Densité de points et minoration de hauteur

Nicolas Ratazzi

Université Paris 6, Projet théorie des nombres, UMR 7586, case 247, 4 place Jussieu, Institut de mathématiques, 75252 Paris, FRANCE

Abstract

We obtain a lower bound for the normalised height of a non-torsion subvariety V of a C.M. abelian variety. This lower bound is optimal in terms of the geometric degree of V, up to a power of a "log". We thus extend the results of F. Amoroso and S. David on the same problem on a multiplicative group $\mathbb{G}_m^n$. We prove furthermore that the optimal lower bound (conjectured by S. David and P. Philippon) is a corollary of the conjecture of S. David and M. Hindry on the abelian Lehmer's problem. We deduce these results from a density theorem on the non-torsion points of V.

Key words: abelian varieties, normalised height, Lehmer problem
1991 MSC: 11G50, 11J86, 14G40, 14K12, 14K22

1 Introduction

On sait depuis les travaux de Philippon [13] [14] [15], puis Bost, Gillet, Soulé [6] dans le cadre de l'intersection arithmétique, comment définir la hauteur des variétés projectives ; l'idée étant de considérer un point comme une variété de dimension zéro et de généraliser ceci en dimension supérieure. De même que dans le cas des points, on sait pour les variétés abéliennes munies d'un fibré en droites ample et symétrique définir une hauteur particulierement agréable : la hauteur canonique $\widehat{h}_L$, ou hauteur normalisée. En dimension zéro, il existe un théorème caractérisant les points de hauteur normalisée nulle ; c'est un résultat de Kronecker dans le cas de $\mathbb{G}_m$. Philippon [15] (dans le cas d'un produit de courbes elliptiques) puis Zhang [19] et David-Philippon [8] dans le cas général ont montré comment généraliser ce résultat pour caractériser les sous-variétés de hauteur normalisée nulle : ce sont les translatées d'un sous-groupe algébrique par un point de torsion. On dit qu'une telle sous-variété

Email address: ratazzi@math.jussieu.fr (Nicolas Ratazzi).

est une sous-variété de torsion. La réponse à cette question répond à une conjecture de Bogomolov. Ceci étant, on peut se demander comment minorer la hauteur normalisée d'une sous-variété de hauteur non-nulle d'une variété abélienne. Dans leur article [8], David et Philippon ont formulé un problème général (le problème 1.7) contenant cette question. On peut notamment faire ressortir de la discussion suivant la formulation de leur problème l'énoncé suivant :

Conjecture 1 *(David-Philippon) Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres k, munie d'un fibré ample et symétrique L. Soit V une sous-variété stricte de A sur k, k-irréductible et qui n'est pas réunion de sous-variétés de torsion, alors, on a l'inégalité*

$$\frac{\widehat{h}_L(V)}{\deg_L(V)} \geq c(A, L) \deg_L(V)^{-\frac{1}{s-\dim V}},$$

où s est la dimension du plus petit sous-groupe algébrique contenant V, et où $c(A, L)$ est une constante ne dépendant que de A et de L.

Dans ce qui suit, on reprend le résultat principal (ainsi que le schéma de démonstration) de Amoroso-David [2] concernant le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m^n$, pour obtenir un résultat analogue dans le cadre des variétés abéliennes. En utilisant les résultats de David-Hindry [7] concernant le problème de Lehmer abélien, on obtient en corollaire un résultat en direction de la conjecture 1. Ce dernier ne concerne que les variétés abéliennes de type C.M., par contre il est essentiellement optimal (à un facteur log près) en le degré de V.

Je tiens à remercier M. Hindry pour sa patiente relecture, et je le remercie également, ainsi que S. David, pour m'avoir encouragé à écrire cet article.

1.1 Degré et hauteur

Soit k un corps de nombres. On dira que V est une *variété algébrique* sur k si V est un k-schéma de type fini géométriquement réduit. On dira que G est un *groupe algébrique* sur k si c'est une variété en groupes sur k. On dira que A est une *variété abélienne* définie sur k si c'est un groupe algébrique connexe propre et lisse sur k. Par sous-variété on entendra toujours sous-variété fermée.

Soient $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers de k, n un entier, et X une variété projective munie d'un plongement $\varphi_L : X \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n$ défini par un fibré L très ample sur X. Si $\mathcal{O}(1)$ dénote le fibré standard sur $\mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_k}$, on a $\varphi_L^*\mathcal{O}(1)_k \simeq L$. On note $\overline{\mathcal{O}(1)}$ le fibré standard muni de la métrique de Fubini-Study. Si V est une sous-variété de X, on note $\mathcal{V}_L$ l'adhérence schématique de $\varphi_L(V)$ dans $\mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_k}$.

Définition 1 On définit le *degré de la variété* V relativement à L, et on note $\deg_L V$ l'entier $\deg_k \left(c_1(\mathcal{O}(1)_k)^{\dim V} \cdot \varphi_L(V)\right)$ où $\deg_k$ est le degré projectif usuel sur $\mathbb{P}^n_k$.

Définition 2 On appelle *hauteur de la variété* V associée à L, et on note $h_L(V)$ le réel $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(\mathcal{V}_L)$ où $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(.)$ est la hauteur, au sens de Bost-Gillet-Soulé [6], associée au fibré hermitien $\overline{\mathcal{O}(1)}$.

