

# Algèbres affines quantiques et algèbres amassées

Bernard Leclerc

Exposé IHP, 14 Janvier 2008

## 1 Catégorifications d'algèbres amassées

**1.1** Depuis l'apparition des algèbres amassées de nombreux travaux ont été consacrés à leurs "catégorifications", c'est-à-dire à leurs possibles réalisations au moyen de catégories (voir par exemple [MRZ, BMRRT, CK, GLS]). Plus précisément, on a pu associer à certaines algèbres amassées  $\mathcal{A}$  une catégorie de Frobenius  $\mathcal{C}$  (*i.e.* une catégorie exacte ayant assez de projectifs et assez d'injectifs, et dont les injectifs et les projectifs coïncident) telle que

- les variables d'amas  $x$  de  $\mathcal{A}$  correspondent à des objets indécomposables  $T_x$  de  $\mathcal{C}$ ;
- deux variables d'amas  $x$  et  $y$  appartiennent à un même amas si  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(T_x, T_y) = 0$ ;
- le monôme d'amas  $m = xy \cdots z$  de  $\mathcal{A}$  correspond à l'objet  $M = T_x \oplus T_y \oplus \cdots \oplus T_z$  de  $\mathcal{C}$ ;
- les relations d'échange  $xx^* = m + m'$  de  $\mathcal{A}$  correspondent à des couples de suites exactes

$$0 \rightarrow T_x \rightarrow M \rightarrow T_{x^*} \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow T_{x^*} \rightarrow M' \rightarrow T_x \rightarrow 0.$$

Le passage de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{A}$  ("décatégorification") s'obtient en voyant  $\mathcal{A}$  comme une sorte d'algèbre de Hall duale de  $\mathcal{C}$ .

On a montré dans certain cas (et on conjecture en général) que les objets  $T_x$  sont tous les objets indécomposables *rigides*, *i.e.* sans auto-extension. Lorsque  $\mathcal{A}$  admet un nombre fini d'amas (algèbre amassée de type fini) tous les objets indécomposables de  $\mathcal{C}$  sont rigides, et les variables d'amas de  $\mathcal{A}$  sont en bijection avec les indécomposables de  $\mathcal{C}$ .

**1.2** Ce type de catégorification est très utile. Par exemple il a permis de démontrer certaines conjectures profondes de Fomin et Zelevinsky, apparemment inaccessibles par de la combinatoire pure. Par contre, ce n'est peut-être pas la notion la plus naturelle de catégorification qu'on attendrait pour une algèbre amassée.

Pour catégorifier une  $\mathbb{Z}$ -algèbre  $\mathcal{A}$  munie d'une  $\mathbb{Z}$ -base distinguée  $B$ , on penserait plutôt à une catégorie abélienne monoïdale  $\mathcal{M}$  (*i.e.* munie d'un produit tensoriel) admettant  $\mathcal{A}$  comme anneau de Grothendieck, les éléments de  $B$  coïncidant avec les classes des objets simples (voir *e.g.* [KMS]). La définition générale d'une base "canonique" pour une algèbre amassée est toujours un problème ouvert (voir *e.g.* [SZ]), mais il existe de nombreux cas pour lesquels cette base est connue, par exemple lorsque le nombre d'amas est fini, ou lorsque l'algèbre admet déjà une base canonique au sens de Kashiwara et Lusztig. On s'attend alors à ce que les monômes d'amas, et en particulier les variables d'amas, appartiennent à cette base canonique.

La notion naturelle remplaçant l'indécomposabilité dans une catégorie monoïdale est la "primauté": un objet de  $\mathcal{M}$  est *premier* si on ne peut pas le factoriser en un produit tensoriel de deux objets non triviaux.

Pour catégorifier une algèbre amassée  $\mathcal{A}$ , on voudrait donc une catégorie abélienne monoïdale  $\mathcal{M}$  d’anneau de Grothendieck  $\mathcal{A}$  telle que

- les variables d’amas  $x$  de  $\mathcal{A}$  sont les classes d’objets simples premiers  $S_x$  de  $\mathcal{M}$ ;
- deux variables d’amas  $x$  et  $y$  appartiennent à un même amas si et seulement si  $S_x \otimes S_y$  est simple;
- le monôme d’amas  $m = xy \cdots z$  de  $\mathcal{A}$  est la classe de l’objet simple  $M = S_x \otimes S_y \otimes \cdots \otimes S_z$  de  $\mathcal{M}$ ;
- les relations d’échange  $xx^* = m + m'$  de  $\mathcal{A}$  proviennent de suites exactes non scindées

$$0 \rightarrow M \rightarrow S_x \otimes S_{x^*} \rightarrow M' \rightarrow 0.$$

La dissymétrie de la dernière condition semble anormale. Mais n’oublions pas que l’algèbre amassée  $\mathcal{A}$  est commutative, donc il faut, pour deux objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{M}$ , que les classes dans l’anneau de Grothendieck de  $X \otimes Y$  et  $Y \otimes X$  soient égales. On peut donc rétablir la symétrie en demandant aussi l’existence d’une suite exacte non scindée

$$0 \rightarrow M' \rightarrow S_{x^*} \otimes S_x \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Lorsque les propriétés ci-dessus sont vérifiées on dira que  $\mathcal{M}$  est une *catégorification monoïdale* de l’algèbre amassée  $\mathcal{A}$ .

La notion naturelle remplaçant la rigidité dans une catégorie monoïdale semble être la “réalité” : un objet de  $\mathcal{M}$  est *réel* si son carré tensoriel est simple (voir [L]). Les objets  $S_x$  devraient être tous les objets simples premiers réels de  $\mathcal{M}$ . Lorsque  $\mathcal{A}$  est de type fini, tous les objets simples premiers de  $\mathcal{M}$  devraient être réels, et les variables d’amas de  $\mathcal{A}$  devraient être en bijection avec les objets simples premiers de  $\mathcal{M}$ .

**1.3** Le but de l’exposé est de donner des exemples, en grande partie conjecturaux, de catégorifications monoïdales  $\mathcal{M}$  d’algèbres amassées. Ces catégories  $\mathcal{M}$  sont des catégories de représentations d’algèbres affines quantiques.

