Correspondance de Langlands numérique pour la $\overline{\mathbf{F}}_p$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$

Rachel Ollivier

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p, de corps résiduel à q éléments. Toutes les représentations considérées sont lisses. On ne connait pas les représentations irréductibles modulo p de $\mathrm{GL}_n(F)$. Mais il est tentant de conjecturer que le foncteur des invariants par le pro-p-Iwahori $I(1)$ les identifie avec les modules simples à droite de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$.

Dans le cas $n = 2$, on connait les $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$-modules simples. Parmi ceux-là, on distingue les modules que l'on appelle "supersinguliers" : ils ne correspondent pas, via le foncteur des invariants par le pro-p-Iwahori, à des sous-quotients d'induites paraboliques de $\mathrm{GL}_2(F)$. Pour $F = \mathbf{Q}_p$, le foncteur des $I(1)$-invariants induit une bijection entre les $\overline{\mathbf{F}}_p$-représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ayant un caractère central et les modules simples ayant un caractère central de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p), I(1))$. En particulier, les modules simples supersinguliers correspondent aux $\overline{\mathbf{F}}_p$-représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ qui ne sont pas des sous-quotients d'induites paraboliques et appelées supersingulières ([Vig1]).

Pour n quelconque, on décrit conjecturalement les $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$-modules simples supersinguliers : ce sont ceux dont le caractère central est "aussi nul que possible". Sous réserve que le foncteur des $I(1)$-invariants les identifie avec les $\overline{\mathbf{F}}_p$-représentations supersingulières de $\mathrm{GL}_n(F)$, la correspondance de Langlands modulo p se traduirait en une bijection naturelle entre les classes d'isomorphisme des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$-modules simples supersinguliers de dimension n et les classes d'isomorphisme des $\overline{\mathbf{F}}_p$-représentations irréductibles de dimension n du groupe de Weil de F.

Nous montrons ici la remarquable coïncidence numérique suivante, conjecturée dans [Vig2], qui vient corroborer la possibilité d'une correspondance de Langlands modulo p. Les trois ensembles suivants ont le même cardinal $N_n(q)$:

- l'ensemble des polynômes irréductibles de degré n sur $\mathbf{F}_q$,
- l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\overline{\mathbf{F}}_p$-représentations irréductibles de dimension n du groupe de Weil de F, avec le déterminant du Frobenius géométrique fixé,
- l'ensemble des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$-modules simples supersinguliers de dimension n avec action de l'uniformisante fixée.

Dans la première partie, on rappelle la présentation de Bernstein de l'anneau de Hecke $\mathcal{H}^{(1)}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$ qui permet d'en définir les modules standards induits par les caractères du sous-anneau commutatif $\mathcal{A}^{(1)}$.
On appelle $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbf{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$-module standard supersingulier un module standard induit par un $\overline{\mathbf{F}}_p$-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$ aussi nul que possible. Un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbf{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$-module simple est dit supersingulier s'il est quotient d'un module standard supersingulier.

Le résultat principal est le
Théorème :
(1) Tout $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbf{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$-module simple supersingulier contient un caractère pour l'algèbre de Hecke affine $\mathcal{H}^{(1)}_{aff}$.
(2) Le nombre de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbf{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$-modules simples supersinguliers de dimension n avec action de l'uniformisante fixée est égal à $N_n(q)$.

(1) est démontré au paragraphe 2.3, théorème 4 ; la classification des $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbf{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$-modules simples supersinguliers et (2) s'en déduisent, grâce à [Vig2].

Notations.

On désigne par F un corps local non archimédien de corps résiduel $\mathbf{F}_q$ de caractéristique p. Soit O_F l'anneau des entiers de F, et π une uniformisante.

Soit $\overline{\mathbf{Q}}_p$ une clôture algébrique du corps des nombres p-adiques $\mathbf{Q}_p$, $\overline{\mathbf{Z}}_p$ son anneau d'entiers de corps résidulel $\overline{\mathbf{F}}_p$. On notera $r_p : \overline{\mathbf{Z}}_p \to \overline{\mathbf{F}}_p$ la réduction modulo p.

Le pro-p-Iwahori $I(1)$ de $\mathrm{GL}_n(F)$ est l'unique pro-p-Sylow du sous-groupe d'Iwahori standard I de $\mathrm{GL}_n(F)$. Le sous-groupe d'Iwahori standard est isomorphe au produit semi-direct $I \simeq T(\mathbf{F}_q)I(1)$ où $T(\mathbf{F}_q)$ désigne le tore déployé de $GL_n(\mathbf{F}_q)$, $T(\mathbf{F}_q) \simeq \mathbf{F}_q^{*n}$.