Remarque 1 Par le théorème 3 p. 366 de [17], $h_L(V)$ coincide avec la hauteur $h(f_{V,L})$ de Philippon, telle que définie au paragraphe 2. de [15], où $f_{V,L}$ est une forme éliminante de l'idéal de définition de $\varphi_L(V)$ dans $k[X_0, \ldots, X_n]$. (Le terme d'erreur de [17] disparait du fait du changement de normalisation pour la hauteur de Philippon entre les articles [13] et [15]).

Définition 3 Dans le cas où $X = A$ est une variété abélienne, et où L est en plus symétrique, Philippon [15] (dans le cas où L définit un plongement projectivement normal) puis Zhang [19], avec des méthodes arakeloviennes, ont montré en utilisant un procédé de limite à la Néron-Tate, comment définir une *hauteur canonique*, notée $\widehat{h}_L(.)$, sur l'ensemble des sous-variétés de A. Cette hauteur vérifie notamment : si X est une sous-variété de A, de stabilisateur G_X, et si n est un entier, alors,

$$\widehat{h}_L\left([n](X)\right) = \frac{n^{2(\dim X+1)}}{\mid \ker\,[n] \cap G_X \mid}\widehat{h}_L(X).$$

Définition 4 Soit A/k une variété abélienne. On dit que V est une *sous-variété de torsion* de A si $V = a + B$ avec $a \in A_{\text{tors}}$ et B une sous-variété abélienne de A. On dit que c'est une *sous-variété de torsion stricte* de A si c'est une sous-variété de torsion $a+B$ avec B une sous-variété abélienne stricte de A.

D'après les résultats de Philippon [15], David-Philippon [8] et Zhang [19], on a, si V est une sous-variété de A/k définie sur une extension finie K/k,

$$\widehat{h}_L(V) = 0 \text{ si et seulement si } V \text{ est une sous-variété de torsion.}$$

Définition 5 Soient V une sous-variété de A sur k, et θ un nombre réel positif. On pose $V(\theta, L) = \left\{x \in V(\overline{k}) \ / \ \widehat{h}_L(x) \leq \theta\right\}$. On définit alors le *minimum essentiel* de V, et on note $\mu_L^{\text{ess}}(V)$ le réel

$$\mu_L^{\text{ess}}(V) = \inf\left\{\theta > 0 \ / \ \overline{V(\theta, L)} = V \ \right\}.$$

Soient k un corps de nombres, A/k une variété abélienne de dimension g, et L un fibré en droites très ample sur A. On démontre le théorème suivant :

Théorème 1 *Soient K/k une extension finie, et V une sous-variété algébrique de A sur K, K-irréductible et contenue dans aucune réunion de sous-variétés de torsion strictes de A. Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$, l'ensemble des points $x \in V(\overline{K})$ d'ordre infini pour toute sous-variété abélienne stricte de A, et dont la hauteur de Néron-Tate relativement à L vérifie*

$$\widehat{h}_L(x) \leq \frac{\widehat{h}_L(V)}{\deg_L V} + \varepsilon$$

est Zariski dense dans V.

On peut donner deux corollaires à ce théorème. Pour cela, on a besoin d'une définition.

Définition 6 Soient A une variété abélienne définie sur un corps de nombres k, L un fibré en droites ample symétrique, et $x \in A(\overline{k})$. Suivant [7] on appelle *indice d'obstruction de x*, et on note $\delta_L(x)$ la quantité

$$\delta_L(x) = \min\left\{\deg_L X^{\frac{1}{\operatorname{codim} X}} \ \ / \ \ x \in X\right\},$$

où le minimum est pris sur l'ensemble des sous-variétés strictes, X, de A sur k, k-irréductibles.

De même, si V est une sous-variété stricte de A sur k, k-irréductible, on appelle *indice d'obstruction de V*, et on note $\delta_L(V)$ la quantité

$$\delta_L(V) = \min\left\{\deg_L X^{\frac{1}{\operatorname{codim} X}} \ \ / \ \ V \subset X\right\},$$

où le minimum est pris sur l'ensemble des sous-variétés strictes, X, de A sur k, k-irréductibles.

Remarque 2 On a par définition, $1 \leq \delta_L(V) \leq \deg_L(V)^{\frac{1}{\operatorname{codim} V}}$.

En utilisant le résultat de [7] concernant le problème de Lehmer pour les variétés abéliennes de type C.M., on peut alors montrer le résultat suivant :

Corollaire 1 *Supposons de plus que A est de type C.M. Soit V une sous-variété algébrique stricte de A sur k, k-irréductible et contenue dans aucune* *réunion de sous-variétés de torsion strictes de A. Alors, l'ensemble*

$$\left\{ x \in V(\overline{k}) \quad / \quad \widehat{h}_L(x) \leq \frac{c(A,L)}{\delta_L(V)} \left(\frac{\log\log(3\delta_L(V))}{\log(3\delta_L(V))} \right)^{\kappa(g)} \right\},$$

n'est pas Zariski dense dans V. Ici $c(A,L)$ est une constante ne dépendant que de A et de L, et $\kappa(g)$ est une constante effectivement calculable ne dépendant que de g (par exemple $\kappa(g) = (2g(g+1)!)^{g+2}$ convient).