## 2 Algèbres affines quantiques

**2.1** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie simple de type  $A, D, E$  et de rang  $n$ . Soit  $\hat{\mathfrak{g}}$  l’algèbre de Lie affine (non tordue) attachée à  $\mathfrak{g}$  et soit  $U = U_q(\hat{\mathfrak{g}})$  l’algèbre affine quantique correspondante. Le paramètre  $q$  est ici un nombre complexe fixé, non racine de l’unité. Ainsi  $U$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre. On considère la catégorie  $\mathcal{M}$  des représentations de dimension finie de  $U$ . C’est une catégorie abélienne monoïdale non semi-simple. Le produit tensoriel provient de la comultiplication de  $U$ . Il existe une énorme littérature sur les représentations de dimension finie de  $U$ , l’une des raisons étant qu’elles sont importantes en physique : elles sont reliées aux solutions trigonométriques de l’équation de Yang-Baxter et au “Bethe Ansatz” dans la théorie des systèmes intégrables quantiques. (Pour une introduction très lisible à ces sujets je recommande [J]. On peut aussi consulter [CP1, Chapitre 12].)

**2.2** Notons  $I$  l'ensemble des sommets du diagramme de Dynkin de  $\mathfrak{g}$ . Chaque objet simple  $S$  de  $\mathcal{M}$  est paramétré par une suite  $P = (P_i(u); i \in I)$  de polynômes  $P_i(u) \in \mathbb{C}[u]$  de terme constant égal à 1, appelés les polynômes de Drinfeld de  $S$ . Par exemple, les *représentations fondamentales* de  $U$  sont les modules simples  $V_i(a)$  ( $i \in I, a \in \mathbb{C}^*$ ) de polynômes de Drinfeld

$$P_i(u) = 1 - au, \quad P_j(u) = 1 \text{ pour } j \neq i.$$

Les polynômes de Drinfeld d'un module simple  $S$  seront parfois notés  $P_{i,S}(u)$ .

**2.3** Il est connu que l'anneau de Grothendieck de la catégorie  $\mathcal{M}$  est l'anneau des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  en les classes  $[V_i(a)]$  ( $i \in I, a \in \mathbb{C}^*$ ) des modules fondamentaux (un anneau de polynômes en une infinité non dénombrable de variables). Frenkel et Reshetikhin ont introduit une notion appropriée de caractère pour les objets de  $\mathcal{M}$ , les *q-caractères* (voir [FM]). Ce sont des polynômes de Laurent en les variables  $Y_{i,a}$  ( $i \in I, a \in \mathbb{C}^*$ ), à coefficients dans  $\mathbb{N}$ . La dimension d'un module  $M$  se lit aisément sur son *q-caractère* : c'est la somme de tous les coefficients. Concrètement, on peut voir l'anneau de Grothendieck comme l'anneau des *q-caractères*.

**2.4** Il existe une famille remarquable d'objets simples de  $\mathcal{M}$ , appelés les modules de Kirillov-Reshetikhin. Ce sont les modules simples  $W_{k,a}^{(i)}$  ( $i \in I, k \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{C}^*$ ) de polynômes de Drinfeld

$$P_i(u) = (1 - au)(1 - aq^2u) \cdots (1 - aq^{2k-2}u), \quad P_j(u) = 1 \text{ pour } j \neq i.$$

En particulier,  $W_{1,a}^{(i)}$  n'est autre que le module fondamental  $V_i(a)$ . Par convention,  $W_{0,a}^{(i)}$  est la représentation triviale pour tous  $i$  et  $a$ .

**2.5** Soit  $w_{k,a}^{(i)} := [W_{k,a}^{(i)}]$  la classe de  $W_{k,a}^{(i)}$  dans l'anneau de Grothendieck de  $\mathcal{M}$  (ou son *q-caractère*). Les  $w_{k,a}^{(i)}$  satisfont la liste infinie de relations suivantes, indexées par  $i \in I, k \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in \mathbb{C}^*$  :

$$w_{k,a}^{(i)} w_{k,aq^2}^{(i)} = w_{k+1,a}^{(i)} w_{k-1,aq^2}^{(i)} + \prod_j w_{k,aq^j}^{(j)},$$

où le produit est sur tous les voisins  $j$  de  $i$  dans le diagramme de Dynkin de  $\mathfrak{g}$ . C'est ce qu'on appelle le *T-système* [KNS, N2].

**Exemple 1** Prenons  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ . On a alors  $I = \{1\}$ , et on n'a pas besoin de mentionner l'indice  $i \in I$ . Chaque module simple  $S$  est paramétré par un unique polynôme de Drinfeld  $P_S(u)$ . Les modules simples et leurs caractères ont été déterminés par Chari et Pressley [CP2]. Ils ont montré que tout module simple est un produit tensoriel de modules de Kirillov-Reshetikhin. Les caractères de ces modules se calculent par récurrence au moyen du *T-système* qui s'écrit ici

$$w_{k,a} w_{k,aq^2} = w_{k+1,a} w_{k-1,aq^2} + 1,$$

où 1 désigne la classe de la représentation triviale.

