SUPPORTS UNIPOTENTS DE FAISCEAUX CARACTÈRES

PRAMOD N. ACHAR ET ANNE-MARIE AUBERT

Résumé. Soit G un groupe algébrique réductif sur la clôture algébrique d'un corps fini $\mathbb{F}_q$ et défini sur ce dernier. L'existence du support unipotent d'un caractère irréductible du groupe fini $G(\mathbb{F}_q)$, ou d'un faisceau caractère de G, a été établie dans différents cas par Lusztig, Geck et Malle, et le second auteur. Dans cet article, nous démontrons que toute classe unipotente sur laquelle la restriction du faisceau caractère ou du caractère donné est non nulle est contenue l'adhérence de Zariski de son support unipotent. Pour établir ce résultat, nous étudions certaines représentations des groupes de Weyl, dites "bien supportées".

1. Introduction

Soit $\bar{\mathbb{F}}_q$ la clôture algébrique d'un corps fini $\mathbb{F}_q$, et soit p sa caractéristique. Soit G un groupe algébrique réductif sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ qui est défini sur $\mathbb{F}_q$, et soit F l'endomorphisme de Frobenius associé à la structure $\mathbb{F}_q$-rationnelle de G. Étant donné un caractère irréductible ρ de G^F, Lusztig a posé en 1980 le problème de lui associer une classe unipotente F-stable $\mathcal{O}$ de G telle que la restriction de ρ à $\mathcal{O}^F$ soit non nulle, et telle que la dimension de $\mathcal{O}$ soit maximale parmi les classes unipotentes possédant cette propriété. Une telle classe est appelée le *support unipotent* du caractère. Lusztig a résolu lui-même ce problème en 1992 [21], sous l'hypothèse que p est suffisamment grand. Dans le même article, il a aussi établi un résultat concernant le support unipotent des faisceaux caractères. Geck et Malle ont réussi à enlever l'hypothèse sur p dans le cas d'une notion légèrement différente de support unipotent de caractère [10], [13]. Quant aux faisceaux caractères, le second auteur a étendu le résultat de Lusztig au cas où la caractéristique est bonne [3], en utilisant la même approche que dans [18].

Le but du présent article est de raffiner la description de l'ensemble des classes unipotentes sur lesquelle la restriction d'un caractère ou d'un faisceau caractère est non nulle, par une étude détaillée des représentations induites des groupes de Weyl. Si $\mathcal{O}$ est une classe unipotente de G, soit $A(\mathcal{O})$ le groupe des composantes du centralisateur d'un élément de $\mathcal{O}$. Soit W le groupe de Weyl de G, et soit $\mathcal{N}_G$ l'ensemble des couples $(\mathcal{O}, \pi)$ où $\mathcal{O}$ est une classe unipotente et π est une représentation irréductible du groupe $A(\mathcal{O})$. Rappelons que la correspondance de Springer associe à toute représentation irréductible de W un élément de $\mathcal{N}_G$. Cette application, notée $\nu\colon \mathrm{Irr}(W) \to \mathcal{N}_G$, est injective. À la section 2, nous introduisons le concept d'être "(spécialement) bien supporté" : une représentation de W est dite (spécialement) bien supportée si les éléments de $\mathcal{N}_G$ correspondant à ses composantes irréductibles vérifient certaines conditions. Le fait qui rend ce concept utile est le Théorème 3.4,

Date: 23 avril 2003.

Le premier auteur était partiellement appuyé par une bourse post-doctorale de la NSF.

qui affirme qu'une représentation induite d'une représentation spécialement bien supportée est bien supportée. La plus grande partie de la preuve de cet énoncé est achevée à la section 2, quoique certains calculs pour les groupes classiques soient reportés à la section 3.

La section 4 traite des liens entre les développements des deux sections précédentes et l'ordre partiel introduit par le premier auteur en [1] sur les classes de conjugaison du quotient de Lusztig associé à une classe unipotente. Aux sections 5–6 sont établis les résultats principaux de l'article. Ces énoncés affirment que toute classe unipotente sur laquelle la restriction d'un faisceau caractère ou d'un caractère irréductible, respectivement, est non nulle est contenue dans l'adhérence de Zariski du support unipotent de celui-ci. La version qui traite des caractères étend un résultat établi par Geck et Malle pour les caractères unipotents.

Nous notons le normalisateur (resp. le centralisateur) d'un sous-groupe H dans un groupe G par $\mathrm{N}_G(H)$ (resp. $\mathrm{C}_G(H)$). Le centre de G est noté $\mathrm{Z}(G)$. Si K est un groupe fini, $\mathrm{Irr}(K)$ désignera l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de K, et $\mathrm{Cl}(K)$ l'ensemble des classes de conjugaison de K.

Nous aimerions remercier F. Lübeck et K. McGerty pour des conversations utiles.

2. Rappels sur les classes unipotentes et les groupes de Weyl

Dans cette section, nous allons rappeler certains concepts clés qui nous seront utiles dans la suite. Le premier paragraphe traite les degrés générique et fantôme d'une représentation de W et puis introduit le quotient de Lusztig de $A(\mathcal{O})$. Au deuxième paragraphe nous révisons la relation entre les cellules bilatères de W et les pièces spéciales de la variété unipotente. Le dernier paragraphe est consacré à l'étude de plusieurs sortes d'induction. On ne prétend pas d'avoir traité ces thèmes d'une manière approfondie : nous nous contentons ici de simplement donner une brève liste des faits dont nous aurons besoin plus tard.

2.1. **Le quotient de Lusztig.** À toute représentation d'un groupe de Weyl sont associés deux polynômes d'une variable q, le degré générique et le degré fantôme. Le degré générique donne la dimension de la représentation unipotente correspondante du groupe de Chevalley fini $G(\mathbb{F}_q)$, tandis que le degré fantôme est tel que le coefficient de q^i donne la multiplicité de la représentation donnée dans la i-ème puissance symétrique de la représentation réflexion (pour les groupes de type A, les deux sont égaux).

Nous définissons maintenant deux entiers qui sont associés à une représentation de W quelconque. La *a-valeur* d'une représentation est l'entier i le plus petit tel que le coefficient de q^i soit non zéro dans le degré fantôme. La *$\tilde{a}$-valeur* est la même quantité à l'égard du degré générique. (Nous suivons ici les notations de Carter [7] ; ailleurs dans la littérature, ces entiers sont appelés la b-valeur et la a-valeur, respectivement). D'après Lusztig, une représentation est dite *spéciale* si sa a-valeur et sa $\tilde{a}$-valeur sont égales. Les classes unipotentes spéciales sont les classes $\mathcal{O}$ telles que $(\mathcal{O}, 1)$ correspond à une représentation spéciale via la correspondance de Springer. Pour toute classe unipotente $\mathcal{O}$, nous dirons que $\nu^{-1}(\mathcal{O}, 1)$ est *la représentation de Springer de $\mathcal{O}$*.

Le quotient de Lusztig de $A(\mathcal{O})$, noté $\bar{A}(\mathcal{O})$, est défini en termes des a-valeurs et des $\tilde{a}$-valeurs. Pour une classe $\mathcal{O}$ donnée, nous considérons toutes les représentations de W qui correspondent à des couples $(\mathcal{O}, \pi)$. En particulier, soit E_0 la représentation de W associée à $(\mathcal{O}, 1)$. Soit $K \subset A(\mathcal{O})$ l'intersection des noyaux des représentations π telles que $(\mathcal{O}, \pi) = \nu(E)$ où E est une représentation de W dont la $\tilde{a}$-valeur est égale à celle de E_0. Le quotient de Lusztig est le quotient de $A(\mathcal{O})$ par K (à l'origine, Lusztig fit cette définition seulement pour les classes spéciales, mais Sommers remarqua qu'elle est également valable pour les classes non spéciales).

2.2. **Cellules bilatères.** Rappelons maintenant quelques faits sur les cellules bilatères. Il s'agit de certains sous-ensembles de l'ensemble des éléments de W, définis via l'action de W sur son algèbre de Hecke. Les éléments d'une cellule bilatère correspondent à une base pour un module (non irréductible, en général) de W, et on peut donc parler d'une représentation qui "apparaît" dans une cellule bilatère. En fait toute représentation de W apparaît dans une unique cellule bilatère et chaque cellule bilatère contient une unique représentation spéciale.

Lusztig a trouvé une relation intéressante entre les cellules bilatères et les représentations de Springer, fondée sur la notion de *pièce spéciale*. Une pièce spéciale est la réunion d'une classe unipotente spéciale et toutes les classes unipotentes dans son adhérence de Zariski qui n'appartiennent à l'adhérence de Zariski d'aucune classe spéciale plus petite. Donc une pièce spéciale contient une classe spéciale et un certain nombre (éventuellement nul) de classes non spéciales. Spaltenstein a montré que toute classe unipotente appartient à une unique pièce spéciale, et donc que les pièces spéciales constituent une partition de la variété unipotente. Le théorème suivant, qui relie les pièces spéciales aux cellules bilatères, est un corollaire immédiat d'un résultat de Lusztig [23, Theorem 0.2].

Théorème 2.1. *Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux classes unipotentes, et soient E_1 et E_2 leurs représentations de Springer respectives. $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ appartiennent à la même pièce spéciale si et seulement si E_1 et E_2 appartiennent à la même cellule bilatère.*

Si l'une des représentations E_i correspond à un couple $(\mathcal{O}_i, \pi_i) \in \mathcal{N}_G$ avec π_i non triviale, l'analogue de l'énoncé ci-dessus n'est pas vrai : il est possible, dans ce cas, que $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ n'appartiennent pas à la même pièce spéciale. Néanmoins, Geck et Malle ont obtenu le résultat suivant dans ce contexte.

Proposition 2.2 ([13, Proposition 2.2])**.** *Soit E une représentation spéciale de W qui correspond à la classe $\mathcal{O}$. Si E_1 est une représentation irréductible dans la cellule bilatère de E, alors E_1 est associée par la correspondance de Springer à un couple $(\mathcal{O}_1, \pi_1)$ tel que $\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}$.*

2.3. **Familles de Lusztig.** Lusztig a défini une partition de $\mathrm{Irr}(W)$ en *familles* de la manière suivante. Si $W = \{1\}$, il y a une famille unique, constituée par la représentation triviale de W. Supposons maintenant que W possède au moins deux éléments et que les familles ont déjà été définies pour tous les sous-groupes paraboliques standard propres de W. On dit alors deux représentations irréductibles E et E' de W appartiennent à la même famille s'il existe une suite $E = E_0$, E_1, $\ldots$, $E_r = E'$ de représentations irréductibles de W, telles que, pour chaque i $(0 \leq i \leq r-1)$, il existe un sous-groupe parabolique propre standard W_i de W et des représentations irréductibles M_i', M_i'' de W_i, appartenant à une même famille de W_i, telles que

$$\begin{cases} \langle M_i', E_{i-1}\rangle_{W_i} \neq 0, \tilde{a}_{M_i'} = \tilde{a}_{E_{i-1}}, \\ \langle M_i'', E_i\rangle_{W_i} \neq 0, \tilde{a}_{M_i''} = \tilde{a}_{E_i} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \langle M_i', E_{i-1} \otimes \varepsilon\rangle_{W_i} \neq 0, \tilde{a}_{M_i'} = \tilde{a}_{E_{i-1}\otimes\varepsilon}, \\ \langle M_i'', E_i \otimes \varepsilon\rangle_{W_i} \neq 0, \tilde{a}_{M_i''} = \tilde{a}_{E_i\otimes\varepsilon}, \end{cases}$$

où ε est la représentations signe du groupe W. La fonction $\tilde{a}$ est constante sur chaque famille. Barbasch et Vogan ont montré que deux représentations irréductibles de W appartiennent à une même famille si et seulement si elles apparaissent dans une même cellule bilatère, [5, Theorem 2.29] (voir aussi [4]). Nous dirons que cette cellule et cette famille *se correspondent*. Une cellule bilatère sera dite *cuspidale* si la famille qui lui correspond est cuspidale au sens de [16, (8.1)].

2.4. **Induction.** Pour l'étude des supports des faisceaux caractères, nous voudrions connaître des propriétés des représentations de W induites d'une certaine classe de sous-groupes de W. Il est commode d'introduire en même temps une certaine classe analogue de sous-groupes de G. Dans la terminologie introduite par Sommers, un sous-groupe de G est appelé un *pseudo sous-groupe de Levi* s'il est le centralisateur d'un élément semi-simple. Un sous-groupe de W qui est le groupe de Weyl d'un pseudo sous-groupe de Levi sera appelé un *pseudo sous-groupe parabolique*. Une autre description est obtenue comme suit. Supposons choisi un ensemble Π de racines positives simples. Soit $\Pi_0 = \Pi \cup \{\alpha_0\}$, où α_0 est le négatif de la racine la plus haute. Rappelons qu'un sous-groupe de G (resp. de W) est un sous-groupe de Levi (resp. parabolique) s'il correspond à un sous-système de racines engendré par un sous-ensemble de Π. Un sous-groupe de G (resp. de W) est un pseudo sous-groupe de Levi (resp. pseudo sous-groupe parabolique) s'il correspond à un sous-système de racines engendré par un sous-ensemble propre de Π_0.

