)|\,|\eta(\gamma)|^{-1/2}\ .$$

6 Un facteur de transfert adèlique

On note C_F le groupe multiplicatif $F^\times$ lorsque F est local et C_F désigne le groupe des classes d'idèles $\mathbb{A}_F^\times/F$ lorsque F est global. Soit E une extension quadratique. On note $\mu_{E/F}$ le caractère d'ordre 2 de C_F associé à E par le corps de classe.

Proposition 2: On suppose n pair. Soit ξ un caractère unitaire qui prolonge à C_E le caractère $\mu_{E/F}$ de C_F et soit ζ un caractère de $H(F)$ si F est local ou de $H(\mathbb{A}_F)$ trivial sur $H(F)$ si F est global. Si γ est un élément de $T(F)$ lorsque F est local ou un élément de $T(\mathbb{A}_F)$ dans le cas global, alors

$$\Delta_{\xi,\zeta}(\gamma,\gamma)=\zeta(\gamma)\xi(d(\gamma))\,.\,\Delta_{IV}(\gamma)$$

est la restriction à la diagonale de T d'un facteur de transfert entre G et H. Réciproquement, la restriction à la diagonale de T de tout facteur de transfert est de cette forme (à une constante près dans le cas local).

Preuve: Le fait que nos facteurs soient construits au moyen de caractères des classes d'idèles montre que c'est un choix globalement compatible : le produit sur toutes les places vaut 1 sur les éléments rationnels. Montrons maintenant que notre facteur coïncide avec un facteur de Langlands-Shelstad localement partout. Il convient de montrer que le produit

$$c\Delta_I\Delta_{II}\Delta_{III_1}\Delta_{III_2}$$

évalué sur la diagonale en γ est égal à $\xi(d(\gamma))$ pour un choix convenable de la constante et du plongement de L-groupes. Étudions d'abord le facteur Δ_{II}. Pour le calculer on doit choisir des "a-data" et des "χ-data". On choisit $\tau\in E^\times$ tel que $\overline{\tau}=-\tau$ et on pose

$$a_\alpha=\tau\qquad \text{et}\qquad \chi_\alpha=\xi$$

pour les racines positives α de T dans G qui n'apparaissent pas dans H. Avec un tel choix on a

$$\Delta_{II}(\gamma)=\prod_\alpha \xi\left(\frac{\gamma^\alpha-1}{\tau}\right)$$

le produit étant sur les racines positives α de T dans G qui n'apparaissent pas dans H. Donc

$$\Delta_{II}(\gamma) = \xi(-1/\tau)^{ab}\xi(D_{\mathfrak{n}}(\gamma))$$

Le facteur $\Delta_I(\gamma)$ dépend entre autre du choix des "a-data". Nous ne chercherons pas à calculer ce facteur ; il nous suffit de savoir que $\Delta_I(\gamma)$ est un signe indépendant de γ. Sur la diagonale le facteur Δ_{III_1} est aussi une constante égale à ± 1. On choisit c de sorte que

$$c\Delta_I\Delta_{III_1} = \xi(-\tau)^{ab} \ .$$

Le facteur Δ_{III_2} est un caractère de $T(F)$ qui dépend du choix des χ-data et du plongement de L-groupes. Pour un choix convenable du plongement de L-groupes dépendant du choix de ξ et de ζ, et qui sera explicité dans la proposition 4, on peut supposer que

$$\Delta_{III_2}(\gamma) = \zeta(\gamma)\xi(\prod_j y_j^a)$$

et comme

$$d(\gamma) = D_{\mathfrak{n}}(\gamma)\ \prod_j y_j^a$$

on obtient l'égalité cherchée.