Dans ce cas, les *q-caractères* sont des polynômes de Laurent en les variables  $Y_a$  ( $a \in \mathbb{C}^*$ ). Par exemple, le *q-caractère* du module  $W_{1,a}$  est

$$w_{1,a} = Y_a + Y_{aq^2}^{-1}.$$

De l'identité

$$w_{1,a} w_{1,aq^2} = w_{2,a} w_{0,aq^2} + 1 = w_{2,a} + 1,$$

on déduit que

$$w_{2,a} = Y_a Y_{aq^2} + Y_a Y_{aq^4}^{-1} + Y_{aq^2}^{-1} Y_{aq^4}^{-1}.$$

Par contre le carré tensoriel  $W_{1,a} \otimes W_{1,a}$  est simple, de polynôme de Drinfeld  $(1 - au)^2$ , et son  $q$ -caractère vaut

$$(Y_a + Y_{aq^2}^{-1})^2 = Y_a^2 + 2Y_a Y_{aq^2}^{-1} + Y_a^{-1} Y_{aq^2}^{-1}.$$

**2.6** Pour chaque  $a \in \mathbb{C}^*$ , il existe un automorphisme  $\tau_a$  de  $U$ . Si  $V$  est un objet de  $\mathcal{M}$ , on note  $V(a)$  l'objet obtenu à partir de  $V$  en tordant l'action de  $U$  par  $\tau_a$ . Le  $q$ -caractère de  $V(a)$  s'obtient à partir de celui de  $V$  en remplaçant chaque variable  $Y_b$  par  $Y_{ab}$ . Si  $S$  est un objet simple de  $\mathcal{M}$ , les polynômes de Drinfeld de  $S(a)$  sont donnés par

$$P_{i,S(a)}(u) = P_{i,S}(au), \quad (i \in I).$$

**2.7** Comme le diagramme de Dynkin de  $\mathfrak{g}$  est un arbre, il y a une unique partition  $I = I_0 \sqcup I_1$  telle que chaque arête du diagramme ait une extrémité dans  $I_0$  et l'autre dans  $I_1$ . On introduit une sous-catégorie pleine  $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$  de  $\mathcal{M}$ . Les objets de  $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$  sont les objets  $M$  de  $\mathcal{M}$  qui satisfont la condition suivante

(\*) pour chaque facteur de composition  $S$  de  $M$  et chaque  $i \in I$ , les racines du polynôme de Drinfeld  $P_{i,S}(u)$  appartiennent à  $q^{2\mathbb{Z}}$  si  $i \in I_0$ , et à  $q^{2\mathbb{Z}+1}$  si  $i \in I_1$ .

On peut montrer que pour tout objet simple  $S$  de  $\mathcal{M}$ , il existe  $a \in \mathbb{C}^*$  tel que  $S(a)$  soit un objet de  $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ . Il en résulte que l'étude de la catégorie  $\mathcal{M}$  se ramène en grande partie à celle de  $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ .

**2.8** Pour  $i \in I$  et  $k \in \mathbb{N}^*$  on définit

$$r(i,k) = \begin{cases} k & \text{si } k \text{ est pair et } i \in I_0 \text{ ou } k \text{ est impair et } i \in I_1, \\ k-1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour  $\ell \in \mathbb{N}$ , posons  $R_{i,\ell} = \{q^{r(i,\ell+1)}, q^{r(i,\ell+1)-2}, \dots, q^{r(i,\ell+1)-2\ell}\}$ , un sous-ensemble de  $q^{\mathbb{Z}}$  de cardinal  $\ell+1$ . Noter que  $R_{i,\ell} \subset R_{i,\ell+1}$  et que

$$\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} R_{i,\ell} = \begin{cases} q^{2\mathbb{Z}} & \text{si } i \in I_0, \\ q^{2\mathbb{Z}+1} & \text{si } i \in I_1. \end{cases}$$

**2.9** On introduit certaines sous-catégories pleines  $\mathcal{M}_{\ell}$  ( $\ell \in \mathbb{N}$ ) de  $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ . Les objets de  $\mathcal{M}_{\ell}$  sont les objets  $M$  de  $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$  qui satisfont la condition suivante

(\* $\ell$ ) pour chaque facteur de composition  $S$  de  $M$  et chaque  $i \in I$ , les racines du polynôme de Drinfeld  $P_{i,S}(u)$  appartiennent à  $R_{i,\ell}$ .

Il découle de propriétés connues de  $\mathcal{M}$  que chaque sous-catégorie  $\mathcal{M}_{\ell}$  est stable par sommes directes, quotients, sous-modules, extensions et produits tensoriels. De plus  $\mathcal{M}_{\ell}$  est une sous-catégorie de  $\mathcal{M}_{\ell+1}$ , et les  $\mathcal{M}_{\ell}$  ( $\ell \in \mathbb{N}$ ) forment une filtration de  $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ . En particulier, tout objet simple de  $\mathcal{M}$  appartient à une sous-catégorie  $\mathcal{M}_{\ell}$  pour  $\ell$  assez grand. L'anneau de Grothendieck de la sous-catégorie  $\mathcal{M}_{\ell}$  est l'anneau des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  en les  $n(\ell+1)$  variables

$$[V_i(a)], \quad (i \in I, a^{-1} \in R_{i,\ell}).$$

On notera cet anneau  $\mathcal{R}_{\ell}$ .

### 3 Une conjecture

**3.1** On définit un carquois  $G_\ell$  d'ensemble de sommets  $\{v_k^{(i)} \mid i \in I, 1 \leq k \leq \ell + 1\}$ . Les flèches de  $G_\ell$  sont données par la règle suivante : si  $k$  est pair et  $i \in I_0$ , ou si  $k$  est impair et  $i \in I_1$  les flèches de but  $v_k^{(i)}$  ont pour source  $v_{k+1}^{(i)}$  (si  $k < \ell + 1$ ) et  $v_{k-1}^{(i)}$  (si  $k > 1$ ), et les flèches de source  $v_k^{(i)}$  ont pour but les sommets  $v_k^{(j)}$  tels que  $j$  est relié à  $i$  dans le diagramme de Dynkin de  $\mathfrak{g}$ . Toutes les flèches de  $G_\ell$  sont de cette forme.