Une classe de sous-groupes de W qui nous sera très importante est celle fournie par l'ensemble des pseudo sous-groupes de Levi du groupe dual G^* de G. Puisque le groupe de Weyl de G et celui de G^* sont canoniquement isomorphes, nous pouvons considérer les pseudo sous-groupes paraboliques du groupe de Weyl de G^* comme sous-groupes de W lui-même. Par abus de langage, nous appelerons de tels sous-groupes de W *pseudo sous-groupes paraboliques du dual de* W. De plus, la correspondance entre les sous-groupes de Levi de G et ceux de G^* montre que tout sous-groupe parabolique de W est aussi un pseudo sous-groupe parabolique de son dual.

Si W' est un pseudo sous-groupe parabolique du dual de W et E est une représentation irréductible de W', il y a deux sous-modules de $\mathrm{Ind}_{W'}^{W} E$ auxquels il faut prêter attention. Notons $j_{W'}^{W} E$ la somme des composantes irréductibles de $\mathrm{Ind}_{W'}^{W} E$ qui ont la même a-valeur que E. La somme de ceux qui ont la même $\tilde{a}$-valeur que E sera notée $J_{W'}^{W} E$. Sous certaines hypothèses, qui sont toujours satisfaites si, par exemple, E est spéciale, le module $j_{W'}^{W} E$ est lui aussi irréductible. Plus précisément, si E est spéciale, ce module, appelé *l'induction tronquée* de E, est toujours une représentation de Springer d'une certaine classe unipotente. De plus, si W' est un sous-groupe parabolique, alors l'induction tronquée de E est aussi spéciale.

L'induction pour les représentations des groupes de Weyl est intimement liée à certains autres types d'induction. L'induction pour les classes unipotentes est précisément l'induction tronquée des représentations de Springer correspondantes. De surcroît, pour une cellule bilatère d'un pseudo sous-groupe parabolique du dual donnée, on peut considérer la cellule qui contient la j-induction de son unique représentation spéciale. Appelons cette cellule la cellule *induite* de la première. (Cette terminologie est en accord avec la théorie d'induction plus sophistiquée introduite par Xi dans [30]). La représentation $J_{W'}^{W} E$ est telle que toutes ses composantes irréductibles appartiennent à une unique cellule bilatère, qui est la cellule induite de celle à laquelle appartient E.

L'ensemble des cellules bilatères est muni d'un ordre partiel naturel provenant de leur définition en termes de l'action de W sur son algèbre de Hecke. D'autre part, cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des classes unipotentes spéciales, qui hérite un ordre partiel de l'ensemble de toutes les classes unipotentes. Barbasch et Vogan ont démontré que ces deux ordres coïncident [6, Proposition 3.23]. Cette équivalence permet de voir que l'induction des cellules bilatères est une application croissante, en la comparant avec l'induction des classes unipotentes. D'après Spaltenstein, cette dernière opération est croissante. Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux classes induites telles que $\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}_2$, et soient $\mathcal{O}'_1$ et $\mathcal{O}'_2$ les classes spéciales dans leurs pièces spéciales respectives. Pour voir que l'induction des cellules est croissante, il faut démontrer que $\mathcal{O}'_1 \leq \mathcal{O}'_2$, laquelle inégalité est impliquée par certaines propriétés de l'application de dualité d de Spaltenstein. Cette application est décroissante, donc $d^2(\mathcal{O}_1) \leq d^2(\mathcal{O}_2)$. De plus, $d^2(\mathcal{O})$ est toujours la plus petite classe unipotente spéciale dont l'adhérence de Zariski contient $\mathcal{O}$. Autrement dit, $d^2(\mathcal{O})$ est l'unique classe spéciale dans la pièce spéciale de $\mathcal{O}$. On déduit que $\mathcal{O}'_1 \leq \mathcal{O}'_2$.

3. Représentations bien supportées

Via la correspondance de Springer, nous pouvons introduire la notion de *support* d'une représentation de W. Soit E une représentation de W. Si E irréductible et $\nu(E) = (\mathcal{O}, \pi)$, le support de E est la classe unipotente $\mathcal{O}$. Si E n'est pas irréductible, son support est la réunion des supports de ses composantes irréductibles. Les résultats de cette section sont fondés sur la notion suivante.

Définition 3.1. Une représentation E de W est dite *bien supportée* si son support $\operatorname{supp} E$ vérifie les deux conditions suivantes :

1. Il existe une unique classe unipotente $\mathcal{O}_0$ telle que la représentation de Springer E_0 de $\mathcal{O}_0$ intervienne dans E, et $\mathcal{O}_0 \subset \operatorname{supp} E \subset \overline{\mathcal{O}_0}$.
2. Tous les termes de E appartiennent à des cellules bilatères $\mathbf{c}'$ qui satisfont $\mathbf{c}' \leq \mathbf{c}_0$, où $\mathbf{c}_0$ désigne la cellule qui contient E_0.

De plus, E est dite *spécialement bien supportée* si la classe $\mathcal{O}_0$ est spéciale.

Une conséquence particulière de cette définition sera importante dans la suite. Pour le lemme suivant, nous conservons les notations de la définition précédente.

Lemme 3.2. *Soit E_1 une composante irréductible de E, et supposons que $\nu(E) = (\mathcal{O}, \pi)$. Si $\mathcal{O}$ appartient à la pièce spéciale de $\mathcal{O}_0$, alors π est définie sur $\bar{A}(\mathcal{O})$.*

Démonstration. Grâce à la condition (2), nous savons que $\nu^{-1}(\mathcal{O}, \pi)$ doit appartenir à $\mathbf{c}_0$, car selon la Proposition 2.2, les représentations dans une cellule plus petite ne peuvent pas être associées à une classe dans la pièce spéciale de $\mathcal{O}_0$. Par conséquent, la $\tilde{a}$-valeur de $\nu^{-1}(\mathcal{O}, \pi)$ est égale à celle de E_0. Le Théorème 2.1 nous dit que cette dernière est égale à la $\tilde{a}$-valeur de la représentation de Springer de $\mathcal{O}$. On déduit que le noyau K de l'application $A(\mathcal{O}) \to \bar{A}(\mathcal{O})$ est contenu dans le noyau de π, et donc que π est définie sur $\bar{A}(\mathcal{O})$. □

La proposition suivante relie le support d'une représentation induite et les ordres partiels sur les classes et sur les cellules.

Proposition 3.3. *Soit L^* un pseudo sous-groupe de Levi de G^*, et soit W' son groupe de Weyl. Soit E_1 une représentation irréductible de W' qui appartient à une cellule bilatère $\mathbf{c}_1$ correspondant à la classe unipotente spéciale $\mathcal{O}_1$. Soit $\mathbf{c}$ et $\mathcal{O}$ les induites de $\mathbf{c}_1$ et $\mathcal{O}_1$, respectivement, et soit $E = \operatorname{Ind}_{W'}^{W} E_1$. Alors :*

1. $\operatorname{supp} E \subset \overline{\mathcal{O}}$.
2. *Toute composante irréductible de E appartient à une cellule bilatère $\mathbf{c}'$ telle que $\mathbf{c}' \leq \mathbf{c}$.*

La plupart de cette section est consacrée à la preuve de cette proposition. Nous l'établirons pour les groupes classiques par des méthodes combinatoires, et pour les groupes exceptionnels par des calculs explicites. Avant de commencer ce projet, cependant, nous verrons la conséquence la plus importante de cette proposition.

Théorème 3.4. *Soit L^* un pseudo sous-groupe de Levi de G^*, et soit W' le groupe de Weyl de L^*. Soit E_1 une représentation de W', et soit $E = \operatorname{Ind}_{W'}^{W} E_1$. Si E_1 est spécialement bien supportée, alors E est bien supportée. De plus, lorsque L^* est un sous-groupe de Levi, la représentation E est spécialement bien supportée.*

Il est à noter que E_1 n'est pas supposée irréductible.

Démonstration. Soit $\mathcal{O}_1$ une classe maximale dans le support de E_1, et soit $\mathcal{O}_0$ la classe induite de $\mathcal{O}_1$. La Proposition 3.3 nous dit que $\operatorname{supp} E \subset \overline{\mathcal{O}_0}$. De plus, puisque la représentation de Springer de $\mathcal{O}_1$ intervient dans E_1, celle de $\mathcal{O}_0$ intervient dans E, et par conséquent $\mathcal{O}_0 \subset \operatorname{supp} E$. La condition (1) d'être bien supportée est donc satisfaite.

Soit $\mathbf{c}_1$ la cellule bilatère qui correspond à $\mathcal{O}_1$, et soit $\mathbf{c}_0$ sa cellule induite dans W. L'énoncé (2) de la Proposition 3.3, combiné avec le fait que l'induction des cellules bilatères respecte l'ordre partiel, implique la condition 2.

La représentation E est donc bien supportée. Si L est un sous-groupe de Levi, nous savons que la classe induite $\mathcal{O}_0$ est spéciale, et donc sous cette hypothèse E est spécialement bien supportée. □

Considérons maintenant les aspects d'un groupe classique qu'il faut comprendre pour prouver la Proposition 3.3. Nous employerons certains objets combinatoires introduits par Lusztig pour paramétrer les représentations de W et les éléments de $\mathcal{N}_G$. Il s'agit des symboles [15] et des u-symboles [17], respectivement. Pour l'instant, nous restreignons notre attention aux u-symboles qui correspondent aux éléments de $\mathcal{N}_G$ apparaissant dans la correspondance de Springer (non généralisée) : ce sont les u-symboles “de défaut ≤ 1”. Les symboles et les u-symboles de défaut ≤ 1 sont certaines paires de listes d'entiers, de la forme

$$\underset{\text{types } B \text{ et } C}{\begin{pmatrix} a_1 & & a_2 & & \cdots & & a_{m+1} \\ & b_1 & & \cdots & & b_m & \end{pmatrix}} \qquad \text{ou} \qquad \underset{\text{type } D}{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix}}$$

où $a_1 < a_2 < \cdots < a_{m+1}$, et $b_1 < \cdots < b_m$. Deux symboles ou u-symboles dans lequels les mêmes entiers ont lieu avec les mêmes multiplicités sont dits *similaires.* Un symbole ou un u-symbole est dit *distingué* si

$$a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq a_m \leq b_m \leq a_{m+1}.$$

Il est évident que toute classe de similitude contient un unique élément distingué. Un symbole correspond à une représentation spéciale si et seulement s'il est distingué. Un u-symbole correspond à un couple $(\mathcal{O}, 1)$ si et seulement s'il est distingué.

Appelons le nombre m la *longueur* du symbole ou du u-symbole. Il y a une relation d'équivalence qui permet, pour tout symbole ou u-symbole de longueur m, de trouver un symbole ou u-symbole équivalent de longueur $m + 1$.

Dans le type B_n, soit $N = 2n+1$; dans C_n ou D_n, soit $N = 2n$. Les classes unipotentes sont ainsi en correspondance avec un certain sous-ensemble de l'ensemble des partitions de N. Si $\lambda = (\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k)$ est une partition de N, soit $\sigma_i(\lambda)$ la somme des i plus grandes parties de λ : c'est-à-dire,

$$\sigma_i(\lambda) = \sum_{j=k-i+1}^{k} \lambda_j.$$

Dans l'ordre partiel usuel sur les partitions, on dit que $\lambda \leq \lambda'$ si $\sigma_i(\lambda) \leq \sigma_i(\lambda')$ pour tout i. Si $\lambda = (\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k)$ et $\lambda' = (\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k)$ sont des partitions de n et n' respectivement, nous noterons $\lambda \vee \lambda'$ la partition de $n + n'$ définie par $(\lambda \vee \lambda')_i = \lambda_i + \lambda'_i$. Nous dirons que $\lambda \vee \lambda'$ est la partion *jointe* de λ et λ'.

Nous décrivons maintenant le processus pour obtenir un symbole ou un u-symbole à partir d'une partition de N. Le nombre de parties de λ est pair dans le type D et impair dans le type B. Supposons ce nombre pair dans le type C, quitte à ajouter une partie égale à 0 si nécessaire. Soit m tel que le nombre de parties de λ est $2m$ (types C et D) ou $2m+1$ (type B), et soit $\bar{\lambda}$ la partition définie par la formule $\bar{\lambda}_i = \lambda_i + (i-1)$: c'est une partition de $N + m(2m-1)$ (types C et D) ou $N + m(2m+1)$ (type B).

Soit $\eta^* = (\eta_1^* < \cdots < \eta_m^*)$ la liste des parties paires de $\bar{\lambda}$ (on peut montrer par récurrence que η^* doit avoir m parties). Soit ξ^* la liste des parties impaires de $\bar{\lambda}$, avec un "1" supplémentaire ajouté au début de la liste dans le type C. Définissions deux partitions η et ξ telles que $2\eta_i = \eta_i^*$ et $2\xi_i + 1 = \xi_i^*$. Alors ξ a $m+1$ parties dans les types B et C, et m parties dans le type D. Soient $\bar{\xi}$ et $\bar{\eta}$ les listes d'entiers définies par les formules suivants.

$$\text{Type } B : \quad \begin{pmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & & \xi_2 + 1 & & \cdots & & \xi_m + (m-1) & & \xi_{m+1} + m \\ & \eta_1 & & \eta_2 + 1 & & \cdots & & \eta_m + (m-1) & \end{pmatrix}$$

$$\text{Type } C : \quad \begin{pmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & & \xi_2 + 2 & & \cdots & & \xi_m + m & & \xi_{m+1} + (m+1) \\ & \eta_1 + 1 & & \eta_2 + 2 & & \cdots & & \eta_m + m & \end{pmatrix}$$

$$\text{Type } D : \quad \begin{pmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 + 1 & \cdots & \xi_m + (m-1) \\ \eta_1 & \eta_2 + 1 & \cdots & \eta_m + (m-1) \end{pmatrix}$$

Si λ est la partition qui correspond à la classe unipotente $\mathcal{O}$, alors $\binom{\bar{\xi}}{\bar{\eta}}$ est le u-symbole qui correspond à $(\mathcal{O}, 1)$, et $\binom{\xi}{\eta}$ est le symbole qui correspond à la représentation du groupe de Weyl associée à $(\mathcal{O}, 1)$.