□

Nous allons expliciter la dépendance de $\Delta_{\xi,\zeta}$ lorsque ξ varie. On dispose d'une suite exacte

$$1 \to C_F \to C_E \to U(1)_F \to 1$$

où $U(1)_F$ est le groupe de $U(1,F)$ des points sur F du groupe unitaire en une variable lorsque F est local et le quotient $U(1,\mathbb{A}_F)/U(1,F)$ lorsque F est global. Soit ε un caractère de C_E/C_F. Compte tenu de la suite exacte ci-dessus, ε définit un caractère $\widetilde{\varepsilon}$ du groupe $U(1)_F$ en posant pour $\alpha \in C_E$:

$$\widetilde{\varepsilon}(\alpha/\overline{\alpha}) = \varepsilon(\alpha) \ .$$

Lemme 3: Un changement du choix pour ξ modifie le facteur de transfert $\Delta_{\xi,\zeta}$ par un caractère de $H(F)$ si F est local et de $H(\mathbb{A}_F)/H(F)$ si F est global. De façon précise, soit $\xi' = \varepsilon\xi$ un autre prolongement à C_E du caractère $\mu_{E/F}$, alors

$$\Delta_{\xi',\zeta}(\gamma,\gamma) = \Delta_{\xi,\zeta'}(\gamma,\gamma)$$

avec

$$\zeta'(\gamma) = \widetilde{\varepsilon}\circ\eta(\gamma)\,.\,\zeta(\gamma) \ .$$

Preuve: On a

$$\Delta_{\xi',\zeta}(\gamma,\gamma) = \varepsilon(d(\gamma))\Delta_{\xi,\zeta}(\gamma,\gamma)$$

Il suffit alors d'observer que d'après le lemme 1 et les remarques qui le suivent on a

$$\varepsilon(d(\gamma)) = \varepsilon \circ \delta(\gamma) = \widetilde{\varepsilon} \circ \eta(\gamma)$$

et on rappelle que $\eta(\gamma)$ est un caractère rationnel de H.

□

Considérons le cas $F = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{C}$ et supposons que $\xi(z) = z/|z|_0$ pour $z \in \mathbb{C}^\times$ où $|z|_0$ est le module du nombre complexe z (on prendra garde que $|z|_\mathbb{C} = |z|_0^2$). Pour un tel choix, on remarque qu'alors

$$|\eta(\gamma)|_0 = 1$$

et on a

$$\xi(d(\gamma))\,.\,|d(\gamma)|_0|\eta(\gamma)|_0^{-1/2} = d(\gamma)\ .$$

Les facteurs de transfert de Kottwitz peuvent donc s'écrire sous la forme suivante : si

$$\gamma = \gamma_H = \gamma_G$$

est un élément de $T(F)$ on a

$$\Delta^K(\gamma,\gamma) = (-1)^{q(G)-q(H)}\chi(\gamma)d(\gamma)\prod_j y_j^{-a}$$

où χ est un caractère de $H(\mathbb{R})$. Donc $\Delta_{\xi,\zeta}(\gamma,\gamma)$ est, au signe près, le facteur de transfert de Kottwitz pour le caractère

$$\chi(\gamma) = \zeta(\gamma)\xi(\prod_j y_j^a)\ .$$

Le facteur de transfert $\Delta_{\xi,\zeta}$ est compatible avec les choix utilisés par ailleurs dans le livre, notamment dans [C.III.A, CHL.IV.B] : c'est au signe près un facteur de Kottwitz aux places réelles. (Voir la remarque après la Proposition 5.1 de [CHL.IV.B].) Le produit sur toutes les places vaut 1 sur les éléments rationnels. Enfin, aux places finies non ramifiées, le transfert d'une représentation sphérique et sphérique si ξ et ζ sont non ramifiés en cette place.

7 Plongement de L-groupe associé

Il nous reste à préciser le plongement entre L-groupes associé à ce facteur de transfert.