**Exemple 2** Prenons  $\mathfrak{g}$  de type  $A_3$  et choisissons  $I_0 = \{2\}$  et  $I_1 = \{1, 3\}$ . Le carquois  $G_3$  est alors :

$$\begin{array}{ccccccc} v_1^{(1)} & \leftarrow & v_2^{(1)} & \rightarrow & v_3^{(1)} & \leftarrow & v_4^{(1)} \\ \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\ v_1^{(2)} & \rightarrow & v_2^{(2)} & \leftarrow & v_3^{(2)} & \rightarrow & v_4^{(2)} \\ \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\ v_1^{(3)} & \leftarrow & v_2^{(3)} & \rightarrow & v_3^{(3)} & \leftarrow & v_4^{(3)} \end{array}$$

**3.2** Soit  $\mathcal{A}_\ell$  l'algèbre amassée associée au carquois  $G_\ell$ , les sommets  $v_{\ell+1}^{(i)}$  ( $i \in I$ ) correspondant à des *coefficients* (ou *variables gelées*). Par abus de notation on désigne aussi par  $v_k^{(i)}$  les variables d'amas de l'amas initial codé par  $G_\ell$ . Ainsi  $\mathcal{A}_\ell$  est le sous-anneau du corps de fractions rationnelles

$$\mathcal{F} = \mathbb{C}(v_k^{(i)} \mid i \in I, 1 \leq k \leq \ell + 1)$$

engendré par tous les éléments de  $\mathcal{F}$  obtenus à partir des  $v_k^{(i)}$  par un nombre fini de mutations.

**Conjecture 1** (i) L'application  $v_k^{(i)} \mapsto w_{k,q^{-r(i,k)}}^{(i)}$  s'étend en un isomorphisme d'anneaux de  $\mathcal{A}_\ell$  sur  $\mathcal{R}_\ell$ .

(ii) La catégorie  $\mathcal{M}_\ell$  est une catégorification monoïdale de l'algèbre amassée  $\mathcal{A}_\ell$ .

(iii) Si  $\mathcal{A}_\ell$  est une algèbre amassée de type fini, la classe dans  $\mathcal{R}_\ell$  de chaque objet simple est un monôme d'amas. En général, la classe dans  $\mathcal{R}_\ell$  d'un objet simple  $S$  de  $\mathcal{M}_\ell$  est un monôme d'amas si et seulement si  $S$  est un objet simple réel de  $\mathcal{M}_\ell$ .

### 4 Exemples et cas particuliers

**4.1** Considérons le cas le plus simple, celui de la catégorie  $\mathcal{M}_0$ . On a  $R_{i,0} = \{q\}$  si  $i \in I_1$  et  $R_{i,0} = \{1\}$  si  $i \in I_0$ , de sorte que les objets simples  $S$  de  $\mathcal{M}_0$  sont les modules de polynômes de Drinfeld  $P_{i,S}(u) = (1-u)^{b_i}$  si  $i \in I_0$  et  $P_{i,S}(u) = (1-q^{-1}u)^{b_i}$  si  $i \in I_1$ , où les  $b_i$  sont des entiers naturels arbitraires.

L'algèbre amassée correspondante  $\mathcal{A}_0$  a seulement des coefficients et pas de variable d'amas. Ainsi les monômes d'amas sont *tous* les monômes en les variables  $v_1^{(i)}$  ( $i \in I$ ). Dans ce cas la conjecture signifie que les objets simples de  $\mathcal{M}_0$  sont tout simplement *tous* les produits tensoriels de modules fondamentaux  $V_i(1)$  ( $i \in I_0$ ) et  $V_i(q^{-1})$  ( $i \in I_1$ ). (Comme tous ces produits tensoriels sont simples, ils ne dépendent pas de l'ordre de leurs facteurs.)

Dans ce cas la conjecture est vraie d'après [FM, Prop. 6.15], qui énonce qu'un produit tensoriel de modules fondamentaux  $V_{i_1}(a_1) \otimes \cdots \otimes V_{i_m}(a_m)$  n'est pas irréductible seulement s'il existe  $j \neq k$  tel que  $a_j/a_k = q^r$  pour un entier  $r$  au moins égal à 2. Cela montre que tous les produits tensoriels de modules  $V_i(1)$  ( $i \in I_0$ ) et  $V_i(q^{-1})$  ( $i \in I_1$ ) sont bien irréductibles. De plus, leur polynômes

de Drinfeld épuisent tous les polynômes de Drinfeld possibles pour un module simple de  $\mathcal{M}_0$ . En particulier, pour tout objet simple  $S$  de  $\mathcal{M}_0$ , le carré tensoriel  $S \otimes S$  est simple, et la partie (iii) de la conjecture est trivialement satisfaite.

**4.2** Prenons maintenant  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$  et  $\ell \in \mathbb{N}$ . Dans ce cas la conjecture est encore vraie d'après les travaux de Chari et Pressley [CP2], qui décrivent explicitement les objets simples de  $\mathcal{M}$  et leur factorisation en produit tensoriel de modules de Kirillov-Reshetikhin, et donnent une formule pour le produit tensoriel de deux modules de Kirillov-Reshetikhin.

Fixons la partition (triviale)  $I = I_0 = \{1\}$ . Le graphe  $G_\ell$  est

$$v_1 \rightarrow v_2 \leftarrow v_3 \rightarrow v_4 \leftarrow \cdots v_{\ell+1}$$

Le sommet  $v_{\ell+1}$  est attaché à une variable gelée. Si on le supprime, le graphe restant est un carquois de type  $A_\ell$ . La catégorie  $\mathcal{M}_\ell$  est donc une catégorification monoïdale d'une algèbre amassée de type fini  $A_\ell$ , avec anneau de coefficients égal à  $\mathbb{Z}[v_{\ell+1}]$ .

Les variables d'amas et les amas peuvent se décrire facilement. On a  $r(k) = k$  si  $k$  est pair et  $k - 1$  si  $k$  est impair. Donc  $R_\ell = \{q^\ell, q^{\ell-2}, \dots, q^{-\ell}\}$  si  $\ell$  est pair, et  $R_\ell = \{q^{\ell+1}, q^{\ell-1}, \dots, q^{-\ell+1}\}$  si  $\ell$  est impair. Les variables d'amas sont les  $w_{k,q^{2j}}$ , où

$$1 \leq k \leq \ell \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\ell \leq 2j \leq \ell - 2k + 2 & \text{si } \ell \text{ est pair,} \\ -\ell - 1 \leq 2j \leq \ell - 2k + 1 & \text{si } \ell \text{ est impair.} \end{cases}$$

Il est commode d'étiqueter la variable  $w_{k,q^{2j}}$  par le segment  $[j, j + k + 1]$ . L'ensemble des variables d'amas est alors étiqueté par les diagonales d'un polygone convexe à  $\ell + 3$  sommets, et les amas sont donnés par les triangulations du polygone, comme dans [FZ0].