Il peut arriver qu'une comparaison de deux symboles ou u-symboles implique une relation d'ordre entre les classes unipotentes associées. En particulier, remarquons que si λ et λ' sont deux partitions de N correspondant à deux classes unipotentes, alors $\lambda \leq \lambda'$ si et seulement si $\bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}'$. De plus, ces dernières partitions sont faciles à calculer à partir du symbole correspondant. Cette observation est utilisée au cours de la preuve du lemme suivant.

Lemme 3.5. *Soient* $\binom{\bar{\xi}}{\bar{\eta}}$ *et* $\binom{\bar{\xi}'}{\bar{\eta}'}$ *les u-symboles de la même longueur, et soient* λ *et* λ' *les partitions paramétrant les classes unipotentes auxquelles ils sont associés. Si* $\bar{\xi} \cup \bar{\eta} \leq \bar{\xi}' \cup \bar{\eta}'$, *alors* $\lambda \leq \lambda'$, *avec égalité si et seulement si* $\binom{\bar{\xi}}{\bar{\eta}} = \binom{\bar{\xi}'}{\bar{\eta}'}$.

Démonstration. Nous pouvons supposer les u-symboles distingués, car les partitions $\bar{\xi} \cup \bar{\eta}$ et $\bar{\xi}' \cup \bar{\eta}'$ ne dépendent que de la classe de similitude des u-symboles. Ces u-symboles proviennent alors de deux symboles $\binom{\xi}{\eta}$ et $\binom{\xi'}{\eta'}$. D'après les commentaires ci-dessus, il suffit d'établir que $\bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}'$. Supposons que les partitions $\bar{\xi} \cup \bar{\eta}$ et $\bar{\xi}' \cup \bar{\eta}'$

ne diffèrent qu'en deux parties (pour tout couple de u-symboles, il est possible de trouver une suite de u-symboles intermédiaires tels que deux u-symboles consécutifs ne diffèrent jamais en plus de deux parties). On en déduit que les symboles $\binom{\xi}{\eta}$ et $\binom{\xi'}{\eta'}$ diffèrent aussi en deux parties au plus.

Notons les partitions $\xi \cup \eta$ et $\xi' \cup \eta'$ respectivement μ et μ'. Il existe donc deux indices $i_0 > i_1$ telles que $\mu_i = \mu'_i$ si $i \neq i_0, i_1$, mais $\mu_{i_0} = \mu'_{i_0} - C$ et $\mu_{i_1} = \mu'_{i_1} + C$, où C est un certain entier strictement positif. Cette description nous fournit une description analogue de la relation entre $\bar{\lambda}$ et $\bar{\lambda}'$. Soit $\bar{\lambda}'_{j_0}$ la partie de $\bar{\lambda}'$ qui correspond à μ'_{i_0} : c'est-à-dire, ou $\bar{\lambda}'_{j_0} = 2\mu'_{i_0} + 1$ ou $\bar{\lambda}'_{j_0} = 2\mu'_{i_0}$, suivant que μ'_{i_0} est membre de ξ' ou de η'. Soit $\bar{\lambda}'_{j_1}$ la partie analogue correspondant à μ'_{i_1} (il n'est pas forcément vrai que $i_0 = j_0$ ou $i_1 = j_1$). Alors $\bar{\lambda}$ est la partition obtenue à partir de $\bar{\lambda}'$ en remplaçant $\bar{\lambda}'_{j_0}$ et $\bar{\lambda}'_{j_1}$ par $\bar{\lambda}'_{j_0} - 2C$ et $\bar{\lambda}'_{j_1} + 2C$, respectivement. Remarquons, cependant, que ce n'est pas dire que $\bar{\lambda}_{j_0} = \bar{\lambda}'_{j_0} - 2C$. Après d'avoir remplacé ces deux parties de $\bar{\lambda}'$, il est possible que les parties de celle-ci ne soient plus en l'ordre décroissant. Donc il n'est pas tout de suite évident que $\bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}'$.

Nous savons que $\mu_{i_0} - C \geq \mu_{i_1} + C$. Si cette inégalité est stricte, alors on peut conclure que $\bar{\lambda}'_{j_0} - 2C \geq \bar{\lambda}'_{j_1} - 2C$. D'autre part, si la première inégalité est en réalité une égalité, alors il est possible que $\bar{\lambda}'_{j_0} - 2C = \bar{\lambda}_{j-1} - 2C - 1$, dans le cas où μ'_{i_0} fait partie de $\bar{\eta}'$ et μ'_{i_1} fait partie de $\bar{\xi}'$. Néanmoins, ces deux parties, considérées toutes seules comme partitions de $\bar{\lambda}'_{j_0} + \bar{\lambda}'_{j_1}$, satisfont toujours

$$[\bar{\lambda}'_{j_1} < \bar{\lambda}'_{j_0}] < [\bar{\lambda}'_{j_1} + 2C, \bar{\lambda}'_{j_0} - 2C]$$

(l'inégalité est stricte parce que C est supposé strictement positif). Toutes les autres parties de $\bar{\lambda}$ et de $\bar{\lambda}'$ sont égales, donc nous pouvons conclure que $\bar{\lambda} < \bar{\lambda}'$. □

Lemme 3.6. *Soient (α, β) et (α', β') deux paires de partitions, vues comme paramétrant des représentations de W, telles que $\alpha \leq \alpha'$ et $\beta \leq \beta'$.*

1. *Soient $(\mathcal{O}, \pi)$ et $(\mathcal{O}', \pi')$ les éléments de $\mathcal{N}_G$ auxquels elles sont associées par la correspondance de Springer. Alors $\mathcal{O} \leq \mathcal{O}'$, avec égalité seulement si $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$.*
2. *Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}'_1$ les classes spéciales auxquelles correspondent les cellules bilatères dont (α, β) et (α', β') font partie, respectivement. Alors $\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}'_1$, avec égalité seulement si $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$.*

Démonstration. Soient $\binom{\xi}{\eta}$, $\binom{\xi'}{\eta'}$ et $\binom{\bar{\xi}}{\bar{\eta}}$, $\binom{\bar{\xi}'}{\bar{\eta}'}$ les symboles et les u-symboles qui correspondent à (α, β) et (α', β'), respectivement. Supposons que tous ces symboles et u-symboles ont même longueur.

Associons à (α, β) et (α', β') deux u-symboles $\binom{\bar{\xi}}{\bar{\eta}}$ et $\binom{\bar{\xi}'}{\bar{\eta}'}$ de la même longueur. Grâce aux hypothèses sur (α, β) et (α', β'), il est clair que $\bar{\xi} \cup \bar{\eta} \leq \bar{\xi}' \cup \bar{\eta}'$. L'énoncé (1) est alors conséquence immédiate du Lemme 3.5.

Quant à l'énoncé (2), remarquons d'abord qu'il n'équivaut pas à l'énoncé que l'unique classe spéciale dans la pièce spéciale de $\mathcal{O}$ est inférieure à celle dans la pièce spéciale de $\mathcal{O}'$. La réciproque de la Proposition 2.2 est fausse : il est possible que $\mathcal{O}_1$ soit strictement plus grande que la classe spéciale dans la pièce spéciale de $\mathcal{O}$.

La partie (2) découle d'un bref calcul en termes des symboles. Soient λ et λ' les partitions des classes $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}'_1$, et soient $\bar{\lambda}$ et $\bar{\lambda}'$ définies d'après la discussion qui précède le Lemme 3.5. On a $\bar{\lambda} = \xi \cup \eta$ et $\xi' \cup \eta'$. Il est évident, sous les hypothèses du lemme, que $\xi \leq \xi'$ et $\eta \leq \eta'$, et donc $\bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}'$. Il est également clair que $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}'$ seulement si $\xi = \xi'$ et $\eta = \eta'$. □

Lemme 3.7. *Soit $n_1 = n/2$ si n est pair, et $n_1 = (n+1)/2$ si n est impair. Soit $n_2 = n - n_1$. Soient $(\alpha, \beta) = ([1^{n_1}], [1^{n_2}])$ et $(\alpha', \beta') = ([1^{n_1+k}], [1^{n_2-k}])$, où $-n_1 \leq k \leq n_2$. Alors les conclusions (1) et (2) du Lemme 3.6 sont vraies.*

Démonstration. Nous allons vérifier l'énoncé (1) du lemme précédent par un calcul explicite des u-symboles appropriés. Supposons pour l'instant que k est positif, et que le groupe W est de type B. Alors

$$\begin{pmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & 2 & & \cdots & & l & & l+3 & & \cdots & & 2m-1 & & 2m+1 \\ & 0 & & 2 & & \cdots & & p & & p+3 & & \cdots & & 2m-1 & \end{pmatrix},$$

où $l = 2(m - n_1 - k)$ et $p = 2(m - n_2 + k)$. La partition $\bar{\xi}' \cup \bar{\eta}'$ a donc la forme

$$[0^2, 2^2, \ldots, l^2, l+2, l+3, \ldots, p-1, p,$$
$$(p+2)^2, (p+4)^2, \ldots, 2(m-2)+1^2, 2(m-1)+1^2, 2m+1].$$

Remarquons que $p = l + 2(2k + n_1 - n_2)$. Il est évident, à partir de cette description, que la partition ci-dessus atteint la valeur la plus haute possible (à l'égard de l'ordre partiel sur les partitions) quand $k = 0$. Nous appliquons ensuite le Lemme 3.5 pour obtenir le résultat requis.

Pour établir l'énoncé (2), on répète le calcul précédent en termes des symboles au lieu des u-symboles. De plus, il est également facile de traiter le cas où $k < 0$, ainsi que ceux de type C et D. □

Nous retournons maintenant à la preuve de la Proposition 3.3. Comme nous avons déjà remarqué, la démonstration dans le cas d'un groupe exceptionnel ne consiste qu'en des calculs explicites des représentation induites. Cependant, il n'est pas nécessaire de calculer l'induite de toute représentation de toute pseudo sous-groupe parabolique du groupe dual. La première moitié de l'argument ci-dessous, qui est de toute façon nécessaire pour les groupes classiques, permet aussi de diminuer le nombre de calculs explicites qu'il faut faire pour les groupes exceptionnels.

Démonstration de la Proposition 3.3. Nous commençons par démontrer qu'il suffit de considérer les sous-groupes de Levi et pseudo sous-groupes de Levi maximaux de G^* (nous verrons au cours de cette démonstration la raison pour laquelle il ne suffirait pas de considérer les seuls pseudo sous-groupes de Levi maximaux). Si L^* n'est pas un tel sous-groupe maximal, soit M^* un pseudo sous-groupe de Levi de G^* tel que L^* soit un sous-groupe de Levi de M^*, et soit W'' son groupe de Weyl. Soit M le groupe dual de M^*. (Il est probable que M ne soit isomorphe à aucun sous-groupe de G). Supposons la proposition déjà établie pour L^* en tant qu'un pseudo sous-groupe de Levi du dual de M, ainsi que pour M^* comme pseudo sous-groupe de Levi du dual de G. Écrivons la représentation induite de E_1 comme somme d'un nombre fini de représentations irréductibles de W'' :

$$\mathrm{Ind}_{W'}^{W''} E_1 = \sum m_i F_i,$$

où les m_i sont des entiers positifs. Soit $\mathbf{d}_i$ la cellule bilatère de W'' à laquelle appartient F_i, et soit $\mathcal{O}_i'$ la classe unipotente spéciale de M^* à laquelle correspond $\mathbf{d}_i$. En particulier, supposons les étiquettes i choisies de telle sorte que $\mathbf{d}_1$ soit la cellule induite de $\mathbf{c}_1$. Il est important de remarquer ici que $\mathcal{O}_1'$ est la classe induite de $\mathcal{O}_1$, puisque L^* est un sous-groupe de Levi de M^*. On sait que $\mathrm{Ind}_{M^*}^G \mathcal{O}'_1 = \mathcal{O}$, ainsi que $\mathrm{Ind}_{W''}^W \mathbf{d}_1 = \mathbf{c}$.

Pour tout i, nous savons que $\mathrm{supp}\,\mathrm{Ind}_{W''}^W F_i \subset \overline{\mathrm{Ind}_{M^*}^G \mathcal{O}'_i} \subset \overline{\mathcal{O}}$, où la deuxième inclusion est conséquence du fait que l'induction est une application croissante. L'énoncé (1) est ainsi établi. Les cellules $\mathbf{c}'$ auxquelles appartiennent les termes de $\mathrm{Ind}_{W''}^W F_i$ satisfont $\mathbf{c}' \leq \mathrm{Ind}_{W''}^W \mathbf{d}_i$, mais puisque l'induction des cellules est aussi croissante, le fait que $\mathbf{d}_i \leq \mathbf{d}_1$ implique que $\mathrm{Ind}_{W''}^W \mathbf{d}_i \leq \mathbf{c}$. L'énoncé (2) est donc également établi.