Rappelons tout d'abord la forme des plongements (voir par exemple [Rog]). Soit G un groupe unitaire à m variables relativement à E/F. Son groupe dual $\widehat{G}$ est le groupe $GL(m,\mathbb{C})$. Son L-groupe est le produit semi-direct

$$\widehat{G} \rtimes W_F$$

où W_F agit via son image dans $\mathrm{Gal}(E/F)$. On notera ρ_G cette action. Soit σ l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(E/F)$; il agit sur $\widehat{G} = GL(m,\mathbb{C})$ par

$$\rho_G(\sigma)(x) = J_m\,{}^t x^{-1} J_m^{-1}$$

où J_m est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (-1)^m & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Le groupe dual de H

$$\widehat{H} \simeq GL(a,\mathbb{C}) \times GL(b,\mathbb{C})$$

peut être réalisé comme sous-groupe diagonal par blocs de

$$\widehat{G} = GL(m,\mathbb{C}) .$$

C'est le centralisateur de

$$s = \mathbf{1}_a \oplus -\mathbf{1}_b .$$

On posera $J_G = J_m$ et $J_H = J_a \oplus J_b$. Un plongement

$$\varphi : {}^L H \to {}^L G$$

définit un 1-cocycle c de W_F à valeurs dans $\widehat{G}$:

$$\varphi(1 \rtimes w) = c(w) \rtimes w$$

tel que pour tout $w \in W_F$ et $h \in \widehat{H}$ on ait

$$\rho_H(w)h = \operatorname{Ad} c(w) \circ \rho_G(w)h \ .$$

Ceci détermine $c(w)$ modulo $Z(\widehat{H})$, le centre de $\widehat{H}$, à gauche. Soit $w_\sigma \in W_F$ un élément qui se projette sur le générateur σ du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(E/F)$. On a nécessairement

$$c(w_\sigma) = z_\sigma J_H J_G^{-1} \qquad \text{avec } z_\sigma \in Z(\widehat{H})$$

et

$$c(w) \in Z(\widehat{H}) \qquad \text{pour } w \in W_E$$

puisque W_E agit trivialement sur $\widehat{G}$. La restriction à W_E du 1-cocycle est donc un homomorphisme à valeurs dans $Z(\widehat{H})$, qui peut être vu comme un homomorphisme, que nous noterons μ, de $C_E \simeq W_E^{ab}$ dans $Z(\widehat{H})$:

$$\varphi(h \rtimes w) = h\mu(w) \rtimes w$$

pour $w \in W_E$. On observe que w_σ^2 est un élément de W_E dont l'image dans $C_E \simeq W_E^{ab}$ appartient à C_F. Un changement du représentant w_σ de σ dans W_F, modifie l'image de w_σ^2 par une norme de C_E dans C_F. Mais, on a

$$\mu(w_\sigma^2) = c(w_\sigma) J_G\, {}^t c(w_\sigma)^{-1} J_G^{-1}$$

On observe que ${}^t J_p = J_p^{-1}$ donc

$$\mu(w_\sigma^2) = J_H^2\, J_G^{-2}$$

et comme $J_p^2 = (-1)^p \mathbf{1_p}$ et $m = a + b$ on a

$$\mu(w_\sigma^2) = (-1)^b \mathbf{1}_a \oplus (-1)^a \mathbf{1}_b$$

qui est indépendant du choix de w_σ. Il en résulte que μ doit être trivial sur l'image des normes de C_E dans C_F. Réciproquement, la donnée de

$$\mu = \mu_a \mathbf{1}_a \oplus \mu_b \mathbf{1}_b$$

trivial sur l'image des normes de C_E dans C_F et vérifiant

$$\mu(w_\sigma^2) = (-1)^b \mathbf{1}_a \oplus (-1)^a \mathbf{1}_b$$

détermine un plongement φ à conjugaison près.

Nous devons donc expliciter l'homomorphisme μ associé à notre facteur de transfert.