Remarque 3 Ce corollaire est une conséquence formelle du théorème 1 et du théorème principal de [7]. En particulier, toute amélioration dans la direction de la conjecture de Lehmer abélienne, améliore d'autant le corollaire. Le meilleur résultat possible correspondrait au cas où A/k est une variété abélienne quelconque, et où l'on peut prendre $\kappa(g) = 0$, i.e., à la conjecture de Lehmer abélienne telle que énoncée dans [7].

Dans ce qui suit, si A est une variété abélienne, on suppose donné avec A une isogénie avec un produit de variétés abéliennes simples $\prod A_i^{n_i}$. On suppose de plus que la variété produit est munie du fibré associé au plongement

$$A = \prod_{i=1}^{n} A_i^{r_i} \hookrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{n_i}^{r_i} \overset{\text{Segre}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^N,$$

les A_i étant plongées dans $\mathbb{P}_{n_i}$ par des fibrés L_i amples et symétriques. Si L est un fibré en droites symétrique ample sur A, on notera par $c(A,L)$ une constante ne faisant intervenir que ces données.

Corollaire 2 *Si A est de type C.M., L un fibré en droites ample et symétrique de A, et si V est une sous-variété algébrique stricte de A sur k, k-irréductible et qui n'est pas réunion de sous-variétés de torsion, alors, on a l'inégalité*

$$\frac{\widehat{h}_L(V)}{\deg_L(V)} \geq \mu_L^{\text{ess}}(V) \geq c(A,L) \deg_L(V)^{-\frac{1}{s-\dim V}} \left(\log(3\deg_L(V))\right)^{-\kappa(s)},$$

où s est la dimension du plus petit sous-groupe algébrique contenant V.

Remarque 4 Soit $P \in A(\overline{k})$. En notant V la sous-variété de A sur k obtenue à partir de P en rajoutant tous ses conjugués, on constate que le résultat obtenu est bien une généralisation d'un énoncé du type Lehmer : il s'agit d'un énoncé de nature arithmétique faisant intervenir le degré d'un corps de définition de V.

Remarque 5 En fait, il suit des preuves des corollaires 1 et 2 le résultat suivant :

> soient A/k une variété abélienne de dimension g, L un fibré en droites symétrique ample sur A. On appelle Lehmer$(A/k, L, \gamma)$ la propriété sui-

vante : il existe des constantes $c(A,L)$ ne dépendant que de A et de L, et $\gamma(g)$ ne dépendant que de g, telles que pour tout point $x \in A(\overline{k})$ qui est d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de A, on a

$$\widehat{h}_L(x) \geq c(A,L)\delta(x)^{-\gamma(g)}.$$

On note ensuite Minorant$(A/k, L, V, \gamma)$ l'énoncé : il existe des constantes $c'(A,L)$ ne dépendant que de A et de L, et $\gamma(g)$ ne dépendant que de g, telles que si V est une sous-variété algébrique stricte de A sur k, k-irréductible et qui n'est pas réunion de sous-variétés de torsion, alors, on a l'inégalité

$$\frac{\widehat{h}_L(V)}{\deg_L(V)} \geq c'(A,L) \deg_L(V)^{-\frac{\gamma(g)}{s-\dim V}},$$

où s est la dimension du plus petit sous-groupe algébrique contenant V.

Avec ces notations, on a

$$\text{Lehmer}(A/k, L, \gamma) \Rightarrow \text{ Minorant}(A/k, L, V, \gamma).$$

De plus, et avec les notations de la remarque précédente 5, on trouve dans [7] la conjecture suivante concernant le problème de Lehmer abélien :

Conjecture 2 (David-Hindry) *L'assertion* Lehmer$(A/k, L, 1)$ *est vraie pour toute variété abélienne A/k.*

En utilisant la remarque, on en déduit qu'une bonne minoration de la hauteur sur les points entraine une bonne minoration de la hauteur sur toutes les sous-variétés. Plus précisément, on a :

Corollaire 3 *La conjecture 2 implique la conjecture 1.*

La suite est consacrée à une démonstration du théorème 1 et de ces corollaires.

2 La proposition clé

Proposition 1 (Amoroso-David) *Soient n un entier et X une sous-variété de $\mathbb{P}^n$ sur k, k-irréductible. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, X) > 0$ vérifiant les propriétés suivantes :*

soient δ un entier supérieur à δ_0, et Y une sous-variété de $\mathbb{P}^n$ sur k de codimension supérieure à 1, ne contenant pas X. Si

$$\log \deg_k(Y) \leq \frac{\delta\varepsilon}{4\dim X},$$

alors il existe $x \in (X \setminus Y)(\overline{k})$ tel que

$$h_{\mathcal{O}(1)}(x) \leq \frac{h_{\mathcal{O}(1)}(X)}{\deg_k(X)} + \varepsilon \quad \text{et} \quad [k(x):k] \leq (\deg_k(X))\delta^{\dim X}.$$

Démonstration C'est la proposition 2.1. de [2] : cette dernière est simplement énoncée avec Y une hypersurface, mais la preuve dans le cas général reste mot pour mot la même. $\square$

En utilisant un procédé de limite, on en déduit :

Corollaire 4 *Soit V une sous-variété de A sur k, k-irréductible. Pour tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1, V, A, L) > 0$ vérifiant les propriétés suivantes :*

soient δ un entier supérieur à δ_1, et W une sous-variété de A sur k de codimension supérieure à 1, ne contenant pas V. Si

$$\log \deg_L W \leq \frac{\delta}{4\dim V},$$

alors il existe $x \in (V \setminus W)(\overline{k})$ tel que

$$\widehat{h}_L(x) \leq \frac{\widehat{h}_L(V)}{\deg_L V} + \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad [k(x):k] \leq c_0(\varepsilon_1, A, L)(\deg_L V)\delta^{\dim V},$$

où $c_0(\varepsilon_1, A, L)$ est une constante strictement positive ne dépendant que de ε_1, A et L.