Par exemple, si  $\ell = 3$ , on a  $R_3 = \{q^4, q^2, 1, q^{-2}\}$ , et les variables d'amas sont

$$w_{1,q^{-4}}, w_{1,q^{-2}}, w_{1,q^0}, w_{1,q^2}, w_{2,q^{-4}}, w_{2,q^{-2}}, w_{2,q^0}, w_{3,q^{-4}}, w_{3,q^{-2}}.$$

On les étiquette respectivement par les segments

$$[-2, 0], [-1, 1], [0, 2], [1, 3], [-2, 1], [-1, 2], [0, 3], [-2, 2], [-1, 3],$$

qu'on représente comme les diagonales d'un hexagone de sommets numérotés dans l'ordre cyclique :  $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ . L'ensemble  $\{[-1, 1], [-2, 1], [-2, 2]\}$  est alors une triangulation et l'amas correspondant est  $\{w_{1,q^{-2}}, w_{2,q^{-4}}, w_{3,q^{-4}}\}$ .

Comme dans [FZ0], la multiplication de deux variables d'amas qui n'appartiennent pas au même amas s'effectue par la règle du quadrilatère de Ptolémée, à condition d'interpréter les côtés  $[j, j + 1]$  du polygone comme valant 1, excepté le dernier côté  $[r(\ell)/2 + 2, -r(\ell + 1)/2]$  qui se spécialise en  $v_{\ell+1} = w_{\ell+1,q^{-r(\ell+1)}}$ . Par exemple, si  $\ell = 3$ ,

$$\begin{aligned} w_{2,q^{-4}} w_{1,q^0} &= [-2, 1] \times [0, 2] = [-2, 0] \times [1, 2] + [0, 1] \times [-2, 2] = w_{1,q^{-4}} + w_{3,q^{-4}}, \\ w_{3,q^{-4}} w_{2,q^0} &= [-2, 2] \times [0, 3] = [-2, 0] \times [2, 3] + [0, 2] \times [3, -2] = w_{1,q^{-4}} + w_{1,q^0} w_{4,q^{-4}}, \end{aligned}$$

en accord avec la formule de Chari et Pressley.

**4.3** Considérons maintenant  $\mathfrak{g}$  quelconque de type  $A, D, E$ , et  $\ell = 1$ . Par construction,  $\mathcal{A}_1$  est une algèbre amassée admettant un nombre fini de variables d'amas. Son type dans la classification de Fomin et Zelevinsky coïncide avec le type de  $\mathfrak{g}$ . L'anneau des coefficients de  $\mathcal{A}_1$  est  $\mathbb{Z}[v_2^{(i)} \mid i \in I]$ . La graine initiale donnée par  $G_1$  est presque ce que Fomin and Zelevinsky appellent une graine

avec coefficients principaux [FZ2] : la partie non principale de la matrice d'échange est diagonale avec des  $\pm 1$  sur la diagonale. D'après [BFZ],  $\mathcal{A}_1$  est une algèbre de polynômes, de générateurs les  $n$  variables d'amas de la graine initiale et les  $n$  nouvelles variables obtenues en mutant la graine initiale dans les  $n$  directions possibles.

Ainsi dans ce cas la conjecture dit que  $\mathcal{M}_1$  est une catégorification monoïdale d'une algèbre amassée de type  $A, D, E$ . De plus, d'après ce que j'ai observé pour les types  $A_2, A_3$  et  $D_4$ , les modules simples premiers de  $\mathcal{M}_1$  semblent être en correspondance évidente avec les racines presque positives. A savoir, si  $\beta = \sum_{i \in I} n_i \alpha_i$  est une racine positive, la variable d'amas  $x[\beta]$  qui lui est attachée est la classe du module simple premier de polynômes de Drinfeld

$$P_i(u) = (1 - uq^{-2})^{n_i} \text{ si } i \in I_0, \quad P_i(u) = (1 - uq)^{n_i} \text{ si } i \in I_1.$$

Si  $\beta = -\alpha_j$  alors  $x[\beta]$  est la classe du module fondamental de polynômes de Drinfeld

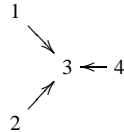
$$P_j(u) = 1 - u \text{ si } j \in I_0, \quad P_j(u) = 1 - uq^{-1} \text{ si } j \in I_1, \quad P_i(u) = 1 \text{ si } i \neq j.$$

La graine initiale a pour variables d'amas les  $x[-\alpha_j]$ , et les  $x[\alpha_j]$  sont leurs mutations. Ainsi  $\mathcal{A}_1 = \mathbb{C}[x[\alpha_j], x[-\alpha_j] \mid j \in I]$ , et ceci est en accord avec le fait que l'anneau de Grothendieck est un anneau de polynômes en les classes des modules fondamentaux de  $\mathcal{M}_1$ .

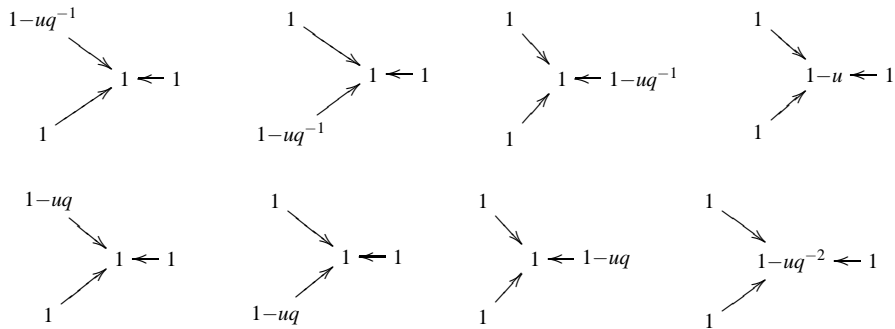
Le fait que les modules simples correspondant aux monômes d'amas épuisent bien toutes les classes d'objets simples de  $\mathcal{M}_1$  devrait résulter de l'existence d'une unique "développement en amas" pour chaque élément du réseau des racines [FZ1, Theorem 3.11].