Soit $(X, X^\vee, R, R^\vee, B, B^\vee)$ la donnée radicielle associée à $G = \mathrm{GL}_n(F)$. L'ensemble X est le groupe additif des matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont des puissance de π.
Le groupe de Weyl de $\mathrm{GL}_n(F)$ est le groupe de Coxeter $(W_0, S_0) = (\mathfrak{S}_n, \{s_1, .., s_{n-1}\})$ où s_i désigne la transposition $(i, i+1)$.
Le groupe de Weyl affine W_{aff} de G est le produit semi-direct $W_{aff} = \mathfrak{S}_n.Q$ où Q est le sous-groupe de X engendré par R. Si α_0 est la racine la plus longue et s la réflexion associée, on note $s_0 = \alpha_0.s \in W_{aff}$.
A l'aide de

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ \pi & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

l'élément s_0 s'écrit $s_0 = \omega s_1 \omega^{-1}$.
Le groupe W_{aff} est un groupe de Coxeter de système générateur $S = \{s_0, s_1, .., s_{n-1}\}$.
Le groupe de Weyl affine étendu de $\mathrm{GL}_n(F)$, noté $\tilde{W}$, est le produit semi-direct W_0X. Il s'écrit aussi $< \omega > W_{aff}$ où ω normalise W_{aff}. Ainsi, la longueur ℓ du système de Coxeter (W_{aff}, S) se prolonge à $\tilde{W}$ de façon à ce que le groupe cyclique $< \omega >$ engendré par ω soit l'ensemble des éléments de longueur nulle.

Suivant [Vig2], on définit les groupes :
$X^{(1)}$, le produit direct $X^{(1)} = X \times T(\mathbf{F}_q)$,
$W_{aff}^{(1)}$, le produit semi-direct $W_{aff}^{(1)} = W_{aff}T(\mathbf{F}_q)$,
$W^{(1)}$, le produit semi-direct $W^{(1)} = W_0X^{(1)} \simeq \tilde{W}T(\mathbf{F}_q) \simeq < \omega > W_{aff}^{(1)}$.
On prolonge ℓ à $W^{(1)}$ de façon à ce que $\ell(twt') = \ell(w)\ \forall t, t' \in T(\mathbf{F}_q)$, $w \in \tilde{W}$ ([Vig2] 10).

Pour $s \in S$, on désigne par $T_s(\mathbf{F}_q)$ le sous-groupe de $T(\mathbf{F}_q)$ égal à l'image du cocaractère $\mathbf{F}_q^* \to T(\mathbf{F}_q)$ associé à s.

Le groupe des permutations W_0 agit naturellement sur le tore $T(\mathbf{F}_q)$. On en déduit une action de W_0 sur le groupe $\hat{T}(\mathbf{F}_q)$ des $\overline{\mathbf{F}}_p$-caractères de $T(\mathbf{F}_q)$: pour $w_0 \in W_0$, $\lambda \in \hat{T}(\mathbf{F}_q)$, $w_0.\lambda = \lambda w_0^{-1}$.

Les anneaux R seront commutatifs.

1 Modules standards de l'anneau de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$.

1.1 Présentations de l'anneau de Hecke-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$.

(1.1.1) Présentation de Iwahori-Matsumoto.
L'anneau de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$ possède une présentation de type Iwahori-Matsumoto. Les théorèmes suivants sont démontrés dans ([Vig2] 11, 14) .

Théorème 1 *L'anneau de Hecke $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$ du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$ est le $\mathbf{Z}$-module libre de base $(T_w)_{w\in W^{(1)}}$ vérifiant :*
(1) les relations de tresses, $T_w T_{w'} = T_{ww'}$ pour $w,\ w' \in W^{(1)}$ tels que $\ell(w) + \ell(w') = \ell(ww')$,
(2) les relations quadratiques, $T_s^2 = q + T_s(\sum_{t\in T_s(\mathbf{F}_q)} T_t)$ pour $s \in S$.

Notations : On notera $\mathcal{H}^{(1)}$ l'anneau de Hecke $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$.
L'élément T_ω de la base de Iwahori-Matsumoto correspondant à ω sera noté Ω.
Soit R un anneau ; on désigne par $\mathcal{H}_R^{(1)}$ la R-algèbre $\mathcal{H}^{(1)} \otimes_{\mathbf{Z}} R$.
On notera $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$ lorsque R est un anneau contenant une racine $q-1^{\text{ème}}$ de l'unité et dans lequel $q-1$ est inversible.