Dorénavant, nous supposons que L^* est soit un sous-groupe de Levi maximal soit un pseudo sous-groupe de Levi maximal. Si G est simple et de type exceptionnel, il faut simplement calculer les induites de toutes les représentations irréductibles de tous les tels sous-groupes maximaux. Les auteurs ont effectué ces calculs à l'aide du logiciel CHEVIE [12]. Nous ne donnons pas de détails de ces calculs.

Considérons maintenant le cas où G est simple et de type classique. Les sous-groupes de Levi et les pseudo sous-groupes de Levi maximaux de G^* ont les formes suivantes :

	sous-groupes de Levi	pseudo sous-groupes de Levi
Type B :	$A_{k-1} \times C_{n-k}$	$C_k \times C_{n-k}$
Type C :	$A_{k-1} \times B_{n-k}$	$D_k \times B_{n-k}$
Type D :	$A_{k-1} \times D_{n-k}$	$D_k \times D_{n-k}$

Nous pouvons en fait faire une réduction supplémentaire : dans le type B, par exemple, on peut faire l'induction d'un sous-groupe de Levi maximal en deux étapes, d'abord de $A_{k-1} \times C_{n-k}$ à $C_k \times C_{n-k}$, et puis de ce dernier pseudo sous-groupe de Levi à B_n. Il suffit donc de traiter les sous-groupes de Levi maximaux de la forme A_{n-1}. De plus, il est seulement nécessaire de considérer les représentations de W' qui ne résultent pas de l'induction tronquée d'une représentation d'un sous-groupe parabolique propre.

Pour le groupe de Weyl W' de type A_{n-1}, la seule représentation qui n'est pas induite de cette façon est la représentation signe, laquelle correspond à la partition $[1^n]$. Nous savons que la multiplicité de la représentation correspondant à (α, β) dans $\mathrm{Ind}_{W'}^W [1^n]$ est donnée par le coefficient de Littlewood-Richardson $c_{\alpha\beta}^{[1^n]}$. Ce dernier s'annule si (α, β) n'est pas de la forme $([1^p], [1^{n-p}])$. Les deux conclusions du Lemme 3.7, traduites dans le langage des classes et des cellules, deviennent les deux parties de la présente proposition.

Pour les pseudo sous-groupes de Levi maximaux, il n'est pas avantageux d'exclure les représentations induites de notre discussion. Nous employons le Lemme 3.8 énoncé ci-dessous. Ce lemme dit précisément ce qui est nécessaire pour appliquer le Lemme 3.6, lequel implique ensuite la présente proposition. □

Le même argument que celui utilisé dans la preuve de [3, Proposition 4.1] permet de déduire le lemme suivant des assertions VIII.3.(2), 4.(3), 5.(1) et 5.(2) de [29].

Lemme 3.8. *Soit L^* un pseudo sous-groupe de Levi de G^* de rang maximal, et soit $W' = W_1 \times W_2$ son groupe de Weyl, où W_1 et W_2 sont des facteurs simples de type classique. Soient (α_1, β_1) et (α_2, β_2) deux paires de partitions paramétrant des représentations irréductibles de W_1 et W_2 respectivement. Alors toute composante irréductible qui intervient dans la représentation induite $\mathrm{Ind}_{W'}^W (\alpha_1, \beta_1) \boxtimes (\alpha_2, \beta_2)$ est paramétrée par une paire (α, β) vérifiant*

$$\alpha \leq \alpha_1 \vee \alpha_2 \qquad \textit{et} \qquad \beta \leq \beta_1 \vee \beta_2.$$

De plus, il existe un terme dans la représentation induite pour lequel ces inégalités sont des égalités.

4. Représentations et classes de conjugaison de $A(\mathcal{O})$

Soit $\bar{\mathcal{N}}_G$ (resp. $\bar{\mathcal{N}}'_G$) l'ensemble des couples $(\mathcal{O}, \pi)$ (resp. $(\mathcal{O}, C)$) où $\mathcal{O}$ est une classe unipotente et π est une représentation irréductible (resp. C est une classe de conjugaison) de $\bar{A}(\mathcal{O})$. Dans [1] a été introduit un ordre partiel naturel sur $\bar{\mathcal{N}}'_G$. Dans cette section nous traduisons cet ordre en un ordre partiel sur $\bar{\mathcal{N}}_G$, dans le but de comprendre la propriété d'être bien supportée en termes de cette ordre partiel. En [11], Geck à établi une suite de propriétés des faisceaux caractères associés à des représentations induites vérifiant une condition particulière à l'égard de l'ordre partiel usuel sur l'ensemble des classes unipotentes. La compréhension de la relation entre l'ordre partiel sur $\bar{\mathcal{N}}_G$ et la propriété d'être bien supporté devrait permettre d'étendre ces résultats de Geck au cas où sa condition n'est pas satisfaite.

Nous allons étudier les groupes $\bar{A}(\mathcal{O})$ comme groupes de Coxeter, d'après des idées de [23] et de [2]. Chacun des groupes $\bar{A}(\mathcal{O})$ est soit un produit de plusieurs exemplaires de S_2 soit l'un des groupes S_3, S_4, ou S_5. Donc de tels groupes sont tous des groupes de Weyl de type A. Pour la discussion suivante, H désignera un produit quelconque de groupes de Weyl de type A. Supposons choisi un ensemble Π de réflexions simples pour H. On peut associer à tout sous-ensemble P de Π le sous-groupe H_P de H engendré par les éléments de P. Puisque tous ces groupes sont des produits de certains groupes symétriques, il est facile d'établir la proposition suivante.

Proposition 4.1. *Il y a une bijection entre l'ensemble* $\mathrm{Irr}(H)$ *des représentations irréductibles de H et l'ensemble des sous-ensembles de* Π *à conjugaison près, donnée par*

$$\pi \leftrightsquigarrow P \qquad si \qquad \pi \simeq \epsilon \otimes j_{H_P}^{H} \epsilon,$$

où j désigne l'induction tronquée et ϵ est la représentation signe.

(La raison pour laquelle nous tensorisons la représentation induite avec la représentation signe est que plus tard, nous préférerons que la représentation triviale soit la plus grande dans l'ordre partiel. Si nous ne tensorisions pas ici, la représentation signe serait la plus grande.)

Nous décrivons ensuite une recette pour associer une classe de conjugaison dans H à tout sous-ensemble P de Π : si $P = \{s_1, \ldots, s_k\}$, notons C_P la classe de conjugaison de l'élément $s_1 \cdots s_k \in H$. Ce dernier élément dépend, bien sûr, sur l'ordre dans lequel nous avons écrit les éléments de P, mais grâce au fait que H est un produit de certains groupes symétriques, il est facile de démontrer que la classe C_P n'en dépend pas. (On commence par se rappeler que les classes de conjugaison dans S_n sont paramétrées par les partitions de n, de sorte que les parties d'une partition donnent les longueurs des cycles faisant partie d'un élément de la classe. Ensuite on remarque que cette partition peut être calculée d'après une liste non ordonnée de réflexions simples).

Il est évident que si P et Q sont deux sous-ensembles de Π, alors les classes C_P et C_Q sont égales si et seulement si P et Q sont conjuguées. Donc la recette ci-dessus nous donne également une façon d'associer une classe de conjugaison à toute représentation.

Proposition 4.2. *L'application $\pi \mapsto P \mapsto C_P$ est une bijection entre* $\mathrm{Irr}(H)$ *et l'ensemble* $\mathrm{Cl}(H)$ *des classes de conjugaison de* H.

Pourtant, cette application n'est pas du tout canonique : elle dépend sur le choix des réflexions simples. Néanmoins, nous pourrons résoudre ce problème en utilisant l'ordre partiel sur $\bar{\mathcal{N}}'_G$ pour obtenir un ensemble canonique de réflexions simples. Rappelons que l'ensemble $\mathrm{Cl}(H)$ hérite d'un ordre partiel de $\bar{\mathcal{N}}'_G$ de sorte que la classe triviale soit l'unique élément minimal. Appelons une classe C *superminimale* si elle a la propriété que $C > C'$ implique que C' est triviale : les classes superminimales sont les classes aussi petites que possible sans être triviales. Le choix des réflexions simples dans [2] consiste précisément en des représentants de classes de conjugaison superminimales.

Le résultat suivant a été obtenu de manière indépendante par Sommers [27].

Proposition 4.3. *Il existe un ensemble $\Sigma \subset \bar{A}(\mathcal{O})$ d'involutions, unique modulo conjugaison, tel que*

1. *tout élément de Σ appartient à une classe de conjugaison superminimale ;*
2. *toute classe de conjugaison superminimale possède au moins un représentant dans Σ ;*
3. *Σ constitue un ensemble de réflexions simples pour la présentation de $\bar{A}(\mathcal{O})$ comme groupe de Coxeter.*

Démonstration pour les groupes exceptionnels. Si $\mathcal{O}$ est une classe unipotente dans une groupe exceptionnel avec $A(\mathcal{O})$ non trivial, on a toujours que $\bar{A}(\mathcal{O}) \simeq S_n$ avec $2 \leq n \leq 5$. Un coup d'œil sur les tables de [1] montre qu'il y a toujours une unique classe superminimale, dans laquelle se trouvent toutes les réflexions du groupe. Il est donc évident que l'on peut choisir un ensemble de réflexions simples de sorte que les conditions ci-dessus soient satisfaites. $\square$

Avant de prouver la proposition précédente pour les groupes classiques, nous avons besoin d'une description plus précise de l'ordre partiel sur $\mathrm{Cl}(\bar{A}(\mathcal{O}))$. La proposition suivante, qui fournit une telle description, emploie le langage des *partitions marquées*, qui sont des objets combinatoires paramétrant l'ensemble $\bar{\mathcal{N}}'_G$, ainsi que la définition de l'ordre partiel sur $\bar{\mathcal{N}}'_G$ en termes de la *dualité généralisée* de Sommers, notée d_S (voir [1]).

Proposition 4.4. *Soient ${}^{\langle\nu\rangle}\lambda$ et ${}^{\langle\nu'\rangle}\lambda$ deux partitions marquées qui sont associées à la même classe unipotente. Supposons que ν et ν' ont tous deux un nombre pair de parties, en ajoutant un 0 à la fin dans type C si nécessaire. Écrivons les parties des partitions marquantes comme*

$$\nu = [a_1 < b_1 < \cdots < a_k < b_k]$$
$$\nu' = [c_1 < d_1 < \cdots < c_l < d_l].$$

Alors ${}^{\langle\nu\rangle}\lambda \geq {}^{\langle\nu'\rangle}\lambda$ si et seulement si, pour tout i, $1 \leq i \leq l$, il existe un j, $1 \leq j \leq k$, tel que

$$a_j \leq c_i < d_i \leq b_j. \tag{1}$$

Démonstration. Si ν et ν' vérifient la condition ci-dessus, il est facile de voir que ${}^{\langle\nu\rangle}\lambda \geq {}^{\langle\nu'\rangle}\lambda$ à partir des formules de [1], par la méthode de “division en blocs.” En particulier, la condition (1) implique qu'une division en blocs de ${}^{\langle\nu\rangle}\lambda$ est toujours une division en blocs de ${}^{\langle\nu'\rangle}\lambda$. La preuve se ramène, alors, au cas où ${}^{\langle\nu\rangle}\lambda$ est un “bloc de base” : c'est-à-dire, ν n'a que deux parties, qui sont respectivement la plus grande partie marquable de λ et la plus petite partie de λ (qui est supposée marquable). Dans ce cas, une comparaison directe des formules de [1, Proposition 4.12] et celles pour d_{S} montre que l'on a toujours $d_{\mathrm{S}}({}^{\langle\nu\rangle}\lambda) \leq d_{\mathrm{S}}({}^{\langle\nu'\rangle}\lambda)$, et donc ${}^{\langle\nu\rangle}\lambda \geq {}^{\langle\nu'\rangle}\lambda$.