Démonstration Quitte à remplacer L par $L^{\otimes 4}$, on suppose que le plongement $\varphi : A \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ associé au fibré en droites très ample symétrique L, est projectivement normal. Soit p un nombre premier et N un entier strictement positif. On considère le plongement projectif $\psi = \psi_{p,L}$ de A, composé des plongements suivants

$$\begin{array}{rcccc} A \hookrightarrow & A^N & \hookrightarrow (\mathbb{P}^n)^N & \underset{\text{Segre}}{\hookrightarrow} & \mathbb{P}^{(n+1)^N-1} \\ x \mapsto & (x, [p]x, \ldots, [p^{N-1}]x) & & & \end{array}$$

Il s'agit du *plongement enroulé* défini dans [15] paragraphe 3. En notant h_ψ la hauteur associée à ce plongement, la proposition 7. de [15] nous dit que

$$\deg_\psi(V) = \left(\frac{p^{2N}-1}{p^2-1}\right)^{\dim V} \deg_L(V), \quad \text{et} \quad \widehat{h}_\psi(V) = \left(\frac{p^{2N}-1}{p^2-1}\right)^{\dim V} \widehat{h}_L(V).$$

Ainsi, en appliquant la proposition 9. de [15], on en déduit qu'il existe un réel $c_p > 0$ indépendant de N, tel que

$$\left| \left(\frac{p^{2N}-1}{p^2-1}\right) \frac{\widehat{h}_L(V)}{\deg_L(V)} - \frac{h_{\mathcal{O}(1)}(\psi(V))}{\deg_k(\psi(V))} \right| \leq 8c_pN. \tag{1}$$

Soit maintenant $\varepsilon_1 > 0$. On fixe $p = 3$ par exemple, et on choisit $N = N(\varepsilon_1, A, L)$ le plus petit entier tel que

$$\frac{16c_pN+1}{\left(\frac{p^{2N}-1}{p^2-1}\right)} \leq \varepsilon_1.$$

On va appliquer la proposition précédente 1 avec $\varepsilon = 1$, $X = \varphi(V)$ et $Y = \varphi(W)$. On choisit $\delta \geq \delta_1(\varepsilon_1, V, A, L) = \max\{8(\dim V)^2 N \log p,\ \delta_0(1, X)\}$, et on suppose que

$$\log \deg_L(W) \leq \frac{\delta}{4\dim X}.$$

Avec ces choix, on a

$$\begin{aligned}
\log \deg_k Y &= \dim V \log\left(\frac{p^{2N}-1}{p^2-1}\right) + \log \deg_L W \\
&\leq 2N \dim V \log p + \log \deg_L W \\
&\leq 2N \dim V \log p + \frac{\delta}{4\dim V} \leq \frac{\delta}{2\dim V} \quad \text{par choix de } \delta_1.
\end{aligned}$$

La proposition 1 nous dit qu'il existe $y \in (\varphi(V) \setminus \varphi(W))\,(\overline{k})$ tel que :

$$h_{\mathcal{O}(1)}(y) \leq \frac{h_{\mathcal{O}(1)}(X)}{\deg_k(X)} + 1 \leq 8c_pN + \frac{p^{2N}-1}{p^2-1}\frac{\widehat{h}_L(V)}{\deg_L(V)} + 1,$$

et tel que

$$[k(y):k] \leq \deg_k(X)\delta^{\dim V} \leq \left(\frac{p^{2N}-1}{p^2-1}\right)^{\dim V} \deg_L(V)\delta^{\dim V}.$$

Par définition, il existe $x \in V \setminus W$ tel que

$$y = \varphi(x), \text{ et tel que } \mid h_{\mathcal{O}(1)}(y) - \frac{p^{2N}-1}{p^2-1}\widehat{h}_L(x) \mid \leq 8c_pN.$$

On en déduit

$$\widehat{h}_L(x) \leq \frac{\widehat{h}_L(V)}{\deg_L V} + \frac{16c_pN+1}{\left(\frac{p^{2N}-1}{p^2-1}\right)}, \quad \text{et } [k(x):k] \leq \left(\frac{p^{2N}-1}{p^2-1}\right)^{2\dim V} \delta^{\dim V} \deg_L V.$$

Le choix de N permet de conclure. $\square$

3 Un lemme de majoration

Dans ce qui suit, A/k est une variété abélienne définie sur un corps de nombres k, et L est un fibré en droites symétrique très ample sur A. On suppose k plongé dans $\mathbb{C}$. On commence par rappeler un résultat classique concernant le corps de définition d'une sous-variété abélienne de A.