Lorsque $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$, la théorie de Fourier pour $T(\mathbf{F}_q) \simeq (\mathbf{F}_q^*)^n$ permet de définir des idempotents centraux de $\mathcal{H}_R^{(1)}$ et de décomposer cette algèbre :

Théorème 2 *Soit R un anneau, $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$. Chaque W_0-orbite γ dans $\hat{T}(\mathbf{F}_q)$ définit un idempotent central*

$$\epsilon_\gamma = \sum_{\lambda\in\gamma} \epsilon_\lambda, \quad \textit{avec } \epsilon_\lambda = (q-1)^{-n} \textstyle\sum_{t\in T(\mathbf{F}_q)} \lambda^{-1}(t) T_t.$$

La R-algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$ est le produit, sur les W_0-orbites γ de $\hat{T}(\mathbf{F}_q)$, des R-algèbres $\mathcal{H}_R(G, \oplus_{\lambda\in\gamma}\lambda,)$, d'unité ϵ_γ et de base $(T_w\epsilon_\lambda)_{w\in\tilde{W},\lambda\in\gamma}$, avec les relations :
(1) pour $\lambda,\ \lambda' \in \gamma,\ \lambda \neq \lambda',\ \epsilon_\lambda^2 = \epsilon_\lambda,\ \ \epsilon_\lambda\epsilon_{\lambda'} = 0,\ \ \sum_{\lambda\in\gamma} \epsilon_\lambda = \epsilon_\gamma$,
(2) pour $\tilde{w} = wx \in \tilde{W} = W_0.X,\ \ \lambda \in \gamma,\ \ \epsilon_\lambda T_{\tilde{w}} = T_{\tilde{w}}\epsilon_{\lambda w}$,
(3) pour $\tilde{w},\ \tilde{w}' \in \tilde{W}$ tels que $\ell(\tilde{w}\tilde{w}') = \ell(\tilde{w}) + \ell(\tilde{w}')$, on a $T_{\tilde{w}}T_{\tilde{w}'} = T_{\tilde{w}\tilde{w}'}$,
(4) pour $i \in \{0, ..., n-1\}$, $T_{s_i}^2 = (q-1)(\sum_{\lambda\in\gamma,\, s_i.\lambda=\lambda} \epsilon_\lambda)T_{s_i} + q$.

On notera $\mathcal{H}^{(1)}(\gamma)$ l'anneau de générateurs $(T_w\epsilon_\lambda)_{w\in\tilde{W},\lambda\in\gamma}$ et $\mathcal{H}_R^{(1)}(\gamma)$ la R-algèbre $\mathcal{H}^{(1)}(\gamma)\otimes R$ isomorphe à l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R(G, \oplus_{\lambda\in\gamma}\lambda)$.

Définition 1 *On appelle sous-anneau de Hecke affine et l'on note $\mathcal{H}^{(1)}_{aff}$ le sous-anneau de $\mathcal{H}^{(1)}$ de générateurs*

$$(T_w)_{w\in W^{(1)}_{aff}}.$$

Soit γ une W_0-orbite de $\hat{T}(\mathbf{F}_q)$. On note $\mathcal{H}^{(1)}_{aff}(\gamma)$ le sous-anneau de $\mathcal{H}^{(1)}(\gamma)$ de générateurs

$$(T_w\,\epsilon_\lambda)_{w\in W_{aff},\,\lambda\in\gamma}.$$

Soit R un anneau $R \supset \{\mu_{q-1},(q-1)^{-1}\}$. La R-algèbre de Hecke affine $\mathcal{H}^{(1)}_{aff}\otimes R$ est le produit sur les W_0-orbites γ de $\hat{T}_n(\mathbf{F}_q)$ des R-algèbres $\mathcal{H}^{(1)}_{aff}(\gamma)\otimes R$.

(1.1.2) Z-Base de Bernstein ([Vig2] 30, 31.) On dispose d'une présentation de Bernstein de $\mathcal{H}^{(1)}$ qui reflète la décomposition $W^{(1)} = W_0X^{(1)}$.

Dans la $\mathbf{Z}[q^{\pm1/2}]$-algèbre $\mathcal{H}^{(1)}_{\mathbf{Z}[q^{\pm1/2}]}$, on définit les éléments analogues des éléments de Bernstein pour la $\mathbf{Z}[q^{\pm1/2}]$-algèbre de Hecke-Iwahori.
Pour $w \in \tilde{W}^{(1)}$, on pose $\tilde{T}_w = q^{-\ell(w)/2}T_w$. Soit $x \in X^{(1)}$, $x = y - z$ avec y, $z \in X^{(1)}$ dominants. Alors, l'élément $\tilde{\theta}_x = \tilde{T}_y\tilde{T}_z^{-1}$ ne dépend pas du choix de x et y. De plus, L'application