Pour l'autre implication, remarquons que si la condition (1) est satisfaite, toute partie de ν' de hauteur impaire a une hauteur généralisée impaire dans ν. D'autre part, toute partie de ν de hauteur paire a une hauteur généralisée paire dans ν. Par contre, si la condition (1) n'est pas satisfaite, alors il existe ou une partie de ν' de hauteur impaire dont la hauteur généralisée dans ν est paire, ou une partie de ν de hauteur paire dont la hauteur généralisée dans ν' est impaire. Choisissons une telle partie. Nous pouvons maintenant répéter le calcul qui est effectué au cours de la preuve du Theorem 5.1 de [1], en faisant jouer le rôle de a notre partie choisie. Ce calcul montre que $d_{\mathrm{S}}({}^{\langle\nu\rangle}\lambda) \not\leq d_{\mathrm{S}}({}^{\langle\nu'\rangle}\lambda)$. Nous en concluons que si (1) n'est pas satisfaite, alors ${}^{\langle\nu\rangle}\lambda \not\geq {}^{\langle\nu'\rangle}\lambda$. □

Démonstration de la Proposition 4.3 pour les groupes classiques. Dans ce cas, le groupe $\bar{A}(\mathcal{O})$ est toujours un produit de plusieurs exemplaires de S_2, donc tout élément est une réflexion. Puisque le groupe est abélien, toute classe de conjugaison ne contient qu'un seul élément. Donc il faut simplement vérifier que les éléments superminimaux constituent un ensemble de réflexions simples. Si $a_1 < \cdots < a_k$ sont les parties marquables d'une partition λ, la proposition précédente implique que les classes superminimales sont

$$ {}^{\langle[a_1,a_2]\rangle}\lambda,\ {}^{\langle[a_2,a_3]\rangle}\lambda, \ldots,\ {}^{\langle[a_{k-1},a_k]\rangle}\lambda \quad \text{(ainsi que } {}^{\langle[a_1]\rangle}\lambda \text{ dans type } C\text{).} $$

D'après [17], on sait regarder $A(\mathcal{O})$ comme sous-quotient d'un S_2-module libre engendré par k générateurs. On en déduit et que les éléments nommés ci-dessus engendrent $\bar{A}(\mathcal{O})$, et que le nombre d'éléments est égal au rang de $\bar{A}(\mathcal{O})$ comme S_2-module. Par conséquent, nous avons trouvé l'ensemble Σ tel que décrit dans la proposition. □

Les Propositions 4.2 et 4.3 ensemble nous fournissent une bijection naturelle $\bar{\mathcal{N}}_G \leftrightsquigarrow \bar{\mathcal{N}}'_G$. Enfin la relation promise au début de la section est précisé dans le théorème suivant. À partir de la Définition 3.1, ce théorème est presque trivial, mais peut-être que son énoncé aide à éclaircir ce que signifie être bien supporté.

Théorème 4.5. *Les termes d'une représentation bien supportée d'un groupe de Weyl W appartenant à la cellule bilatère la plus haute correspondent tous à des éléments de $\bar{\mathcal{N}}_G$. De plus, parmi les termes qui sont associés à l'unique classe maximale dans le support, il y a un unique terme maximal à l'égard de l'ordre partiel naturel sur $\bar{\mathcal{N}}_G$.*

Démonstration. Le premier énoncé équivaut au Lemme 3.2. Le deuxième énoncé est conséquence du fait que la représentation de Springer de l'unique classe maximale $\mathcal{O}_0$ dans le support (qui a toujours lieu dans une représentation bien supportée) correspond à la représentation triviale de $\bar{A}(\mathcal{O}_0)$, qui est toujours maximale dans l'ordre partiel sur $\mathrm{Cl}(\bar{A}(\mathcal{O}_0))$. □

5. Application aux supports unipotents des faisceaux caractères

Les faisceaux caractères sur G sont certains faisceaux pervers G-équivariants dans la catégorie dérivée des $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux constructibles sur G, qui ont été introduits par

Lusztig dans [19]. Nous notons $\hat{G}$ leur ensemble et rappelons brièvement quelques résultats concernant leur classification.

Nous supposons que p est bon pour G, que le centre $\mathrm{Z}(G)$ de G est connexe et que $G/\mathrm{Z}(G)$ est simple. Soit T un tore maximal de G fixé et soit $W = \mathrm{N}_G(T)/T$ le groupe de Weyl de G associé. Soient G^* le dual de Langlands de G et $T^* \subset G^*$ un tore maximal dual de T. Il existe une surjection canonique de $\hat{G}$ sur l'ensemble des W-orbites sur T^*, [19, Corollaire 11.4]. Soient $s \in T^*$ et (s) son orbite sous W. Nous notons $\hat{G}_s$ l'ensemble des faisceaux caractères qui appartiennent à la fibre au-dessus de (s) de la surjection citée. Soit W_s le groupe de Weyl relativement à T^* du centralisateur $G^*_s = \mathrm{C}_{G^*}(s)$ de s (ce dernier groupe est connexe, puisque $\mathrm{Z}(G)$ l'est).

Rappelons maintenant que la correspondance de Springer généralisée, due à Lusztig, est une application qui étend la correspondance de Springer d'origine en une bijection

$$\nu\colon \bigsqcup \mathrm{Irr}(W_L^G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_G,$$

l'union étant prise sur les classes de G-conjugaison de couples (L, ι_0), où L est un sous-groupe de Levi de G et ι_0 un élément "cuspidal" de $\mathcal{N}_L$, et où $W_L^G = \mathrm{N}_G(L)/L$ (voir [17] et [21, §4.4]). En particulier, cette application attache à tout couple $(\mathcal{O}, \pi) \in \mathcal{N}_G$ un certain sous-groupe de Levi L.

Soit $\mathcal{O}$ une classe unipotente dans G et soit $\mathcal{E}$ un système local irréductible G-équivariant sur $\mathcal{O}$. Nous identifions le couple $(\mathcal{O}, \mathcal{E})$ avec le couple correspondant $\iota = (\mathcal{O}, \pi) \in \mathcal{N}_G$ et notons $\mathrm{IC}(\bar{\mathcal{O}}, \pi)$ le complexe de cohomologie d'intersection sur l'adhérence de Zariski de $\mathcal{O}$ associé. Nous posons $d_\iota = \dim \mathcal{O} + \dim \mathrm{Z}(L)$, où L est le sous-groupe de Levi attaché à ι par la correspondance de Springer généralisée. D'après [18, (2.6)(e)] et [17, 6.5], la restriction d'un faisceau caractère $A \in \hat{G}$ à la variété unipotente G_{uni} de G s'écrit :

$$A|_{G_{\mathrm{uni}}} = \sum_{\iota \in \mathcal{N}_G} m_{A,\iota}\, A_\iota, \quad \text{où } A_\iota = \mathrm{IC}(\bar{\mathcal{O}}, \pi)[d_\iota], \tag{2}$$

et où les $m_{A,\iota}$ sont certains entiers naturels. Si la restriction de A à G_{uni} est non nulle, alors il existe au moins un ι tel que $m_{A,\iota} \neq 0$. Nous allons décrire ces entiers $m_{A,\iota}$: c'est l'objet de la Proposition 5.1.

Soit A un faisceau caractère sur G dont la restriction à G_{uni} est non nulle. Il peut être obtenu comme facteur direct d'un "induit parabolique" $\mathrm{ind}_L^G(A_0)$ d'un faisceau caractère cuspidal A_0 sur un sous-groupe de Levi L d'un sous-groupe parabolique de G, tel que la restriction de A_0 à L_{uni} est non nulle (ici ind_L^G désigne l'induction des faisceaux caractères définie en [19, §4]). Il existe un élément semi-simple $s \in T^*$ tel que $A_0 \in \hat{L}_s$ et les faisceaux caractères intervenant dans $\mathrm{ind}_L^G(A_0)$ sont paramétrés par les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles du pseudo sous-groupe parabolique $W_{L,s} = \mathrm{N}_{G^*_s}(L^*)/L^*_s$ du dual du groupe de Coxeter fini W_L^G. Nous notons $A^s_{E_1}$ le faisceau caractère défini par la représentation $E_1 \in \mathrm{Irr}(W_{L,s})$.

Lorsque G est un groupe exceptionnel, L est soit un tore soit le groupe G lui-même, et W_L^G est donc soit W soit le groupe trivial. Soit G_L le groupe de même type que G de groupe de Weyl W_L^G et $\mathcal{N}_{G_L}^{\mathrm{ord}}$ l'image de $\mathrm{Irr}(W_L^G)$ dans $\mathcal{N}_{G_L}$ par la correspondance de Springer (non généralisée) pour le groupe G_L. À tout u-symbole est attaché un entier relatif d, appelé le *défaut* du u-symbole. Dans le cas des groupes classiques, il résulte de la classification des faisceaux caractères cuspidaux que W_L^G est de la forme suivante et l'ensemble $\mathcal{N}_{G_L}^{\mathrm{ord}}$ est en bijection à la fois avec $\mathrm{Irr}(W_L^G)$ et avec le sous-ensemble de l'ensemble des u-symboles paramétrant $\mathcal{N}_G$ formé des u-symboles de défaut d, où d est défini comme suit.

$$\begin{array}{lll} & W_L^G & \quad\quad\quad\quad\text{Défaut} \\ \text{Type } B: & B_{n-2t^2-2t} & \quad\quad\quad\quad d = 1+2t \\ \text{Type } C: & C_{n-(8t^2\pm 2t)} & \quad\quad\quad\quad d = 1 \pm 4t \\ \text{Type } D: & \begin{cases} D_n & \text{si } L = T \quad d = 0 \\ B_{n-8t^2} & \text{sinon} \quad\;\; d = 4t \end{cases} & \end{array},$$

où t est un certain entier positif (nul si et seulement si $L = T$).

Soit $\gamma\colon \mathcal{N}_{G_L}^{\mathrm{ord}} \to \mathcal{N}_G$ le composé

$$\mathcal{N}_{G_L}^{\mathrm{ord}} \xleftarrow{\simeq} W_L^G \xrightarrow{\nu} \mathcal{N}_G$$

qui est égal à l'inclusion canonique $\mathcal{N}_G^{\mathrm{ord}} \hookrightarrow \mathcal{N}_G$, lorsque L est égal à T. Lusztig a donné des formules pour γ en termes des u-symboles lorsque G est un groupe classique et $L \neq T$ [17, §12.2 et §13.2], mais sa description n'est pas correcte dans le cas où G est de type C et l'image de $\mathcal{N}_{G_L}$ consiste en des u-symboles de défaut négatif. Shoji a expliqué la correction dans [25, Remark 5.8] : dans ce cas-là, il faut employer une certaine bijection entre $\mathrm{Irr}(W_L^G)$ et les u-symboles de défaut 1 différente que celle décrite à la Section 3. (*Caveat lector* : la formule (5.4.2) de [25], qui aurait dû être égale à celle de Lusztig selon le Remark 5.8, ne l'est pas. Nous remercions F. Lübeck pour nous avoir indiqué la correction : au cas de défaut positif, il faut remplacer l'expression "$B+(2d-1)$" par "$B+(2d-2)$"). Cependant, pour nos propres calculs à venir, il sera plus commode de conserver cette dernière bijection, et faire plutôt la modification au niveau des u-symboles. Les formules suivantes pour $\gamma\binom{\bar{\xi}_L}{\bar{\eta}_L}$, dans ce dernier cadre, se déduisent immédiatement de celles de Shoji. Nous avons écrit $\bar{\xi}_L = [a_1 < \cdots < a_m \text{ (ou } a_{m+1})]$ et $\bar{\eta}_L = [b_1 < \cdots < b_m]$.

$$(3)\qquad \begin{array}{ll} \text{Type } B: & \begin{pmatrix} 0 & 2 & \cdots & 4t-2 & a_1+4t & \cdots & a_{m+1}+4t \\ & & & b_1 & \cdots & b_m & \end{pmatrix} \\ \text{Type } C: & \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 2 & \cdots & 8t-2 & a_1+8t & \cdots & a_{m+1}+8t \\ & & & b_1 & \cdots & b_m & \end{pmatrix} & \text{si } d \geq 1 \\ \begin{pmatrix} & & & b_1 & \cdots & b_m & \\ 1 & 3 & \cdots & 8t-5 & a_1+8t-3 & \cdots & a_{m+1}+8t-3 \end{pmatrix} & \text{si } d \leq -1 \end{cases} \\ \text{Type } D: & \begin{pmatrix} 0 & 2 & \cdots & 8t-4 & a_1+8t-2 & \cdots & a_{m+1}+8t-2 \\ & & & b_1 & \cdots & b_m & \end{pmatrix} \end{array}$$

Soient L_{ad} et L_{der} respectivement le groupe adjoint et le sous-groupe dérivé de L et soit $\mathrm{pr}\colon L \to L_{\mathrm{ad}}$ la projection canonique. D'après [19, (17.10)], il existe un faisceau caractère cuspidal $\bar{A}_0$ sur L_{ad} tel que $A_0 = \mathrm{pr}^*(\bar{A}_0) \otimes \mathcal{L}$, où $\mathcal{L}$ est un système local de Kummer sur L, qui est l'image réciproque d'un système local sur L/L_{der} sous l'application canonique $L \to L/L_{\mathrm{der}}$. Soit $L_{\mathrm{der}}^* \hookrightarrow L^*$ le plongement correspondant entre les groupes duaux. Si $\bar{A}_0$ appartient à $\widehat{(L_{\mathrm{ad}})}_{\bar{s}}$, avec $\bar{s} \in T^* \cap L_{\mathrm{der}}^*$, et $\mathcal{L}$ correspond à l'élément central z de L^*, alors $A_0 \in \hat{L}_s$, où $s = \bar{s}z$. Remarquons que $L_s^* = L_{\bar{s}}^*$.