Lemme 1 *Il existe une extension F/k finie, ne dépendant que de A, et notamment de degré majoré par une constante ne dépendant que de A, telle que toute sous-variété abélienne de A soit définie sur F.*

Démonstration Le groupe $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A)$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini. Il existe donc une extension finie F/k ne dépendant que de A telle que $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A) = \mathrm{End}_F(A)$. Soit maintenant B une sous-variété abélienne de A. Par le théorème d'irréductibilité de Poincaré, il existe une sous-variété abélienne C de A et une isogénie $\varphi : A \to B \times C$. En notant pr_1 la projection de $B \times C$ sur B, et i l'inclusion de B dans A, on a : $f = i \circ pr_1 \circ \varphi \in \mathrm{End}_F(A)$. Or $B = f(A)$, donc B est définie sur F. $\square$

Remarque 6 En fait on peut prendre F/k de degré inférieur à $3^{16 \dim A^4}$ (cf. [12] lemma 2.2.).

Au vu de ce lemme, on supposera dans toute la suite que toutes les sous-variétés abéliennes de A/k sont définies sur k.

Lemme 2 *Soient d un entier, et $x \in A$ un point rationnel sur une extension de degré inférieur à d. Si x est un point de torsion modulo une sous-variété abélienne stricte B de A, alors on peut écrire $x = y + \xi$ avec $y \in B$ et $\xi \in A(F)_{\mathrm{tors}}$ où F est une extension de degré inférieur à $c_1(A)d$, $c_1(A)$ étant une constante ne dépendant que de A.*

Démonstration On note $\pi : A \to A/B = C$. On sait (cf. [3]) que l'on peut construire une sous-variété abélienne C' de A telle que $A = B + C'$, et telle que $\mathrm{Card}\,(B \cap C') \leq c_1(A)$ pour une constante $c_1(A)$ ne dépendant que de A. Notons $\pi' = \pi_{|C'}$ l'isogénie de C' vers C, et posons $K = k(x)$. On peut écrire $x = b + c'$ avec $b \in B$ et $c' \in C'$. On a $\pi(x) = \pi'(c') \in C(K)_{\mathrm{tors}}$. L'application π' étant une isogénie, le point c' est de torsion, et il est rationnel sur une extension de K de degré majoré par $c_1(A)$. $\square$

Lemme 3 *Soient d un entier, et $x \in A$ un point rationnel sur une extension de degré inférieur à d. Si x est de torsion modulo une sous-variété abélienne stricte B de A, alors, il existe une sous-variété abélienne B_x stricte de A et* *un point de torsion ξ défini sur une extension de degré au plus $c_1(A)d$ de k, tels que $x \in (B_x + \xi)$, et tels que*

$$\deg_L B_x \leq c_2(A,L) d^{c_3(A)} \max\{1, \hat{h}_L(x)\}^{c_4(A)}, \quad \text{où}$$

c_2 ne dépend que de A de L, et où c_3, c_4 sont des constantes ne dépendant que de A.

Démonstration Soit x comme dans les hypothèses, alors, il existe $y \in B$ et $\xi \in A(\overline{k})_{\text{tors}}$ tels que $x = y + \xi$, avec $k(y)$ et $k(\xi)$ de degré inférieur à $c_1(A)d$. Supposons maintenant trouvée une sous-variété abélienne B_x de A contenant y, et telle que son degré relativement au fibré L soit borné polynomialement en d et $\max\{1, \hat{h}_L(x)\}$. Dans ce cas, $x \in B_x + \xi$, et, B_x et ξ vérifient ce qu'on veut. Il reste donc à montrer l'existence de la sous-variété B_x. Pour cela, si $t_{A(\mathbb{C})}$ dénote l'espace tangent à l'origine de $A(\mathbb{C})$, on a le morphisme surjectif $\exp : t_{A(\mathbb{C})} \to A(\mathbb{C})$. Soit v un vecteur de $t_{A(\mathbb{C})}$ dont l'image est y. Alors, le théorème 2.1.(c) de [10] (dont le schéma de démonstration suit l'article de Philippon-Waldschmidt [16]) nous indique qu'il existe une sous-variété B_x comme voulue. $\square$

Soit D un entier. On définit une sous-variété de A sur k, notée $Y(D,d)$, par :

$$Y(D,d) = \bigcup_{B} \left(\bigcup_{\xi} (B + \xi) \right),$$

où B décrit l'ensemble $\mathcal{E}_L(D)$ des sous-variétés abéliennes strictes de A de degré (relativement à L) inférieur à D, et ξ décrit l'ensemble des points de torsion de A définis sur une extension de degré au plus $c_1(A)d$ de k.

Lemme 4 *Il existe une constante $c_5(A,L)$ telle que*

$$\text{Card } \mathcal{E}_L(D) \leq c_5(A,L) D^{2\dim A}.$$

Démonstration Le fibré L est très ample, donc il définit une forme de Riemann H_L sur $t_{A(\mathbb{C})}$, telle que la forme symplectique $E_L = \text{Im} H_L$, est à valeurs entières sur le réseau des périodes $\Omega_{A(\mathbb{C})}$. En utilisant essentiellement le théorème de Riemann-Roch pour les variétés abéliennes, la proposition 3 p.269 de [4] nous indique que, si B est une sous-variété abélienne de A, alors

$$\deg_L B = (\dim B)! \text{Vol}_{E_L} \Omega_{B(\mathbb{C})},$$

où le volume est relatif à la norme $|| \cdot ||$ induite par la forme bilinéaire symétrique définie positive e_L donnée par $e_L(x,y) = E_L(ix,y)$. En notant