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{Z}[q^{\pm1/2}][X^{(1)}] & \longrightarrow & \mathcal{H}^{(1)}_{\mathbf{Z}[q^{\pm1/2}]}\\ x & \longmapsto & \tilde{\theta}_x\end{array}$$

est un morphisme injectif de $\mathbf{Z}[q^{\pm1/2}]$-algèbres ([Vig2] 27). On note $\mathcal{A}^{(1)}_{\mathbf{Z}[q^{\pm1/2}]}$ son image.
On définit, pour $w = w_0.x \in W_0X^{(1)}$, l'élément

$$E_w = q^{\ell(w)/2}\tilde{T}_{w_0}\tilde{\theta}_x.$$

Théorème 3 *(1) Une $\mathbf{Z}$-base de $\mathcal{H}^{(1)}$ est donnée par $(E_w)_{w\in W^{(1)}}$.*
Soit γ une W_0-orbite dans $\hat{T}(\mathbf{F}_q)$. Une $\mathbf{Z}$-base de $\mathcal{H}^{(1)}(\gamma)$ est donnée par $(E_w\epsilon_\lambda)_{w\in W,\lambda\in\gamma}$.
(2) $(E_x)_{x\in X^{(1)}}$ est $\mathbf{Z}$-une base de l'anneau commutatif $\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}^{(1)}_{\mathbf{Z}[q^{\pm1/2}]}\cap\mathcal{H}^{(1)}$.
On note $\mathcal{A}^{(1)}(\gamma)$ le sous-anneau commutatif de $\mathcal{H}^{(1)}(\gamma)$ de générateurs $(E_x\epsilon_\lambda)_{x\in X,\lambda\in\gamma}$.
Soit R un anneau $R\supset\{\mu_{q-1},(q-1)^{-1}\}$. La R-algèbre $\mathcal{A}^{(1)}_R = \mathcal{A}^{(1)}\otimes R$ est le produit sur les W_0-orbites γ dans $\hat{T}(\mathbf{F}_q)$ des R-algèbres $\mathcal{A}^{(1)}_R(\gamma) = \mathcal{A}^{(1)}(\gamma)\otimes R$.
(3) L'action de W_0 sur $\mathcal{A}^{(1)}$ est induite par l'action de W_0 sur X. Le centre de $\mathcal{H}^{(1)}$ est égal au sous-anneau $(\mathcal{A}^{(1)})^{W_0}$ des W_0-invariants de $\mathcal{A}^{(1)}$.
$\mathcal{H}^{(1)}$ est un anneau de type fini sur son centre.

Soit $I\subset\{1,..,n\}$, de fonction caractéristique ξ_I, et x_I la diagonale de coefficients $(\pi^{\xi_I(i)})_{i=1,..,n}$.
Lorsque $I=\{i\}$, on notera $x_i = x_{\{i\}}$.
On note $E_I = E_{x_I}$. En particulier, $E_{\{1,..,n\}}$ est l'élément central inversible Ω^n. Le groupe des permutations W_0 agit naturellement sur les parties I de $\{1,..,n\}$: on note $w_0.I$ le sous ensemble de $\{1,..,n\}$ de fonction caractéristique $\xi_I\circ w_0^{-1}$.

Suivant la démonstration relative au sous-anneau commutatif de l'anneau de Hecke-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$, on montre ([Vig2] 35) qu'un système de générateurs de $\mathcal{A}^{(1)}$ est donné par

$$E_{\{1,..,n\}}^{\pm 1},\ (E_I)_{I\subsetneq\{1,..,n\}},\ (T_t)_{t\in T(\mathbf{F}_q)},$$

avec les relations :

$$T_tT_{t'} = T_{tt'},\ pour\, t,t' \in T(\mathbf{F}_q),$$

$$E_IE_J = q^{yz}E_{I\cup J}E_{I\cap J} \ \text{ où } |I\cap J| = x,\ |I| = x+y,\ |J| = x+z.$$

Proposition 1 *Relations de commutation.*
(i) Si $i, i+1 \notin I$, alors T_{s_i} et E_I commutent.
(ii) Si $i \in I$ et $i+1 \notin I$, alors, $E_IT_{s_i} = T_{s_i}E_{s_i.I} - E_{s_i.I}\sum_{t\in T_{s_i}(\mathbf{F}_q)} T_t$.
(iii) Si $i \notin I$ et $i+1 \in I$, alors, $E_IT_{s_i} = T_{s_i}E_{s_i.I} + E_I\sum_{t\in T_{s_i}(\mathbf{F}_q)} T_t$.
(iv) Si $i, i+1 \in I$, alors T_{s_i} et E_I commutent.

Preuve : Les relations de Bernstein pour la $\mathbf{Z}[q^{\pm 1/2}]$-algèbre de Hecke-Iwahori ont un analogue pour la $\mathbf{Z}[q^{\pm 1/2}]$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$. Il est donné par ([Vig2] 28). Remarquons que le morphisme de R-algèbres que nous utilisons ici est $\tilde{\theta}^-$ ([Vig2] 27) auquel on adapte la démonstration de ([Vig2] 28) pour obtenir les relations suivantes.