Les faisceaux caractères sur G qui interviennent dans $\mathrm{ind}_L^G(\mathrm{pr}^*(\bar{A}_0))$ sont eux paramétrés par les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles du groupe $W_L^G = \mathrm{N}_{G^*}(L^*)/L^* \simeq W_{L,\bar{s}}$. Nous noterons $A_{E'}^{\bar{s}}$ le faisceau caractère défini par $E' \in \mathrm{Irr}(W_L^G)$. La restriction de $A_{E'}^{\bar{s}}$ à G_{uni} est à support sur $\overline{\mathcal{O}}$ et égale à A_ι sur sur $\overline{\mathcal{O}}$, si $\iota = (\mathcal{O}, \pi) = \nu(E')$. Les faisceaux caractères A_0 et $\mathrm{pr}^*(\bar{A}_0)$ ont même restriction à L_{uni} et l'on a

$$(4)\quad A^s_{E_1} = \bigoplus_{E'} (E' : \mathrm{Ind}_{W_{L,s}}^{W_L^G}(E_1))\, A^{\bar{s}}_{E'} = \bigoplus_{E'} (E' : \mathrm{Ind}_{W_{L,s}}^{W_L^G}(E_1))\, A_{\nu(E')} \quad \text{sur } G_{\mathrm{uni}},$$

où E' parcourt les représentations irréductibles de W_L^G, à isomorphisme près, et $(E' : \mathrm{Ind}_{W_{L,s}}^{W_L^G}(E_1))$ désigne la multiplicité de E' dans la représentation induite $E = \mathrm{Ind}_{W_{L,s}}^{W_L}(E_1)$, [19, (2.6)].

La proposition suivante se déduit immédiatement de (2) et (4).

Proposition 5.1. *Soit $A = A^s_{E_1}$ un faisceau caractère sur G, avec $E_1 \in \mathrm{Irr}(W_{L,s})$. Alors*

$$m_{A,\iota} = \begin{cases} (E' : \mathrm{Ind}_{W_{L,s}}^{W_L^G}(E_1)) & si\ \iota = \nu(E'),\ avec\ E' \in \mathrm{Irr}(W_L^G), \\ 0 & si\ \iota \notin \nu(\mathrm{Irr}(W_L^G)). \end{cases}$$

Théorème 5.2. *Soit A un faisceau caractère non identiquement nul sur la variété unipotente. Il existe alors une classe unipotente $\mathcal{O}_A$ sur laquelle la restriction de A n'est pas nulle et dont l'adhérence de Zariski contient toute classe unipotente sur laquelle cette restriction n'est pas nulle.*

Démonstration. La relation (4) permet d'associer à A un certain sous-ensemble $P \subset \mathcal{N}^{\mathrm{ord}}_{G_L}$, qui contient les éléments correspondant à des représentations E' de W_L^G telles que $(E' : \mathrm{Ind}_{W_{L,s}}^{W_L^G}(E_1)) \neq 0$. Dans le cas où $L = T$, la proposition 3.3 dit que tous les éléments de ce sous-ensemble sont associés à des classes unipotentes contenues dans l'adhérence de Zariski de $\mathcal{O}$, et donc le théorème est démontré. Si $L \neq T$, nous voudrions que l'image $\gamma(P) \subset \mathcal{N}_G$ ait cette dernière propriété. Nous traiterons les cas de G classique et de G exceptionnel séparément.

Pour G exceptionnel, la seule possibilité est que $L = G$, comme nous avons déjà remarqué. Dans ce cas l'ensemble $\mathcal{N}^{\mathrm{ord}}_{G_L}$ ne contient qu'un seul élément, et donc il est évident que $\gamma(P)$ a la propriété cherchée.

Pour G classique, nous pouvons appliquer le Lemme 3.8. La conclusion de ce lemme-là, traduite dans le langage des u-symboles, dit qu'il existe un unique élément de P dont le u-symbole $\binom{\bar{\xi}_0}{\bar{\eta}_0}$ a la propriété que

$$(5)\qquad \bar{\xi} \leq \bar{\xi}_0 \qquad \text{et} \qquad \bar{\eta} \leq \bar{\eta}_0$$

pour tout autre u-symbole $\binom{\bar{\xi}}{\bar{\eta}}$ qui est membre de P. La description ci-dessus de γ montre que γ conserve la relation (5), et donc il est possible d'appliquer le Lemme 3.5 aux éléments de $\gamma(P)$. Le théorème en découle. □

Définition 5.3. La classe $\mathcal{O}_A$ est appelée le *support unipotent* de A.

Lusztig a défini une surjection canonique de $\hat{G}_s$ sur l'ensemble des cellules bilatères de W_s en [19, Corollary 16.7]. Si $\mathbf{c}$ est une cellule bilatère donnée de W_s, nous notons $\hat{G}_{s,\mathbf{c}}$ l'ensemble des faisceaux-caractères dans la fibre au-dessus de $\mathbf{c}$ de cette surjection. Nous obtenons ainsi une partition de $\hat{G}_s$:

$$\hat{G}_s = \bigsqcup_{\mathbf{c}} \hat{G}_{s,\mathbf{c}},$$

où $\mathbf{c}$ parcourt les cellules bilatères de W_s. Nous associons une classe unipotente $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$ à l'ensemble $\hat{G}_{s,\mathbf{c}}$ de la manière suivante : soit E_1 la représentation spéciale de W_s, d'après le Théorème 3.4, la représentation induite $E = \mathrm{Ind}_{W_s}^{W}(E_1)$ est bien supportée et $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$ est définie comme étant l'unique classe maximale dans le support de E. La preuve du Théorème 3.4 montre que la classe $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$ est la classe induite de la classe associée à E_1 par la correspondance de Springer, il s'ensuit que $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$ est égale à la classe unipotente attaché à $\hat{G}_{s,\mathbf{c}}$ par Lusztig en [16, (13.3)] ou [21, §10.5].

Proposition 5.4. *Soit A un faisceau caractère appartenant à $\hat{G}_{s,\mathbf{c}}$. Alors la classe $\mathcal{O}_A$ est contenue dans l'adhérence de Zariski de $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$.*

Remarque 5.5. Il est possible de montrer que $\dim \mathcal{O}_A \leq \dim \mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$ sans faire les longs calculs qui suivent. En effet cette inégalité résulte immédiatement du Théorème 5.2, combiné avec [3, Theorem 1.1.(a)].

Démonstration. Lorsque $L = T$, les classes $\mathcal{O}_A$ et $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$ sont égales. Nous supposons désormais L différent de T. La table ci-dessous résume alors les possibilités pour W_T^L et $W_{T,s}^L$. De plus, chaque groupe $W_{T,s}^L$ contient une unique cellule bilatère cuspidale, qui sera notée $\mathbf{c}_0$. La dernière colonne de la table donne l'unique représentation spéciale $E_{\mathbf{c}_0}$ dans $\mathbf{c}_0$ [16, §8.1], paramétrée par des paires de partition. (Ici α_t désigne la partition $[1 < 2 < \cdots < t]$ de $t(t+1)/2$).

	W_T^L	$W_{T,s}^L$	$E_{\mathbf{c}_0}$	
Type B :	B_{2t^2+2t}	$C_{t^2+t} \times C_{t^2+t}$	$(\alpha_t, \alpha_t) \boxtimes (\alpha_t, \alpha_t)$	
Type C :	C_{8t^2+2t}	$D_{4t^2} \times B_{4t^2+2t}$	$(\alpha_{2t}, \alpha_{2t-1}) \boxtimes (\alpha_{2t}, \alpha_{2t})$	si $d \geq 1$
	C_{8t^2-2t}	$D_{4t^2} \times B_{4t^2-2t}$	$(\alpha_{2t}, \alpha_{2t-1}) \boxtimes (\alpha_{2t-1}, \alpha_{2t-1})$	si $d \leq -1$
Type D :	D_{8t^2}	$D_{4t^2} \times D_{4t^2}$	$(\alpha_{2t}, \alpha_{2t-1}) \boxtimes (\alpha_{2t}, \alpha_{2t-1})$	

Soit $(\mathcal{O}_0, \pi_0)$ l'image par γ de la représentation triviale de W_L^G. La preuve de la proposition procède en deux étapes : nous établissons d'abord que $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$, et puis nous démontrons que pour tout A, la classe $\mathcal{O}_A$ est contenue dans l'adhérence de Zariski de $\mathcal{O}_0$.

Quel que soit le type de W_L^G, sa représentation triviale est paramétrée par le couple $([k], \varnothing)$, où k est son rang, et donc le u-symbole correspondant est $\binom{k}{\varnothing}$. D'après (3), l'image par γ de ce u-symbole, *i.e.*, le u-symbole de la paire $(\mathcal{O}_0, \pi_0)$, est donc

$$
\text{(6)}\qquad
\begin{array}{ll}
\text{Type } B : & \begin{pmatrix} 0 & 2 & \cdots & 4t-2 & (n-2t^2-2t)+4t \\ & & & \varnothing & \end{pmatrix} \\
\text{Type } C : & \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 2 & \cdots & 8t-2 & (n-8t^2-2t)+8t \\ & & & \varnothing & \end{pmatrix} & \text{si } d \geq 1 \\ \begin{pmatrix} & & & \varnothing & \\ 1 & 3 & \cdots & 8t-5 & (n-8t^2+2t)+8t-3 \end{pmatrix} & \text{si } d \leq -1 \end{cases} \\
\text{Type } D : & \begin{pmatrix} 0 & 2 & \cdots & 8t-4 & (n-8t^2)+8t-2 \\ & & & \varnothing & \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Ensuite nous calculons le u-symbole de la paire $(\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}, 1)$. Si aucun facteur de type D n'a lieu dans $W_{T,s}^L$, alors il faut simplement appliquer le Lemme 3.8 : la représentation qu'il fournit, paramétrée par les partitions jointes des partitions d'origine, est bien celle obtenue par induction tronquée. D'autre part, la seule représentation qu'il faut traiter dans le cas où il y a un facteur de type D est $(\alpha_{2t}, \alpha_{2t-1})$. Les égalités suivantes découlent de la description des groupes de Weyl de type D et les formules pour la a-valeur en [15] :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_{D_{4t^2}}^{B_{4t^2}}(\alpha_{2t}, \alpha_{2t-1}) &= (\alpha_{2t}, \alpha_{2t-1}) \oplus (\alpha_{2t-1}, \alpha_{2t}) \\
j_{D_{4t^2}}^{B_{4t^2}}(\alpha_{2t}, \alpha_{2t-1}) &= (\alpha_{2t}, \alpha_{2t-1})
\end{aligned}
$$

Grâce à la transitivité de l'induction tronquée, ce fait permet de finir le calcul en utilisant le Lemme 3.8. La table suivante donne les résultats de ces calculs. (Ici $2\alpha_t$ désigne la partition jointe $\alpha_t \vee \alpha_t$, et k est toujours le rang de W_L^G).

$$\begin{array}{llll}
 & j_{W_{T,s}^L}^{W_T^L} E_{\mathbf{c}_0} & j_{W_{T,s}^L}^{W} E_{\mathbf{c}_0} & \\
\text{Type } B: & (2\alpha_t, 2\alpha_t) & (2\alpha_t \vee [k], 2\alpha_t) & \\
\text{Type } C: & \begin{cases} (2\alpha_{2t}, \alpha_{2t} \vee \alpha_{2t-1}) \\ (\alpha_{2t} \vee \alpha_{2t-1}, 2\alpha_{2t-1}) \end{cases} & \begin{array}{l} (2\alpha_{2t} \vee [k], \alpha_{2t} \vee \alpha_{2t-1}) \\ (\alpha_{2t} \vee \alpha_{2t-1} \vee [k], 2\alpha_{2t-1}) \end{array} & \begin{array}{l} \text{si } d \geq 1 \\ \text{si } d \leq -1 \end{array} \\
\text{Type } D: & (2\alpha_{2t}, 2\alpha_{2t-1}) & (2\alpha_{2t} \vee [k], 2\alpha_{2t-1}) &
\end{array}$$

Les u-symboles correspondants sont alors :

$$\begin{array}{lll}
\text{Type } B: & \begin{pmatrix} 0 & & 4 & & \cdots & & 4t-4 & & (n-2t^2+2t)+4t \\ & 2 & & 6 & & \cdots & & 4t-2 & \end{pmatrix} & \\
\text{Type } C: & \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & & 4 & & \cdots & & 8t-4 & & (n-8t^2-2t)+8t \\ & 2 & & 6 & & \cdots & & 8t-2 & \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & & 5 & & \cdots & & 8t-7 & & (n-2t^2+2t)+8t-3 \\ & 3 & & 7 & & \cdots & & 8t-5 & \end{pmatrix} \end{cases} & \begin{array}{l} \text{si } d \geq 1 \\ \text{si } d \leq -1 \end{array} \\
\text{Type } D: & \begin{pmatrix} 2 & 6 & \cdots & 8t-6 & (n-8t^2)+(8t-2) \\ 0 & 4 & \cdots & 8t-8 & 8t-4 \end{pmatrix} &
\end{array} \tag{7}$$

Il est évident que tout u-symbole qui parait dans (6) appartient à même classe de similitude que le u-symbole correspondant dans (7). Nous en concluons que $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$.

La restriction d'un faisceau caractère A intervenant dans $\operatorname{ind}_L^G A_0$ à une classe unipotente $\mathcal{O}$ est non nulle s'il existe une paire $(\mathcal{O}, \pi)$ qui fait partie de l'image par γ de l'ensemble $P \subset \mathcal{N}_{G_L}^{\mathrm{ord}}$ associé à A comme dans la preuve du Théorème 5.2. Nous allons montrer ici que si $(\mathcal{O}, \pi)$ est l'image d'un élément quelconque de $\mathcal{N}_{G_L}^{\mathrm{ord}}$, alors $\mathcal{O} \subset \overline{\mathcal{O}_0}$. Cela aura pour conséquence que $\mathcal{O}_A$ est contenue dans l'adhérence de Zariski de $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$.