$c'_6(A,L)$ le volume de la boule unitée de $\mathbb{R}^{2\dim A}$ pour cette norme, le théorème des minimas successifs de Minkowski nous permet d'en déduire qu'il existe une base de $\Omega_{B(\mathbb{C})}$ formée d'éléments (notés $\{\omega_1,\ldots,\omega_{2\dim B}\}$) appartenant à $\Omega_{A(\mathbb{C})}$, tels que

$$\prod_{i=1}^{2\dim B} \|\, \omega_i \,\| \leq c'_6(A,L)\deg_L B.$$

On pose $c_{\min}(A,L) = \min\left\{1, \|\, \lambda_i \,\| \ / \ \lambda_i \in \Omega_{A(\mathbb{C})} - \{0\}\right\}$, et on note $\omega_{\max}$ le ω_i de plus grande norme. On a

$$\|\, \omega_{\max} \,\| \, c_{\min}(A,L)^{2g-1} \leq \prod_{i=1}^{2\dim B} \|\, \omega_i \,\| \leq c'_6(A,L)D.$$

Ainsi, on tire $\|\, \omega_{\max} \,\| \leq c'_7(A,L)D$, ce qui entraine

$$\mathrm{Card}\ \mathcal{E}_L(D) \leq c_5(A,L)D^{2\dim A}. \qquad \square$$

Lemme 5 *Le degré relativement à L de $Y(D,d)$ est majoré par une expression de la forme $c_6(A,L)D^{c_7(A)}d^{c_8(A)}$.*

Démonstration On sait par le theorem p. 154 de [11] que tout point de torsion de $A(\overline{k})$ défini sur une extension de degré inférieur à $c_1(A)d$ est d'ordre majoré par $c'_8(A)d^{7\dim(A)}$. On en déduit donc que l'ensemble des points de torsion définis sur une extension de degré inférieur à $c_1(A)d$ est de cardinal majoré par

$$c'_9(A)d^{(7\dim(A))(2\dim(A)+1)}. \tag{2}$$

Par ailleurs, on sait majorer le cardinal de $\mathcal{E}_L(D)$ par le lemme précédent, donc l'additivité du degré nous donne

$$\deg_L Y(D,d) \leq D \cdot \left(c_5(A,L)D^{2\dim A}\right) \cdot \left(c'_9(A)d^{(7\dim(A))(2\dim(A)+1)}\right). \tag{3}$$

L'inégalité (3) est bien de la forme voulue. $\square$

4 Preuve du théorème 1

Quitte à remplacer V par la réunion des $\sigma(V)$ avec $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, on peut supposer que V est définie sur k et k-irréductible. Soit $\varepsilon > 0$ un réel. On suppose par l'absurde qu'il existe une hypersurface Z de A sur k, ne contenant pas V mais contenant tous les points de V d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de A, et tels que la hauteur vérifie $\widehat{h}_L(x) \leq \frac{\widehat{h}_L(V)}{\deg_L V} + \varepsilon$.

Soit alors, δ un entier non nul. On considère la sous-variété Y_δ de A sur k de codimension supérieure à 1, définie par

$$Y_\delta = Y(D,d),$$

où $Y(D,d)$ est définie comme au paragraphe précédent, et où

$$D = c_2(A,L)\left(\frac{\widehat{h}_L(V)}{\deg_L(V)} + \varepsilon\right)^{c_4(A)} \left(c_0(\varepsilon)\deg_L(V)\delta^{\dim V}\right)^{c_3(A)},$$

et,

$$d = c_0(\varepsilon)\deg_L(V)\delta^{\dim V}.$$

Par hypothèse, V n'est contenue dans aucune réunion de sous-variétés de torsion strictes de A, donc $V \not\subseteq Y_\delta$. Il existe $\delta_1(\varepsilon, V, A, L)$ tel que pour tout $\delta \geq \delta_1(\varepsilon, V, A, L)$, on a l'inégalité

$$\log \deg_L(Y_\delta \cup Z) \leq \frac{\delta}{4\dim V}.$$

En effet, par le lemme 5, on sait que

$$\deg_L Y_\delta \leq c_6(A,L) D^{c_7(A)} d^{c_8(A)}.$$

En remplaçant D et d par leurs valeurs, et par additivité du degré, on en déduit l'inégalité pour tout $\delta \geq \delta_1(\varepsilon, V, A, L)$ assez grand. On se fixe désormais un tel δ, et on applique le corollaire 4 à $Y_\delta \cup Z$. On obtient ainsi un $x \in V \setminus (Y_\delta \cup Z)$ tel que

$$\widehat{h}_L(x) \leq \frac{\widehat{h}_L(V)}{\deg_L V} + \varepsilon \quad \text{et} \quad [k(x):k] \leq c_0(\varepsilon)(\deg_L V)\delta^{\dim V}.$$

Si x est un point de torsion modulo une sous-variété abélienne stricte de A, alors, le lemme 3 et le choix de D dans Y_δ entraine que $x \in Y_\delta$. Ceci est impossible, donc par définition de Z, x appartient à Z. Mais ceci est également impossible. Ceci conclut par l'absurde. $\square$

5 Preuve du corollaire 1

On commence par rappeler le théorème de Zhang sur les minimas successifs (cf. [18] theorem 5.2, et [19] theorem 1.10). Plus exactement, on en donne une version affaiblie qui nous suffira, ne faisant intervenir que le minimum essentiel.