Soit $i \in \{1,..,n-1\}$, $j \in \{1,..,n\}$. On note, $\tilde{\theta}_j = \tilde{\theta}_{x_j}$. Alors,
(a) si $j \neq i, i+1$, T_{s_i} et $\tilde{\theta}_j$ commutent ;
(b) $\tilde{\theta}_iT_{s_i} = T_{s_i}\tilde{\theta}_{i+1} - \tilde{\theta}_{i+1}\sum_{t\in T_{s_i}(\mathbf{F}_q)} T_t$;
(c) $\tilde{\theta}_{i+1}T_{s_i} = T_{s_i}\tilde{\theta}_i + \tilde{\theta}_{i+1}\sum_{t\in T_{s_i}(\mathbf{F}_q)} T_t$.

Soit $I \subset \{1,..,n\}$ de cardinal t, alors $E_I = q^{t(n-t)/2}\prod_{k\in I}\tilde{\theta}_k$.
(i) se déduit de (a).
Supposons $i \in I$, $i+1 \notin I$ et montrons (ii).

$$\begin{array}{rcll} E_IT_{s_i} & = & q^{t(n-t)/2}\prod_{k\in I\setminus\{i\}}\tilde{\theta}_k(\tilde{\theta}_iT_{s_i}) & \\ & = & q^{t(n-t)/2}\prod_{k\in I\setminus\{i\}}\tilde{\theta}_k(T_{s_i}\tilde{\theta}_{i+1} - \tilde{\theta}_{i+1}\sum_{t\in T_{s_i}(\mathbf{F}_q)} T_t) & \text{d'après (b)} \\ & = & (T_{s_i} - \sum_{t\in T_{s_i}(\mathbf{F}_q)} T_t)q^{t(n-t)/2}\prod_{k\in I\setminus\{i\}\cup\{i+1\}}\tilde{\theta}_k & \text{d'après (a)} \\ & = & T_{s_i}E_{s_i.I} - E_{s_i.I}\sum_{t\in T_{s_i}(\mathbf{F}_q)} T_t & \end{array}$$

(iii) et (iv) se déduisent de (a), (b), (c) par de tels calculs.

1.2 Modules standards de l'anneau de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$.

Définition 2 *Soit R un anneau et $\chi : \mathcal{A}^{(1)} \to R$ un R-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$.*
On appelle $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module standard induit par χ le $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module

$$I(\lambda) = \mathcal{H}_R^{(1)} \otimes_{\mathcal{A}^{(1)}} \chi.$$

La proposition suivante se déduit du théorème 3.

Proposition 2 ***Propriétés des modules standards :***

(1) Le $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module standard induit par $\chi : \mathcal{A}^{(1)} \to R$ est un R-module de type fini.

(2) Tout $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module simple ayant un caractère central est quotient d'un $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module standard.

(3) Soit $\chi : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbf{Z}}_p$ et $r_p\chi : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbf{F}}_p$ sa réduction modulo p.
Le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$-module standard induit par $r_p\chi$ est égal à la réduction modulo p du $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}^{(1)}$-module standard induit par χ :

$$I(r_p\chi) = I(\chi) \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}_p} \overline{\mathbf{F}}_p.$$

2 Modules simples supersinguliers de la $\overline{\mathbf{F}}_p$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$.

2.1 Définition.

Définition 3 *Le $\overline{\mathbf{F}}_p$-caractère $\chi : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbf{F}}_p$ est dit* supersingulier *lorsqu'il est "aussi nul que possible" c'est à dire :*

$$\textit{pour } x \in X, \textit{ si } \chi(E_x) \neq 0 \textit{ alors } \ell(x) = 0,$$

Remarque : Le $\overline{\mathbf{F}}_p$-caractère $\chi : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbf{F}}_p$ s'étend de façon naturelle à $\mathcal{A}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$ en un caractère que l'on désigne encore par χ et dont on dit qu'il est supersingulier.
Le $\overline{\mathbf{F}}_p$-caractère supersingulier de $\mathcal{A}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$ est entièrement déterminé par sa valeur $\chi(\Omega^n)$ en l'uniformisante et par la donnée de l'unique $\lambda \in \hat{T}(\mathbf{F}_q)$ tel que $\chi(\epsilon_\lambda) \neq 0$, $\chi(\epsilon_\lambda) = 1$.

Définition 4 *On appelle module standard supersingulier un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$-module standard induit par un $\overline{\mathbf{F}}_p$-caractère supersingulier de $\mathcal{A}^{(1)}$.*
Un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$-module simple est dit supersingulier lorsqu'il est quotient d'un module standard supersingulier.

Remarque : D'après la proposition 2 (2), un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$-module simple ayant un caractère central est supersingulier si et seulement si son caractère central ϕ est "aussi nul que possible", c'est à dire que ϕ est la restriction à $(\mathcal{A}^{(1)})^{W_0}$ d'un $\overline{\mathbf{F}}_p$-caractère $\chi : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbf{F}}_p$ supersingulier.