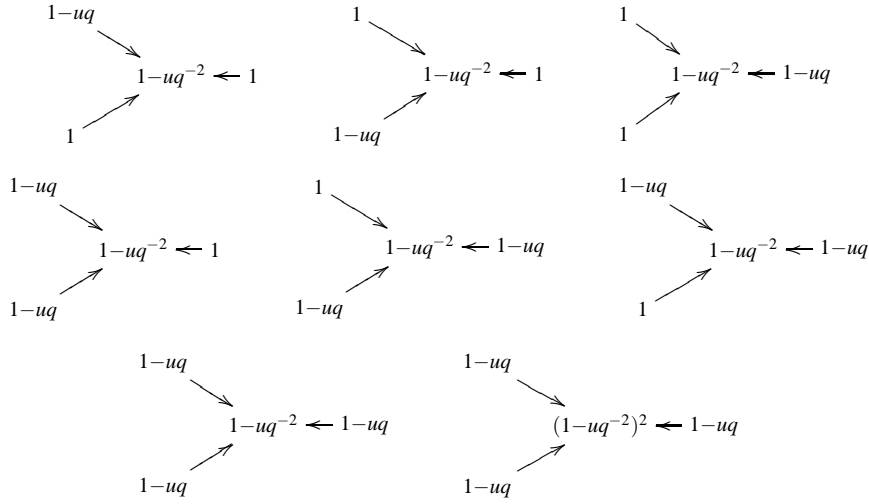
Je crois que même dans ce cas simple la conjecture n'est pas triviale. En effet, il est peut-être possible de vérifier que les variables d'amas, en nombre fini, sont bien les classes de modules simples et de calculer les polynômes de Drinfeld correspondants. Pour cela on peut faire, jusqu'à un certain point, des calculs de  $q$ -caractères, voire de  $(q, t)$ -caractères. Mais il y a un nombre infini de monômes d'amas et pas de critère simple pour déterminer si un produit tensoriel de modules simples est encore simple ...

**Exemple 3** Soit  $\mathfrak{g}$  de type  $D_4$ . Soit  $Q$  le carquois



On note  $I_0 = \{3\}$  l'ensemble des puits, et  $I_1 = \{1, 2, 4\}$  l'ensemble des sources de  $Q$ . Les objets simples de  $\mathcal{M}_1$  correspondant aux 16 racines "presque positives" sont donnés ci-dessous via leurs polynômes de Drinfeld. Chaque module est représenté par une copie de  $Q$  dans laquelle chaque sommet  $i \in I$  est remplacé par le polynôme de Drinfeld correspondant  $P_i(u)$ .





Les racines presque positives correspondantes, dans le même ordre, sont :

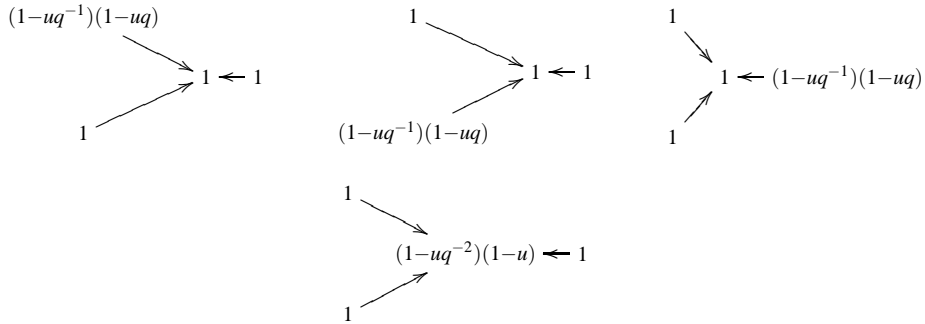
$$-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_4, -\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4.$$

Les dimensions des représentations, encore dans le même ordre, sont :

$$8, 8, 8, 29, 8, 8, 8, 29, 168, 168, 168, 1064, 1064, 1064, 7287, 167237.$$

L'anneau des coefficients de  $\mathcal{A}_1$  est l'anneau de polynômes en les 4 générateurs correspondant aux 4 modules simples suivants :



Ils ont pour dimensions respectives 35, 35, 35, 329. Un exemple de relation d'échange, écrite dans l'anneau de Grothendieck  $\mathcal{R}_1$ , est

$$\begin{array}{c} 1-ug^{-1} \\ \searrow \\ 1 \nearrow \\ \text{---} 1 \leftarrow 1 \end{array}
 \otimes
 \begin{array}{c} 1-ug \\ \searrow \\ 1 \nearrow \\ \text{---} 1-ug^{-2} \leftarrow 1 \end{array}
 =
 \begin{array}{c} (1-ug^{-1})(1-ug) \\ \searrow \\ 1 \nearrow \\ \text{---} 1-ug^{-2} \leftarrow 1 \end{array}
 \oplus
 \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 1 \nearrow \\ \text{---} (1-ug^{-2})(1-u) \leftarrow 1 \end{array}$$

Le premier module du membre de droite se factorise en

$$\begin{array}{c} (1-ug^{-1})(1-ug) \\ \searrow \\ 1 \nearrow \\ \text{---} 1-ug^{-2} \leftarrow 1 \end{array}
 =
 \begin{array}{c} (1-ug^{-1})(1-ug) \\ \searrow \\ 1 \nearrow \\ \text{---} 1 \leftarrow 1 \end{array}
 \otimes
 \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 1 \nearrow \\ \text{---} 1-ug^{-2} \leftarrow 1 \end{array}$$