Proposition 4: Pour le facteur de transfert

$$\Delta_{\xi,\zeta}(\gamma,\gamma) = \zeta(\gamma)\xi(d(\gamma))\,.\,\Delta_{IV}(\gamma)$$

l'homomorphisme μ associé est

$$\mu(w) = \widehat{\zeta}_1(w)\xi(w)^b \mathbf{1}_a \oplus \widehat{\zeta}_2(w)\xi(w)^a \mathbf{1}_b$$

pour $w \in W_E$ où, par abus de notation, on a encore noté ξ le composé du caractère ξ avec l'application naturelle $W_E \to C_E$ et où

$$\widehat{\zeta}_1 \mathbf{1}_a \oplus \widehat{\zeta}_2 \mathbf{1}_b$$

est le composé avec $W_E \to C_E$ de l'homomorphisme de C_E/C_F dans $Z(\widehat{H})$ associé au paramètre de Langlands de ζ.

Preuve: Supposons tout d'abord ζ trivial. Rappelons que

$$\eta(\gamma) = \prod_{i,j} x_i y_j \ .$$

Si ξ est remplacé par $\xi' = \varepsilon\xi$ alors d'après le lemme 3 on a

$$\Delta_{\xi',\zeta}(\gamma,\gamma) = \widetilde{\varepsilon} \circ \eta(\gamma)\Delta_{\xi,\zeta}(\gamma,\gamma)$$

et

$$\widetilde{\varepsilon} \circ \eta(\gamma) = \widetilde{\varepsilon}(\prod_{i,j} x_i y_j) = \varepsilon(\prod_{i,j} \alpha_i \beta_j) \ .$$

Le paramètre de Langlands pour le caractère

$$\varepsilon(\prod_{i,j} \alpha_i \beta_j)$$

est l'homomorphisme de W_E dans $Z(\widehat{H})$

$$w \mapsto \varepsilon(w)^b \mathbf{1}_a \oplus \varepsilon(w)^a \mathbf{1}_b \ .$$

La covariance entre ξ et μ implique que nécessairement

$$\mu(w) = \xi(w)^b \mathbf{1}_a \oplus \xi(w)^a \mathbf{1}_b \ .$$

Le cas général, avec ζ quelconque, en résulte immédiatement.

□

Remarque 5: Le choix du facteur de transfert correspond au choix du plongement endoscopique ainsi qu'à la forme précise du transfert de fonctions de Hecke, comme dans le Theorem 9.3.3.5 de [H.I.A]. L'homomorphisme μ qui détermine le plongement endoscopique correspond au choix de caractères μ_a, μ_b dans [H.I.A, 5.5 ; voir aussi M.III.C].

Dans les articles [M.III.C, CHL.IV.B] où on considère le cas $a = 1, b = n$ avec n pair, nous choisissons $\mu_1 = 1$, $\mu_n = \xi^{-1}$ (voir la discussion dans [CHL.IV.B, (3.2)]) et donc

$$\mu(w) = \mathrm{diag}(1, \xi(\mathrm{w})^{-1}, \cdots, \xi(\mathrm{w})^{-1}) \ .$$

Le facteur de transfert correspondant est

$$\Delta_{\xi,\zeta}(\gamma, \gamma) = \xi(\gamma_1^{n/2} \det(\gamma_n))^{-1} \xi(d(\gamma)) \, . \, \Delta_{IV}(\gamma)$$

pour

$$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_n$$

où γ_* est la projection de γ sur le facteur $GL(*, \mathbb{C})$ de $\widehat{H}$ et où le déterminant est calculé dans $GL(n, \mathbb{C})$. C'est également le plongement utilisé par Rogawski [Rog] et dans le volume de Montréal, pour le cas $a = 1, b = 2$.

8 Bibliographie

[K] R. Kottwitz, *Shimura Varieties and x-adic Representations*, Perspectives in Math. **10** Academic Press (1988), pp. 161-210.

[Lab5] J.-P. Labesse, *Introduction to Endoscopy*, Contemporary Math. **472** (2008) p. 175-213

[LS] R.P. Langlands D. Shelstad, *On the Definition of Transfer Factors*, Math. Annalen **278** (1987). p 219-271

[Rog] J. Rogawski, *Automorphic Representations of Unitary Groups in Three Variables*, Annals of Math. Studies **123** (1990).