Soit $\binom{\bar\xi_L}{\bar\eta_L}$ le u-symbole d'un élément de $\mathcal{N}_{G_L}^{\mathrm{ord}}$ dont l'image par γ est $(\mathcal{O}, \pi)$. Le u-symbole de $(\mathcal{O}, \pi)$, qui sera notée $\binom{\bar\xi}{\bar\eta}$, et donné dans (3). Pour faciliter la comparaison de $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_0$, augmentons les longueurs des u-symboles de (6) jusqu'à ce qu'elles soient égales à celles de (3) :

$$\begin{array}{lll}
\text{Type } B: & \begin{pmatrix} 0 & 2 & \cdots & 4t-2+2m & (n-2t^2-2t)+4t+2m \\ & & 0 \quad 2 & \cdots & 2m-2 \end{pmatrix} & \\
\text{Type } C: & \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 2 & \cdots & 8t-2+2m & (n-8t^2-2t)+8t+2m \\ & & 1 \quad 3 & \cdots & 2m-1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} & & 0 \quad 2 & \cdots & 2m-2 \\ 1 & 3 & \cdots & 8t-5+2m & (n-8t^2+2t)+8t-3+2m \end{pmatrix} \end{cases} & \begin{array}{l} \text{si } d \geq 1 \\ \text{si } d \geq 1 \end{array} \\
\text{Type } D: & \begin{pmatrix} 0 & 2 & \cdots & 8t-4+2m & (n-8t^2)+8t-2+2m \\ & & 0 \quad 2 & \cdots & 2m-2 \end{pmatrix} &
\end{array}$$

Notons $\binom{\bar\xi_0}{\bar\eta_0}$ ce dernier u-symbole. La définition des u-symboles impose que le i-ème entier dans chaque ligne d'un u-symbole soit au minimum $2(i-1)$ ($2i-1$ pour la deuxième ligne d'un u-symbole de type C). Autrement dit, nous avons écrit les deux d'une telle façon que tout entier dans $\binom{\bar\xi}{\bar\eta}$, à l'exception éventuelle du plus grand entier sur la première ligne, soit plus grand que l'entier correspondant dans $\binom{\bar\xi_0}{\bar\eta_0}$. Soient $\mu = \bar\xi \cup \bar\eta$ et $\mu_0 = \bar\xi_0 \cup \bar\eta_0$. L'observation précédente, traduite dans le langage de partitions, dit qu'il existe une correspondance entre les parties de μ et celles de μ_0 telle que toute partie de μ_0, sauf peut-être la plus grande, est plus petite que la partie correspondante de μ. Cela implique que la somme des i parties les plus petites de μ est plus grande que la somme correspondante de certaines parties de μ_0, laquelle est ensuite plus grande que la somme des i parties les plus petites de μ_0. Puisque la somme de toutes les parties de μ est égale à celle de μ_0, nous pouvons inverser cette inégalité pour conclure que $\sigma_i(\mu_0) \geq \sigma_i(\mu)$; *i.e.*, $\mu_0 \geq \mu$. Le Lemme 3.5 implique alors que $\mathcal{O} \subset \overline{\mathcal{O}_0}$. □

Pour tout $A \in \hat{G}_{s,\mathbf{c}}$, nous posons

$$\mathcal{N}_G(A) = \{(\mathcal{O}, \pi) = \iota \in \mathcal{N}_G \ : \ \mathcal{O} = \mathcal{O}_{s,\mathbf{c}} \ \text{ et } \ m_{A,\iota} \neq 0\}\,. \tag{8}$$

Cet ensemble apparaît déjà dans [11, Theorem 4.5].

Corollaire 5.6. *Soit* $A \in \hat{G}_{s,\mathbf{c}}$. *L'ensemble* $\mathcal{N}_G(A)$ *est non vide si et seulement si* $\mathcal{O}_A$ *est égale à* $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$.

Démonstration. Le fait que $\mathcal{N}_G(A)$ soit non vide est équivalent au fait que la restriction de A à $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$ soit non nulle. Le Théorème 5.2 montre alors que la classe $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$ est contenue dans l'adhérence de Zariski de $\mathcal{O}_A$. La Proposition 5.4 implique alors que les classes $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$ et $\mathcal{O}$ sont égales. □

Remarque 5.7. Comme le montre l'exemple suivant, le support unipotent d'un faisceau caractère $A \in \hat{G}_{s,\mathbf{c}}$, non identiquement nul sur la variété unipotente, peut être différent de $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$. Soit G un groupe de type F_4, et soit $s \in G^*$ un élément semi-simple tel que G^*_s soit de type $C_3 \times A_1$. Soit E_1 la représentation de W_s paramétrée par $([1 < 2], \varnothing) \boxtimes [2]$. Cette représentation n'est pas spéciale. La représentation spéciale dans sa cellule bilatère est la représentation $([2], [1]) \boxtimes [2]$, dont l'induction tronquée est la représentation de Springer de la classe spéciale $F_4(a_1)$. Nous avons donc identifié la classe $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$. Pourtant, l'image par la correspondance de Springer des composantes de la représentation induite E de E_1 consiste en les quatre paires suivantes :

$$(F_4(a_2), 1), \quad (F_4(a_2), \epsilon), \quad (B_2, 1), \quad \text{et} \quad (B_2, \epsilon).$$

(Ici ϵ désigne l'unique représentation non triviale de $A(\mathcal{O})$). En particulier, la classe $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}} = F_4(a_1)$ ne fait pas partie du support de E. Le faisceau caractère $A^s_{E_1}$ est donc de restriction nulle sur $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$.

Remarquons de plus que la classe $F_4(a_2)$ est spéciale, mais que la représentation de W qui correspond au système local non trivial appartient à la cellule bilatère qui correspond à la classe spéciale $F_4(a_1)$, c'est-à-dire, à une cellule plus haute que celle à laquelle appartient la représentation de Springer de l'unique classe maximale. Donc la représentation induite de E_1 n'est pas bien supportée.

Remarque 5.8. Soit A le faisceau caractère intervenant dans $\operatorname{ind}_L^G A_0$ qui correspond à la représentation triviale de $W^G_{L,s}$. Les calculs effectués ci-dessus montrent que $\mathcal{O}_0$ est l'unique plus grande classe sur laquelle la restriction de A n'est pas nulle. Ce faisceau caractère est alors un élément de $\hat{G}_{s,\mathbf{c}}$ dont le support unipotent est $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$. En particulier, ceci montre (en l'appliquant à $L = G$, où le groupe $W^G_{L,s}$ est alors réduit à $\{1\}$) que le support unipotent d'un faisceau caractère cuspidal appartenant à $\hat{G}_{s,\mathbf{c}}$ est égal à $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$.

6. Application aux supports unipotents des caractères

6.1. **Caractères et caractères fantômes.** Nous supposons T rationnel et contenu dans un sous-groupe de Borel rationnel B. Le groupe dual G^* hérite d'une structure $\mathbb{F}_q$-rationnelle et nous notons encore F l'endomorphisme de Frobenius associé à celle-ci. Nous pouvons supposer que les groupes B^* et T^* sont F-stables, [8]. Nous supposons que $F(s) = s$. Lusztig a associé à toute famille $\mathcal{F}$ de W_s un groupe fini $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$, et décrit une injection, notée $E \mapsto x_E$, de la famille $\mathcal{F}$ dans l'ensemble fini $\mathcal{M}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}})$ des classes de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$-conjugaison de paires (x, ρ), où x est un élément de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ et ρ est une représentation irréductible sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ (définie à isomorphisme près) du centralisateur de x dans $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$. Chaque famille $\mathcal{F}$ contient donc une unique représentation spéciale : celle-ci correspond à l'élément $(1,1)$ de $\mathcal{M}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}})$. L'ensemble $\hat{G}_{s,\mathbf{c}}$ est en bijection avec $\mathcal{M}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}})$, où $\mathcal{F}$ est la famille des représentations irréductibles de W_s correspondant à la cellule $\mathbf{c}$. Remarquons que $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} = \bar{A}(\mathcal{O})$ où $\mathcal{O}$ est la classe spéciale qui correspond à la famille $\mathcal{F}$.

D'autre part, Lusztig a défini un accouplement sur $\mathcal{M}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}})$ par la formule [16, (4.14.3)] :

$$\{(x,\rho),(y,\tau)\} = \sum_{\substack{g \in \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \\ x \cdot gyg^{-1} = gyg^{-1} \cdot x}} \frac{\mathrm{Tr}(gxg^{-1},\tau) \cdot \mathrm{Tr}(gyg^{-1},\rho)}{|\,\mathrm{C}_{\mathcal{G}_{\mathcal{F}}}(x)| \cdot |\,\mathrm{C}_{\mathcal{G}_{\mathcal{F}}}(y)|}.$$

Nous notons $X(W_s)$ l'union disjointe, sur toutes les familles $\mathcal{F}$, des ensembles $\mathcal{M}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}})$ et nous étendons $\{\ ,\ \}$ à $X(W_s)$ en posant $\{x, x'\} = 0$ si x et x' sont dans des familles distinctes.

Il existe une partition de l'ensemble des caractères irréductibles de G^F en sous-ensembles $\mathcal{E}(G^F)_s$, appelés *séries de Lusztig*, paramétrés par les classes de conjugaison semi-simples F-stables dans G^*. Pour simplifier l'exposition, nous supposons dans cette sous-section que le groupe G a un centre connexe et est déployé sur $\mathbb{F}_q$. L'ensemble $\mathcal{E}(G^F)_s$ est alors en bijection avec $X(W_s)$. Nous notons ρ_x le caractère de G^F paramétré par l'élément x de $X(W_s)$. Nous définissons formellement une fonction centrale R_x, appelée *caractère fantôme* [16, (4.24.1) et p. 347], par

$$R_x = \sum_{y \in X(W_s)} \{x, y\}\, \Delta(y)\, \rho_y,$$

où $\Delta\colon \mathcal{M}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}) \to \{\pm 1\}$ est la fonction définie en [16, (4.14)] (la fonction Δ ne prend la valeur -1 que dans quelques cas où W_s est de type E_7 ou E_8). La matrice $(\{x,y\})$ est unitaire et les R_x, pour $x \in X(W_s)$, forment une base orthonormale du sous-espace de l'espace des fonctions centrales sur G^F engendré par les caractères appartenant à $\mathcal{E}_s$.

Soit $\mathbf{c}$ une cellule bilatère dans W_s. La paire $(s, \mathbf{c})$ définit un sous-ensemble $\mathcal{E}(G^F)_{s,\mathbf{c}}$ de $\mathcal{E}(G^F)_s$, [16, (8.4.4) et (6.17)]. De plus, puisque F agit trivialement sur W_s, il existe, d'après [16, Main Theorem 4.23], aussi une bijection de $\mathcal{E}(G^F)_{s,\mathbf{c}}$ sur $\mathcal{M}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}})$, où $\mathcal{F}$ est la famille de W_s correspondant à $\mathbf{c}$.

Un faisceau pervers A sur G est dit *F-stable* si F^*A et A sont isomorphes. On associe à tout couple (A, φ), formé d'un faisceau pervers F-stable G-équivariant A sur G et d'un isomorphisme $\varphi\colon F^*A \xrightarrow{\sim} A$, une fonction centrale $\chi_{A,\varphi}$ sur G^F (à valeur dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$), appelée la *fonction caractéristique* de A associée à φ, définie par

$$\chi_{A,\varphi}(g) := \sum_i (-1)^i\, \mathrm{Tr}(\varphi, \mathcal{H}^i_g(A)), \quad g \in G^F,$$

où $\mathcal{H}^i_g(A)$ désigne la fibre en g du i-ème faisceau de cohomologie $\mathcal{H}^i(A)$ de A et où l'on note encore φ l'application linéaire que φ induit sur $\mathcal{H}^i(A)$. Pour les faisceaux caractères de restriction non nulle à la variété unipotente il existe un choix canonique pour φ, indiqué en [18, (3.2)]. Nous noterons χ_A la fonction caractéristique correspondante à ce choix.

Le lien entre les caractères fantômes de G^F et les fonctions caractéristiques de faisceaux caractères F-stables sur G est fourni par une conjecture de Lusztig. La forme ci-dessous de cette conjecture a été prouvée par Shoji dans [24] : pour tout $x \in X(W_s)$, on a $R_x = \zeta_{A_x}\chi_{A_x}$, où $A_x \in \hat{G}_{s,\mathbf{c}}$ est paramétré par x et ζ_{A_x} est le nombre algébrique de module un associé à A_x par [19, Theorem 13.10.(b)].

Il en résulte, en particulier, que tout caractère irréductible ρ de G^F qui appartient à $\mathcal{E}(G^F)_{s,\mathbf{c}}$ est combinaison linéaire de fonctions caractéristiques $\chi_{A,\varphi}$, pour des faisceaux caractères $A \in \hat{G}_{s,\mathbf{c}}$. Le théorème suivant est alors une conséquence évidente de la Proposition 5.4.