2.2 Classification des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$-modules simples supersinguliers.

Théorème 4 *Tout $\mathcal{H}_{\overline{\mathbf{F}}_p}^{(1)}$-module simple supersingulier contient un caractère pour la $\overline{\mathbf{F}}_p$-algèbre de Hecke affine $\mathcal{H}_{aff}^{(1)} \otimes \overline{\mathbf{F}}_p$.*

Combiné avec ([Vig2] 24, 37), qui fournit une description des $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbf{F}}_p}$-modules simples contenant un caractère de $\mathcal{H}^{(1)}_{aff}$, le théorème 4 donne la classification des $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbf{F}}_p}$-modules simples supersinguliers.

2.3 Démonstration du théorème 4.

(2.3.1) On définit l'action de W_0 sur les caractères supersinguliers de la façon suivante. Pour $\chi : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbf{F}}_p$ un caractère supersingulier de $\mathcal{A}^{(1)}$ et $w_0 \in W_0$, ${}^{w_0}\chi$ désigne le $\overline{\mathbf{F}}_p$-caractère supersingulier de $\mathcal{A}^{(1)}$ déterminé par la donnée :

$$({}^{w_0}\chi)(\Omega^n) = \chi(\Omega^n),\ ({}^{w_0}\chi)(T_t) = \chi(T_{w_0^{-1}tw_0})\ \forall t \in T(\mathbf{F}_q).$$

Soit $V \neq \{0\}$ un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbf{F}}_p}$-module simple supersingulier quotient du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbf{F}}_p}$-module standard induit par le $\overline{\mathbf{F}}_p$-caractère supersingulier χ.
Soit $W_0.\chi$ l'orbite de χ sous l'action de W_0. On désigne par V_χ et V_χ^{iso} les sous-$\overline{\mathbf{F}}_p$-espaces vectoriels non nuls de V définis par :

$$V_\chi = \{v \in V, \forall a \in \mathcal{A}^{(1)},\ a.v = \chi(a)v\ \}.$$
$$V_\chi^{iso} = \bigoplus_{\chi' \in W_0.\chi} V_{\chi'}.$$

(2.3.2)
Soit $\mathcal{H}_0^{(1)}$ l'anneau de Hecke "fini" de générateurs $(T_{w_0}\,T_t)_{w_0\in W_0,\, t\in T(\mathbf{F}_q)}$. Il est isomorphe à l'anneau de Hecke $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q), U)$ où U est le radical unipotent du sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)$ ([CE] Théorème 3.30 (i)).
Soit γ une W_0-orbite de $\hat{T}(\mathbf{F}_q)$. On note $\mathcal{H}_0^{(1)}(\gamma)$ le sous-anneau de $\mathcal{H}^{(1)}(\gamma)$ de générateurs $(T_{w_0}\,\epsilon_\lambda)_{w_0\in W_0,\, \lambda\in\gamma}$. Soit R un anneau $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$. La R-algèbre de Hecke finie $\mathcal{H}_0^{(1)} \otimes R$ est le produit sur les W_0-orbites γ de $\hat{T}(\mathbf{F}_q)$ des R-algèbres $\mathcal{H}_0^{(1)}(\gamma) \otimes R$.

Proposition 3 *Soit V un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbf{F}}_p}$-module simple supersingulier et $\chi : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbf{F}}_p$, un $\overline{\mathbf{F}}_p$-caractère supersingulier de $\mathcal{A}^{(1)}$ tel que $V_\chi \neq \{0\}$. Alors V_χ^{iso} contient un caractère pour la $\overline{\mathbf{F}}_p$-algèbre $\mathcal{H}_0^{(1)} \otimes \overline{\mathbf{F}}_p$.*

Preuve : On montre que V_χ^{iso} est un $\mathcal{H}_0^{(1)}$-module. Soit $v \in V_\chi$.
- Soit $t \in T(\mathbf{F}_q)$. On a $T_t.v = \chi(T_t)v$. Ainsi $T_t.v \in V_\chi^{iso}$.
- Soit $i \in \{1,..,n-1\}$. Montrons que $T_{s_i}.v \in V_{{}^{s_i}\chi} \subset V_\chi^{iso}$.
  Soit $\emptyset \subsetneq I \subsetneq \{1,..,n\}$. D'après la proposition 1, on a bien $E_I.(T_{s_i}.v) = 0 = ({}^{s_i}\chi)(E_I)T_{s_i}.v$.
  De plus, pour $t \in T(\mathbf{F}_q)$, on a : $T_t.T_{s_i}.v = T_{s_i}.T_{s_its_i}v = ({}^{s_i}\chi)(T_t)T_{s_i}.v$.