Théorème 2 (Zhang) *Si V est une sous-variété de A sur K, alors*

$$\frac{\widehat{h}_L(V)}{(\dim V+1)\deg_L V} \leq \mu_L^{\text{ess}}(V) \leq \frac{\widehat{h}_L(V)}{\deg_L V}.$$

On peut maintenant passer à la preuve du corollaire 1 : soit $\varepsilon > 0$, le théorème 1 nous indique que l'ensemble des $x \in V(\overline{k})$ d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de A et qui sont de hauteur $\widehat{h}_L(x) \leq \frac{\widehat{h}_L(V)}{\deg_L V} + \varepsilon$ est Zariski dense dans V. En utilisant le théorème de Zhang 2, on en déduit que les points $x \in V(\overline{k})$ d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne, et de hauteur $\widehat{h}_L(x) \leq (\dim V+1)\mu_L^{\text{ess}}(V)+\varepsilon$ est Zariski dense dans V. En particulier cet ensemble est non-vide. On choisit un élément x dedans. En appliquant le théorème 1.5. de [7] ainsi que la remarque qui suit ce théorème, on en déduit

$$\widehat{h}_L(x) \geq \frac{c(A,L)}{\delta_L(x)} \left(\frac{\log\log(3\delta_L(x))}{\log(3\delta_L(x))}\right)^{\kappa(g)},$$

où $c(A,L)$ est une constante ne dépendant que de A et de L, et $\kappa(g)$ est une constante effectivement calculable ne dépendant que de g (par exemple $\kappa(g) = (2g(g+1)!)^{g+2}$ convient). Or $\delta_L(x) \leq \delta_L(V)$ car une sous-variété de A contenant V contient x. On en déduit

$$\widehat{h}_L(x) \geq \frac{c(A,L)}{\delta_L(V)} \left(\frac{\log\log(3\delta_L(V))}{\log(3\delta_L(V))}\right)^{\kappa(g)}.$$

Notamment on en conclut

$$(\dim V+1)\,\mu_L^{\text{ess}}(V) + \varepsilon \geq \frac{c(A,L)}{\delta_L(V)} \left(\frac{\log\log(3\delta_L(V))}{\log(3\delta_L(V))}\right)^{\kappa(g)}.$$

Ceci termine la preuve en faisant tendre ε vers 0. $\square$

6 Preuve du corollaire 2

On commence par prouver le corollaire dans un cas particulier, auquel on se ramènera ensuite.

Corollaire 5 *Si $A = \prod_{i=1}^n A_i^{r_i}$, où les A_i sont simples, est de type C.M., et si V est une sous-variété algébrique stricte de A sur k, k-irréductible et qui n'est pas réunion de sous-variétés de torsion, alors, on a l'inégalité*

$$\frac{\widehat{h}_M(V)}{\deg_M(V)} \geq \mu_M^{\text{ess}}(V) \geq c(A,M)\deg_M(V)^{-\frac{1}{s-\dim V}} \left(\log(3\deg_M(V))\right)^{-\kappa(s)},$$

où s est la dimension du plus petit sous-groupe algébrique contenant V, et où M est le fibré en droites ample associé au plongement

$$A = \prod_{i=1}^{n} A_i^{r_i} \hookrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{n_i}^{r_i} \overset{\text{Segre}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^N,$$

les A_i étant plongées dans $\mathbb{P}_{n_i}$ par des fibrés L_i amples et symétriques.

Démonstration On note G le plus petit sous-groupe algébrique contenant V. On note G^0 la composante connexe de l'identité de G. C'est une sous-variété abélienne de A, et elle est donc isogène à $B = \prod_{i=1}^{n} A_i^{s_i}$ où $0 \leq s_i \leq r_i$. On note alors $\pi : A \to B$ une projection naturelle obtenue par oubli de certaines coordonnées, de sorte que $\pi_{|G}$ est une isogénie. Montrons maintenant que l'on est dans les conditions d'application du corollaire 1 en prenant comme variété abélienne B, et comme sous-variété algébrique $\pi(V)$.

Si $\pi(V)$ est inclus dans une réunion de sous-variétés de torsion $\bigcup (C_i + \xi_j)$ où $\dim C_i < \dim B$, en notant H le plus petit sous-groupe algébrique contenant $\pi(V)$, on a toujours $\dim H < \dim B$. Ainsi $G_1 = G \cap \pi^{-1}(H)$ est un sous-groupe algébrique strict de G (car $\pi_{|G}$ est une isogénie), contenant V. Ceci est absurde.

Si $\pi(V) = B$, alors V est de torsion. Ceci est absurde.