Théorème 6.1. *Soit ρ un caractère irréductible de G^F appartenant à $\mathcal{E}(G^F)_{s,\mathbf{c}}$. Toute classe unipotente rationnelle sur laquelle la restriction de ρ est non identiquement nulle est contenue dans l'adhérence de Zariski de $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$.*

Nous allons voir ci-dessous que la restriction de ρ à la classe $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$ est non identiquement nulle. Nous définissons la *valeur moyenne* $\mathrm{vm}(f,\mathcal{O})$ et la *valeur moyenne pondérée* $\mathrm{vmp}(f,\mathcal{O})$, sur les points $\mathbb{F}_q$-rationnels d'une classe unipotente F-stable $\mathcal{O}$, d'une fonction centrale f sur le groupe de Chevalley fini $G(\mathbb{F}_q)$, de la manière suivante : notons u_1,u_2, …, u_r des représentants dans $\mathcal{O}(\mathbb{F}_q)$ des classes de $G(\mathbb{F}_q)$-conjugaison contenues dans $\mathcal{O}(\mathbb{F}_q)$, alors

$$\mathrm{vm}(f,\mathcal{O}) := \sum_{i=1}^{r}[G^F : \mathrm{C}_G(u_i)^F]\, f(u_i) = \sum_{u\in\mathcal{O}(\mathbb{F}_q)} f(u),$$

$$\mathrm{vmp}(f,\mathcal{O}) := \sum_{i=1}^{r}[A(u_i) : A(u_i)^F]\, f(u_i),$$

où $A(u_i)^F$ désigne le groupe des points de $A(u_i)$ fixés par F. Remarquons que l'ordre de $A(u_i)$ ne dépend pas de i.

Lusztig a conjecturé dans [14], puis démontré dans [21], qu'étant donné un caractère irréductible ρ de $G(\mathbb{F}_q)$, il existe une unique classe unipotente $\mathcal{O}_\rho^{\mathrm{L}}$ de G telle que $\mathrm{vm}(\rho,\mathcal{O}_\rho^{\mathrm{L}}) \neq 0$ et qui soit de dimension maximale pour cette propriété (sous l'hypothèse que la caractéristique p de $\mathbb{F}_q$ est suffisamment grande). En utilisant [21], Geck et Malle ont montré dans [13] qu'il existe une unique classe unipotente $\mathcal{O}_\rho^{\mathrm{GM}}$ de G telle que $\mathrm{vmp}(\rho,\mathcal{O}_\rho^{\mathrm{GM}}) \neq 0$ et qui soit de dimension maximale pour cette propriété (sans restriction sur p). Les classes $\mathcal{O}_\rho^{\mathrm{L}}$ et $\mathcal{O}_\rho^{\mathrm{GM}}$ étant égales, d'après [10, Theorem 1.4], nous les noterons désormais simplement $\mathcal{O}_\rho$.

D'après [13, Theorem 3.7], si le caractère ρ appartient à $\mathcal{E}(G^F)_{s,\mathbf{c}}$, la classe $\mathcal{O}_\rho$ est égale à la classe $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$. La définition de $\mathrm{vm}(\rho,\mathcal{O})$ montre d'autre part que si la restriction de la valeur moyenne d'un caractère à une classe unipotente est non nulle, alors la restriction du caractère lui-même à cette classe est aussi non nulle. Par conséquent, la restriction de ρ à la classe $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$ est non nulle.

Remarque 6.2. En mauvaise caractéristique, il peut arriver que le support unipotent de ρ (au sens de l'introduction) soit différent de $\mathcal{O}_\rho$. Par exemple, dans le cas où G est un groupe simple de type G_2, où p est égal à 3 et où $\mathcal{O}$ est la classe des éléments unipotents réguliers, il existe des caractères unipotents de G^F dont la restriction à $\mathcal{O}^F$ est non identiquement nulle alors que leur valeur moyenne sur $\mathcal{O}^F$ est nulle (voir [9]).

6.2. **Supports de valeurs moyennes de caractères.** Dans cette sous-section, nous n'imposons pas de condition sur p (*i.e.,* le cas p mauvais est permis). Pour tout élément w de W, nous notons T_w le tore maximal rationnel obtenu à partir de T par torsion par l'élément w. Pour tout $E_1 \in \mathrm{Irr}(W_s)$, nous définissons la combinaison linéaire rationnelle suivante de caractères de Deligne-Lusztig de G_s :

$$R_s(E_1) = |W_s|^{-1} \sum_{w \in W_s} \mathrm{Tr}(w, E_1)\, R_{T_w}^{G_s}(1). \tag{9}$$

La fonction centrale $R_s(E_1)$ sur G^F ainsi définie est celle de [16, (3.7.1)] et coïncide avec le caractère fantôme $R_{x_{E_1}}$.

Le résultat suivant est prouvé dans [13, Proposition 4.3] pour les caractères unipotents. Nous l'étendons ici à tous les caractères irréductibles.

Théorème 6.3. *Soit ρ un caractère irréductible du groupe $G(\mathbb{F}_q)$ des points $\mathbb{F}_q$-rationnels d'un groupe réductif connexe G. Toute classe unipotente rationnelle $\mathcal{O}$ telle que* $\mathrm{vmp}(\rho, \mathcal{O}) \neq 0$ *(resp.* $\mathrm{vm}(\rho, \mathcal{O}) \neq 0$*) est contenue dans l'adhérence de Zariski de $\mathcal{O}_\rho$.*

Démonstration. Nous notons $V(\rho, \mathcal{O})$ soit $\mathrm{vmp}(\rho, \mathcal{O})$ soit $\mathrm{vm}(\rho, \mathcal{O})$. Nous commençons par nous ramener au cas où le centre du groupe G est connexe. Pour cela, nous fixons un plongement régulier (voir [16, chap. 14] ou [20]) de G dans un groupe G_0 à centre connexe de même groupe dérivé que G et un caractère irréductible ρ_0 de $G_0(\mathbb{F}_q)$ tel que ρ intervienne dans la restriction de ρ_0 à $G(\mathbb{F}_q)$. Notons m_ρ (≥ 1) le nombre de caractères irréductibles de $G(\mathbb{F}_q)$ qui apparaissent dans la restriction de ρ_0 à $G_0(\mathbb{F}_q)$ (ce nombre est indépendant du choix de ρ_0). On a alors (voir [13, preuve du Theorem 3.7])

$$|A_{G_0}(\mathcal{O})|\, V(\mathcal{O}, \rho_0) = m_\rho |A_G(\mathcal{O})|\, V(\mathcal{O}, \rho).$$

Il suffit donc de prouver le théorème pour G_0. Nous supposons désormais que le centre de G est connexe.

Il existe un élément semi-simple s du dual de Langlands de G et une représentation E_1 du groupe de Weyl W_s de $\mathrm{C}_{G^*}(s)$ tel que le produit scalaire de ρ et du caractère fantôme $R_s(E_1)$ (défini en 9) soit non nul. D'autre part, toutes les représentations irréductibles E' de W_s, dont les caractères fantômes $R_s(E')$ associés ont produit scalaire non nul avec ρ appartiennent à une même cellule bilatère $\mathbf{c}_1$ de W_s. La projection uniforme ρ_{unif} de ρ (*i.e.,* la projection sur l'espace des combinaisons linéaires de caractères de Deligne-Lusztig) est combinaison linéaire de caractères fantômes $R_s(E')$ tels que E' appartienne à $\mathbf{c}_1$:

$$\rho_{\mathrm{unif}} = \sum_{E' \in \mathbf{c}_1} c(\rho, E') R_s(E').$$

La valeur moyenne pondérée $V(\mathcal{O}, \rho)$ étant, d'après [10, Proposition 1.3], égale au produit scalaire de ρ par une fonction uniforme (*i.e.,* combinaison linéaire de caractères de Deligne-Lusztig), on a $V(\mathcal{O}, \rho) = V(\mathcal{O}, \rho_{\mathrm{unif}})$. Par conséquent,

$$V(\mathcal{O}, \rho) = \sum_{E' \in \mathbf{c}_1} c(\rho, E')\, V(\mathcal{O}, R_s(E')).$$

Soit $\mathbf{c}$ la cellule bilatère de W induite de $\mathbf{c}_1$. En utilisant la Proposition 3.3, nous voyons que $V(\mathcal{O}, \rho)$ est combinaison linéaire de valeurs moyennes pondérées

$V(\mathcal{O}, R_s(E))$, où E appartient à une cellule bilatère $\mathbf{c}'$ telle que $\mathbf{c}' \leq \mathbf{c}$ et il suffit alors de raisonner comme dans la démonstration de [13, Proposition 4.3]. $\square$

Références

[1] P. Achar, *An order-reversing duality map for conjugacy classes in Lusztig's canonical quotient*, Transform. Groups **8** (à paraitre).

[2] P. Achar et E. Sommers, *Local systems on nilpotent orbits and weighted Dynkin diagrams*, Represent. Theory **6** (2002), 190–201.

[3] A.-M. Aubert, *Character sheaves and generalized Springer correspondence*, Nagoya Math. Journal **170** (à paraitre en juin 2003).

[4] D. Barbasch et D. Vogan, *Primitive ideals and orbital integrals in complex classical groups*, Math. Ann. **259** (1982), 153–199.

[5] D. Barbasch et D. Vogan, *Primitive ideals and orbital integrals in complex exceptional groups*, J. Algebra **80** (1983), 350–382.

[6] D. Barbasch et D. Vogan, *Unipotent representations of complex semisimple groups*, Ann. of Math. **121** (1985), 41–110.

[7] R. Carter, *Finite Groups of Lie Type : Conjugacy Classes and Complex Characters*, John Wiley & Sons, New York, 1985.

[8] P. Deligne et G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, Annals of Math. **103** (1976) 103–161.

[9] H. Enomoto, *The characters of the finite Chevalley group $G_2(q)$, $q = 3^f$*, Japan. J. Math. **2** (1976) 191–248.

[10] M. Geck, *On the average values of the irreducible characters of finite groups of Lie type on geometric unipotent classes*, Doc. Math., J. DMV **1** (1996) 293–317.

[11] M. Geck, *Character sheaves and generalized Gelfand-Graev characters*, Proceedings of the London Math. Soc. **78**, 139–166 (1999).

[12] M. Geck, G. Hiss, F. Lübeck, G. Malle, et G. Pfeiffer. CHEVIE—*A system for computing and processing generic character tables for finite groups of Lie type, Weyl groups, and Hecke algebras*, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. **7** (1996), 175–210.

[13] M. Geck et G. Malle, *On the existence of a unipotent support for the irreducible characters of a finite group of Lie type*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (1999), 429–456.

[14] G. Lusztig, *Representations of finite Chevalley groups*. Expository lectures from the CBMS Regional Conference held at Madison, Wis., August 8–12, 1977, CBMS Regional Conference Series in Mathematics American Mathematical Society, Providence, R.I. **39** 1978.

[15] G. Lusztig, *A class of irreducible representations of a Weyl group*, Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. **82** (1979) 323-335.

[16] G. Lusztig, *Characters of Reductive Groups over a Finite Field*, Annals Math. Studies vol. **107**, Princeton University Press, 1984.

[17] G. Lusztig, *Intersection cohomology complexes on a reductive group*, Invent. Math. **75** (1984) 205–272.

[18] G. Lusztig, *On the character values of finite Chevalley groups at unipotent elements*, J. Algebra **104** (1986) 146–194.

[19] G. Lusztig, *Character sheaves*, Advances in Math. **56** (1985) 193–237, **57** (1985) 226–265, **57** (1985) 266–315, **59** (1986) 1–63, **61** (1986) 103–155.

[20] G. Lusztig, *On the representations of reductive groups with disconnected centre*, Orbites unipotentes et représentations, Astérisque **168** (1988) 157–166.

[21] G. Lusztig, *A unipotent support for irreducible representations*, Advances in Math. **94** (1992) 139–179.

[22] G. Lusztig, *Remarks on computing irreducible characters*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992) 971–986.

[23] G. Lusztig, *Notes on unipotent classes*, Asian J. Math. **1** (1997), 194–207.

[24] T. Shoji, *Character sheaves and almost characters of reductive groups*, I, II, Adv. Math. **11** 244–313, 314-354 (1995).

[25] T. Shoji, *Unipotent characters of finite classical groups*, in "Finite Reductive Groups" (Luminy, 1994), Progr. Math **141**, Birkhäuser, Boston, 1997, 373–413.

[26] T. Shoji, *Representation theory of finite Chevalley groups*, in the Proceedings of "Representation Theory of Finite and Algebraic Groups", edited by N. Kawanaka et.al., Osaka University, (2000) 70–88.

[27] E. Sommers, en préparation.

[28] N. Spaltenstein, *Classes Unipotentes et Sous-groupes de Borel*, Lecture Notes in Mathematics, no. 946, Springer-Verlag, 1982.

[29] J.-L. Waldspurger, *Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés*, Astérisque **269** (2001).

[30] N. Xi, *Induced cells*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 25–29.

Department of Mathematics, University of Chicago, Chicago, IL 60637, USA
Adresse courriel : pramod@math.uchicago.edu

Institut de Mathématiques de Jussieu, Unité Mixte Paris 6 / Paris 7 CNRS de Recherche 7586, Université Pierre et Marie Curie, F-75252 Paris Cedex 05, France
Adresse courriel : aubert@math.jussieu.fr