Ainsi V_χ^{iso} est un module non nul pour la $\overline{\mathbf{F}}_p$-algèbre $\mathcal{H}_0^{(1)} \otimes \overline{\mathbf{F}}_p$. Or les $\mathcal{H}_0^{(1)} \otimes \overline{\mathbf{F}}_p$-modules simples sont des caractères ([CE] Théorème 3.30 (iii)), donc V_χ^{iso} contient un caractère pour la $\overline{\mathbf{F}}_p$-algèbre $\mathcal{H}_0^{(1)} \otimes \overline{\mathbf{F}}_p$.

(2.3.3) Un relèvement d'un caractère supersingulier.

Proposition 4 *Soit $\lambda \in \hat{T}(\mathbf{F}_q)$, $z \in \overline{\mathbf{F}}_p^{\ *}$ et $\bar{\chi} : \mathcal{A}^{(1)}_{\overline{\mathbf{F}}_p} \to \overline{\mathbf{F}}_p$ le caractère supersingulier de $\mathcal{A}^{(1)}_{\overline{\mathbf{F}}_p}$ tel que $\bar{\chi}(\Omega^n) = z$ et $\bar{\chi}(\epsilon_\lambda) = 1$.*
Soit $\tilde{\chi} : \mathcal{A}^{(1)}_{\overline{\mathbf{Q}}_p} \to \overline{\mathbf{Q}}_p$ le caractère défini par :

$\tilde{\chi}(\Omega^n) = z_0 \in \overline{\mathbf{Z}}_p$, *un relèvement de* $z \in \overline{\mathbf{F}}_p$,
$\tilde{\chi}(\tilde{\theta}_{x_1}) = z_0 q^{(n-2)/2}$,
$\tilde{\chi}(\tilde{\theta}_{x_2}) = 1$,
$\ldots$
$\tilde{\chi}(\tilde{\theta}_{x_{n-1}}) = 1$,
$\tilde{\chi}(\tilde{\theta}_{x_n}) = q^{(2-n)/2}$.
$\tilde{\chi}(\epsilon_\lambda) = 1$

Alors $\chi_0 = \tilde{\chi}|_{\mathcal{A}^{(1)}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}}$ est à valeurs dans $\overline{\mathbf{Z}}_p$ et relève $\bar{\chi}$: $r_p \chi_0 = \bar{\chi}$.

Preuve : Il suffit de vérifier que $val_p(\chi_0(E_I)) > 0$, $\forall\, \emptyset \subsetneq I \subsetneq \{1, .., n\}$. Soit $\emptyset \subsetneq I \subsetneq \{1, .., n\}$. On a $E_I = q^{|I|(n-|I|)/2} \tilde{\theta}_{x_I}$. Ainsi,

si $n \notin I$, $\tilde{\chi}(\tilde{\theta}_{x_I})$ est de valuation positive ou nulle. Dès lors, $\chi_0(E_I)$ est de valuation strictement positive.
si $n \in I$:
- si $1 \in I$, $\tilde{\chi}(\tilde{\theta}_{x_I}) = z_0$ et $\chi_0(E_I)$ est de valuation strictement positive.
- sinon, $\tilde{\chi}(\tilde{\theta}_{x_I}) = q^{(2-n)/2}$ et $val_p(\chi_0(E_I)) = val_p(q)(|I|(n-|I|)+2-n)/2$ est strictement positive pour $|I| = 1, ..., n-1$.

Par conséquent, d'après la proposition 2 (3), le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbf{F}}_p}$-module standard $I(\bar{\chi})$ est isomorphe à la réduction modulo p du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}$-module standard $I(\chi_0)$.

(2.3.4)

Proposition 5 *Soit $\bar{\chi} : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbf{F}}_p$ un caractère supersingulier de $\mathcal{A}^{(1)}_{\overline{\mathbf{F}}_p}$. Dans $I(\bar{\chi})$ de générateur canonique $\bar{\varphi}$, on a*

$$T_{s_0}.\bar{\varphi} = 0 \ \textit{ou bien}\ T_{s_0}.\bar{\varphi} = -\bar{\varphi}.$$

Preuve : On étend $\bar{\chi}$ de façon naturelle à la $\overline{\mathbf{F}}_p$-algèbre $\mathcal{A}^{(1)}_{\overline{\mathbf{F}}_p}$ pour se ramener à la situation de la proposition 4.
Deux calculs de $E_{s_1\omega^{n-1}}$:
D'une part, on a : $s_1\omega^{n-1} = s_2 ... s_{n-1} diag(\pi, ...\pi, 1)$. Ainsi, $E_{s_1\omega^{n-1}} = q^{1/2} q^{-(n-2)/2} T_{s_2} ... T_{s_{n-1}} \tilde{\theta}_{x_1} ... \tilde{\theta}_{x_{n-1}}$. Soit $\chi_0 : \mathcal{A}^{(1)}_{\overline{\mathbf{Z}}_p} \to \overline{\mathbf{Z}}_p$ comme dans la proposition 4. On note φ le générateur canonique du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}$-module standard $I(\chi_0)$. Alors,

$$E_{s_1\omega^{n-1}}.\varphi = q^{(3-n)/2} T_{s_2} ... T_{s_{n-1}}.\, z_0 q^{(n-2)/2} \varphi = z_0 q^{1/2} T_{s_2} ... T_{s_{n-1}}.\varphi.$$