**4.4** Prenons  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$  et  $\ell = 2$ . L'algèbre amassée  $\mathcal{A}_2$  est de type fini  $D_4$ . Elle admet 16 variables d'amas. Des calculs de  $q$ -caractères permettent de déterminer les 16 objets simples correspondants de  $\mathcal{M}_2$ . Avec la même convention qu'à l'exemple précédent ce sont les modules simples de polynômes de Drinfeld :

$$\begin{aligned}
1-uq^{-2} \leftarrow 1 & \quad 1-u \leftarrow 1 & \quad 1-uq^2 \leftarrow 1 & \quad 1 \leftarrow 1-uq^{-1} & \quad 1 \leftarrow 1-uq & \quad 1 \leftarrow 1-uq^3 \\
1-uq^{-2} \leftarrow 1-uq & \quad 1-u \leftarrow 1-uq^3 & \quad 1-uq^2 \leftarrow 1-uq^{-1} & & & \\
(1-uq^{-2})(1-u) \leftarrow 1 & \quad (1-u)(1-uq^2) \leftarrow 1 & \quad 1 \leftarrow (1-uq^{-1})(1-uq) & \quad 1 \leftarrow (1-uq)(1-uq^3) & & \\
(1-uq^{-2})(1-u) \leftarrow 1-uq^3 & \quad 1-uq^{-2} \leftarrow (1-uq)(1-uq^3) & \quad (1-uq^{-2})(1-u) \leftarrow (1-uq)(1-uq^3) & & & 
\end{aligned}$$

Ils ont pour dimensions respectives

$$3, 3, 3, 3, 3, 3, 8, 8, 8, 6, 6, 6, 6, 15, 15, 35.$$

Les 2 générateurs de l'anneau des coefficients correspondent aux 2 modules de Kirillov-Reshetikhin

$$(1-uq^{-2})(1-u)(1-uq^2) \leftarrow 1 \quad 1 \leftarrow (1-uq^{-1})(1-uq)(1-uq^3)$$

de dimension 10. Il y a 50 amas. Si au module simple  $S$

$$(1-uq^{-2})^a(1-u)^b(1-uq^2)^c \leftarrow (1-uq^{-1})^d(1-uq)^e(1-uq^3)^f$$

on associe le vecteur  $\rho(S) = (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{Z}^6$ , on obtient les 16 + 2 vecteurs suivants

$$\begin{aligned}
(1, 0, 0, 0, 0, 0), & \quad (0, 1, 0, 0, 0, 0), \quad (0, 0, 1, 0, 0, 0), \quad (0, 0, 0, 1, 0, 0), \quad (0, 0, 0, 0, 1, 0), \quad (0, 0, 0, 0, 0, 1), \\
(1, 0, 0, 0, 1, 0), & \quad (0, 1, 0, 0, 0, 1), \quad (0, 0, 1, 1, 0, 0), \\
(1, 1, 0, 0, 0, 0), & \quad (0, 1, 1, 0, 0, 0), \quad (0, 0, 0, 1, 1, 0), \quad (0, 0, 0, 0, 1, 1), \\
(1, 1, 0, 0, 0, 1), & \quad (1, 0, 0, 0, 1, 1), \quad (1, 1, 0, 0, 1, 1), \\
(1, 1, 1, 0, 0, 0), & \quad (0, 0, 0, 1, 1, 1).
\end{aligned}$$

Les 50 amas donnent 50 bases du  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathbb{Z}^6$ , qui engendrent 50 cônes simpliciaux. On peut vérifier que les intérieurs de ces cônes sont deux à deux disjoints et que leur réunion est égale à  $\mathbb{R}_{\geq 0}^6$ . Autrement dit, ils forment un *éventail simplicial complet* du cône  $\mathbb{R}_{\geq 0}^6$ . Ainsi chaque  $\beta \in \mathbb{N}^6$  admet un unique "développement en amas". Ceci est une confirmation expérimentale convaincante de ce que les classes des modules simples de  $\mathcal{M}_2$  sont exactement les monômes d'amas.

En fait, dans ce cas, la conjecture est déjà prouvée (voir plus bas, § 4.7).

**4.5** Il est facile, en utilisant la classification de Fomin-Zelevinsky, de déterminer quelles algèbres  $\mathcal{A}_\ell$  ont un nombre fini de variables d'amas. Les résultats sont donnés dans la Table 1. Modulo la conjecture, cette table nous dit donc dans quelles catégories  $\mathcal{M}_\ell$  on peut factoriser tout objet simple en un produit tensoriel de facteurs simples appartenant à un ensemble *fini*.

Type de $\mathfrak{g}$	Niveau $\ell$	Type de $\mathcal{A}_\ell$
$A_1$	$\ell$	$A_\ell$
$X_n$	1	$X_n$
$A_2$	2	$D_4$
$A_2$	3	$E_6$
$A_2$	4	$E_8$
$A_3$	2	$E_6$
$A_4$	2	$E_8$

Table 1: Algèbres  $\mathcal{A}_\ell$  de type fini.

**4.6** Prenons  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_5$  et  $\ell = 3$ . Dans ce cas l'algèbre amassée  $\mathcal{A}_3$  n'est pas de type fini. Choisissons  $I_0 = \{1, 3\}$  et  $I_1 = \{2, 4\}$ . Ainsi le module simple  $S$  de polynômes de Drinfeld

$$1-u \leftarrow (1-uv^{-3})(1-uv^3) \rightarrow 1-u \leftarrow 1$$

appartient à la sous-catégorie  $\mathcal{M}_3$ . D'après [L] son carré  $S \otimes S$  n'est pas un module simple. La classe de  $S \otimes S$  dans l'anneau de Grothendieck est la somme de 2 classes de modules simples :

$$(1-u)^2 \leftarrow (1-uv^{-3})^2(1-uv^3)^2 \rightarrow (1-u)^2 \leftarrow 1 \oplus 1 \leftarrow (1-uv^{-3})(1-uv^{-1})(1-uv)(1-uv^3) \rightarrow 1 \leftarrow (1-uv^{-1})(1-uv)$$

Si  $\mathcal{M}_3$  est bien une catégorification monoïdale de  $\mathcal{A}_3$ , la classe de  $S$  ne peut donc pas être un monôme d'amas, car son carré n'est pas dans la base canonique.

Pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_4$  et  $\ell = 3$ , on a un exemple analogue. Le module simple de polynômes de Drinfeld

$$1-u \leftarrow (1-uv^{-3})(1-uv^3) \rightarrow 1-u$$

appartient à la sous-catégorie  $\mathcal{M}_3$  et la classe de son carré tensoriel est la somme de 2 classes de modules simples :

$$(1-u)^2 \leftarrow (1-uv^{-3})^2(1-uv^3)^2 \rightarrow (1-u)^2 \oplus 1 \leftarrow (1-uv^{-3})(1-uv^{-1})(1-uv)(1-uv^3) \rightarrow 1$$

Type de $\mathfrak{g}$	Niveau $\ell$	Type de $\mathcal{A}_\ell$
$A_1$	$\ell$	$A_\ell$
$A_2$	1	$A_2$
$A_2$	2	$D_4$
$A_3$	1	$A_3$

Table 2: Cas où la Conjecture 1 est prouvée.

**4.7** Si  $\mathfrak{g}$  est de type  $A_n$  et  $\ell \in \mathbb{N}^*$ , la Conjecture 1 résulterait d'une conjecture de [GLS] suivant laquelle les monômes d'amas de  $\mathbb{C}[N]$  appartiennent à la base canonique duale (on sait qu'ils appartiennent à la base *semi*-canonique duale). Ici  $N$  désigne un sous-groupe unipotent maximal d'un groupe algébrique simple de type  $A_k$ . Il faudrait que cette conjecture soit démontrée pour tous les types  $A_k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ). On pourrait alors appliquer le théorème d'Ariki et la dualité de Schur-Weyl quantique affine.

La conjecture de [GLS] est prouvée si  $N$  est de type  $A_k$  ( $k \leq 4$ ). Cela suffit déjà pour démontrer la Conjecture 1 dans les cas indiqués dans la Table 2 (autres que  $A_1$ ).

algèbre amassée $\mathcal{A}$	catégorification Frobenius $\mathcal{C}$	catégorification monoïdale $\mathcal{M}$
+	?	$\oplus$
$\times$	$\oplus$	$\otimes$
amas	objet rigide	objet simple réel
variable d'amas	objet rigide indécomposable	objet simple premier réel

Table 3: *Correspondances entre les catégorifications.*

## 5 Conclusion

Ainsi on peut obtenir, du moins dans certains exemples, deux catégorifications assez différentes d'une même algèbre amassée  $\mathcal{A}$ . Les correspondances entre ces notions sont résumées dans la Table 3. Dans  $\mathcal{C}$  les variables d'amas correspondent à des objets indécomposables, dans  $\mathcal{M}$  à des objets simples. La catégorie  $\mathcal{C}$  est beaucoup plus “petite”, la catégorie  $\mathcal{M}$  beaucoup plus mal comprise : que sait-on de ses propriétés homologiques ? Le produit de deux variables d'amas correspond dans  $\mathcal{C}$  à la somme directe de deux objets, dans  $\mathcal{M}$  au produit tensoriel. On a envie de voir  $\mathcal{M}$  comme une “exponentielle” de  $\mathcal{C}$ , ou  $\mathcal{C}$  comme une “linéarisation” de  $\mathcal{M}$  ...

## References

- [BFZ] A. BERENSTEIN, S. FOMIN, A. ZELEVINSKY, *Cluster algebras III. Upper bounds and double Bruhat cells*, Duke Math. J., **126** (2005), 1–52.
- [BMRRT] A. BUAN, R. MARSH, M. REINEKE, I. REITEN AND G. TODOROV, *Tilting theory and cluster combinatorics*, Adv. Math. **204** (2006), 572–618.
- [CK] P. CALDERO, B. KELLER *From triangulated categories to cluster algebras*, mathRT/0506018.
- [CP1] V. CHARI, A. PRESSLEY, *A guide to quantum groups*, Cambridge 1994.
- [CP2] V. CHARI, A. PRESSLEY, *Quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **142** (1991), 261–283.
- [FM] E. FRENKEL, E. MUKHIN, *Combinatorics of  $q$ -characters of finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **216** (2001), 23–57.
- [FZ0] S. FOMIN, A. ZELEVINSKY, *Cluster algebras I: foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 497–529.
- [FZ1] S. FOMIN, A. ZELEVINSKY,  *$Y$ -systems and generalized associahedra*, Ann. of Math. **158** (2003), 977–1018.
- [FZ2] S. FOMIN, A. ZELEVINSKY, *Cluster algebras IV: coefficients*, Compos. Math. **143** (2007), 112–164.
- [GLS] C. GEISS, B. LECLERC, J. SCHRÖER, *Rigid modules over preprojective algebras*, Invent. Math., **165** (2006), 589–632.
- [J] M. JIMBO, *Topics from Representations of  $U_q(\mathfrak{g})$  – An Introductory Guide to Physicists*. Quantum group and quantum integrable systems, 1–61, Nankai Lectures Math. Phys., World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.
- [KMS] M. KHOVANOV, V. MAZORCHUK, C. STROPPEL, *A brief review of abelian categorifications*, mathRT/0702746
- [KNS] A. KUNIBA, T. NAKANISHI, J. SUZUKI, *Functional relations in solvable lattice models. I. Functional relations and representation theory*. Internat. J. Modern Phys. A **9** (1994), 5215–5266, arXiv:hep-th/9309137.
- [L] B. LECLERC, *Imaginary vectors in the dual canonical basis of  $U_q(\mathfrak{n})$* , Transform. Groups **8** (2003), 95–104.
- [MRZ] R. MARSH, M. REINEKE, A. ZELEVINSKY, *Generalized associahedra via quiver representations*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 4171–4186.
- [N1] H. NAKAJIMA, *Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras*. J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 145–238.

- [N2] H. NAKAJIMA, *t*-analogs of *q*-characters of Kirillov-Reshetikhin modules of quantum affine algebras. Represent. Theory **7** (2003), 259–274.
- [SZ] P. SHERMAN, A. ZELEVINSKY, *Positivity and canonical bases in rank 2 cluster algebras of finite and affine types*, Moscow Math. J. **4** (2004), 947–974.