Finalement, $\pi(V)$ est une k-sous-variété stricte de B, irréductible, et n'est pas incluse dans une réunion de sous-variétés de torsion strictes. On peut donc appliquer le corollaire 1. Par ailleurs, la hauteur et le degré sont définis relativement aux plongements

$$A = \prod_{i=1}^{n} A_i^{r_i} \hookrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{n_i}^{r_i} \overset{\text{Segre}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^{N_A}, \text{ et } B = \prod_{i=1}^{n} A_i^{s_i} \hookrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{n_i}^{s_i} \overset{\text{Segre}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^{N_B}.$$

De plus l'application $\overline{\pi} : \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{n_i}^{r_i} \to \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{n_i}^{s_i}$ est la projection linéaire définie par oubli de coordonnées. Dans ce cas et pour ces plongements on a,

$$\mu_{M_B}^{\text{ess}}(\pi(V)) \leq \mu_M^{\text{ess}}(V), \quad \text{et}, \quad \deg_{M_B} \pi(V) \leq \deg_M(V).$$

Ceci nous donne

$$\begin{aligned}
\mu_M^{\text{ess}}(V) &\geq \mu_{M_B}^{\text{ess}}(\pi(V)), \quad \text{d'où par le corollaire 1,} \\
&\geq c(B, M_B) \left(\deg_{M_B} \pi(V)\right)^{-\frac{1}{s-\dim V}} \left(\log \deg_{M_B} \pi(V)\right)^{-\kappa(s)} \\
&\geq c(B, M_B) \left(\deg_M V\right)^{-\frac{1}{s-\dim V}} \left(\log \deg_M(V)\right)^{-\kappa(s)}. \\
&\geq c'(A, M) \left(\deg_M V\right)^{-\frac{1}{s-\dim V}} \left(\log \deg_M(V)\right)^{-\kappa(s)},
\end{aligned}$$

où on a pris pour $c'(A,M)$ le minimum des $c(B,M_B)$ quand s_i varie dans $[\![0,r_i]\!]$. On conclut en appliquant le théorème 2 de Zhang. $\square$

On donne maintenant la preuve du corollaire 2 : la variété abélienne A est donnée avec une isogénie ρ vers $B=\prod_{i=1}^n A_i^{r_i}$. Soit V la sous-variété de A comme dans les hypothèses. On vérifie que $W=\rho(V)$ est une sous-variété de B vérifiant les mêmes hypothèses. Il résulte facilement de la preuve de la proposition 14. de [15] qu'il existe $c'(A,L)$ tel que

$$\widehat{h}_L(V)\geq c'(A,L)\widehat{h}_M(W).$$

Ainsi, en appliquant le résultat précédent, on en déduit presque l'inégalité voulue : il faut encore remplacer le degré $\deg_M(W)$ par $\deg_L(V)$. Or

$$\deg_M(W)=(\deg\rho)\deg_{\rho^*M}(V).$$

D'autre part ρ^*M et L sont amples, donc on a des inégalités

$$c_2(A,L)\deg_{\rho^*M}(V)\geq\deg_L V\geq c_3(A,L)\deg_{\rho^*M}(V).$$

En injectant ceci dans l'inégalité donnée par le corollaire 5 précédent, on peut conclure.

References

[1] F. Amoroso et S. David, Le problème de Lehmer en dimension supérieure, *J. Reine Angew. Math.* **513** (1999), 145–179.

[2] F. Amoroso et S. David, Densité des points à coordonnées multiplicativement indépendantes, *Ramanujan J.* **5** (2001), 237–246.

[3] D. Bertrand, Minimal heights and polarizations on abelian varieties, *Preprint of the MSRI, Berkeley, California*, (June, 1987).

[4] D. Bertrand et P. Philippon, Sous-groupes algébriques de groupes algébriques commutatifs, *Illinois J. Math.* **32** (1988), 263–280.

[5] J.-B. Bost, Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz), *Séminaire Bourbaki*, Vol 1994/95. Astérisque No.237 (1996), Exp.No.795, 4, 115–161.

[6] J.-B. Bost, H. Gillet et C. Soulé, Heights of projective varieties and positive Green Forms, *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994), no.4, 903–1022.

[7] S. David et M. Hindry, Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes de type C. M., *J. Reine Angew. Math.* **529** (2000), 1–74.

[8] S. David et P. Philippon, Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes, *Number theory (Tiruchirapalli, 1996) Contemp. Math.*, 333–364, Contemp. Math., **210**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1998).

[9] E. Dobrowolski, On a question of Lehmer and the number of irreductible factors of a polynomial, *Acta Arith.* **34**, no.4, 391–401, (1979).

[10] E. Gaudron, Mesure d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333** (2001), no. 12, 1059–1064.

[11] D. Masser, Small values of the quadratic part of the Néron-Tate height on an abelian variety, *Compositio Math.* **53** (1984), no. 2, 153–170.

[12] D. Masser et G. Wüstholz, Periods and minimal abelian subvarieties, *Ann. of Math. (2)* **137** (1993), no. 2, 407–458.

[13] P. Philippon, Sur des hauteurs alternatives I, *Math. Ann.* **289** (1991), no. 2, 255–283.

[14] P. Philippon, Sur des hauteurs alternatives II, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **44** (1994), no. 4, 1043–1065.

[15] P. Philippon, Sur des hauteurs alternatives III, *J. Math. Pures Appl.(9)* **74** (1995), no. 4, 345–365.

[16] P. Philippon et M. Waldschmidt, Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs, *Illinois J. Math.* **32** (1988), no. 2, 281–314.

[17] C. Soulé, Géométrie d'Arakelov et théorie des nombres transcendants, *Journées Arithmétiques, 1989 (Luminy, 1989)*, Astérisque No. 198-200 (1991) 355–371 (1992).

[18] S. Zhang, Positive line bundles on arithmetic varieties, *J. Amer. Math. Soc.* **8** (1995), no. 1, 187–221.

[19] S. Zhang, Small points and adelic metrics, *J. Algebraic Geom.* **4** (1995), no. 2, 281–300.