Donc, dans $I(\bar{\chi}) = I(\chi_0) \otimes_{\overline{\mathbf{Z}}_p} \overline{\mathbf{F}}_p$ de générateur canonique $\bar{\varphi}$, on a $E_{s_1\omega^{n-1}}.\bar{\varphi} = 0$.
D'autre part,

$$\begin{array}{rcl} E_{s_1\omega^{n-1}} & = & q^{(3-n)/2} q^{(n-1)/2} T_{s_2} ... T_{s_{n-1}} T^{-1}_{diag(\pi^{-1}, ..., \pi^{-1}, 1)} \\ & = & q\Omega^n T_{s_2} ... T_{s_{n-1}} (\Omega T_{s_1} ... T_{s_{n-1}})^{-1} \\ & = & (q T_{s_1}^{-1}) \Omega^{n-1}. \end{array}$$

D'où, dans $I(\bar{\lambda})$, $(T_{s_0} - \sum_{t\in T_{s_0}(\mathbf{F}_q)} T_t).\bar{\varphi} = 0$
Or, il existe un unique $\lambda \in \hat{T}_n(\mathbf{F}_q)$ tel que $\bar{\chi}(\epsilon_\lambda) = 1$. On a $(\sum_{t\in T_{s_0}(\mathbf{F}_q)} T_t).\epsilon_\lambda = (\sum_{t\in T_{s_0}(\mathbf{F}_q)} \lambda(T_t))\epsilon_\lambda = (q-1)\epsilon_\lambda$ si $\lambda s_0 = \lambda$; $(\sum_{t\in T_{s_0}(\mathbf{F}_q)} T_t).\epsilon_\lambda = 0$ sinon. Donc, $T_{s_0}.\bar{\varphi} = -\bar{\varphi}$ ou 0.

(2.3.5)
Soit V un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbf{F}}_p}$-module simple supersingulier Il existe $\chi : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbf{F}}_p$ un caractère supersingulier de $\mathcal{A}^{(1)}$ tel que le sous-$\overline{\mathbf{F}}_p$-espace vectoriel V^{iso}_χ de V est non nul. Ce dernier contient $v \in V^{iso}_\chi\backslash\{0\}$ un vecteur propre pour $\mathcal{H}^{(1)}_0 \otimes \overline{\mathbf{F}}_p$ pour le caractère μ (2.3.2). Il existe un unique $\overline{\mathbf{F}}_p$-caractère supersingulier $\bar{\chi} : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbf{F}}_p$ tel que $v \in V_{\bar{\chi}}$. (Puisque tous les conjugués de χ sont supersinguliers et $v \in V^{iso}_\chi$, on a $E_I.v = 0\ \forall\, \emptyset \subsetneq I \subsetneq \{1,..,n\}$. De plus, $\epsilon_\lambda.v = \mu(\epsilon_\lambda)v$, $\forall\lambda \in \hat{T}(\mathbf{F}_q)$. Le caractère $\bar{\chi}$ est le caractère supersingulier défini sur $\mathcal{A}^{(1)}_{\overline{\mathbf{F}}_p}$ par $\bar{\chi}(\Omega^n) = \chi(\Omega^n)$, $\bar{\chi}(\epsilon_\lambda) = \mu(\epsilon_\lambda)\ \forall\lambda \in \hat{T}(\mathbf{F}_q)$. C'est un conjugué de χ et l'on a bien $v \in V_{\bar{\chi}}$.)
Par adjonction, on dispose d'un morphisme surjectif de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbf{F}}_p}$-modules : $I(\bar{\chi}) \xrightarrow{F} V$, $F(\bar{\varphi}) = v$. D'après (2.3.4), v est bien un caractère pour la $\overline{\mathbf{F}}_p$-algèbre de Hecke affine $\mathcal{H}^{(1)}_{aff}$ et le théorème 4 est démontré.

D'après ce qui précède et ([Vig2] 25), le nombre de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbf{F}}_p}$-modules simples supersinguliers de dimension n avec action de l'uniformisante fixée est égal à $N_n(q)$, où $N_n(q)$ est le nombre de polynômes irréductibles de degré n sur $\mathbf{F}_q$. La conjecture ([Vig2] 7) est donc vérifiée.

Références

[CE] Cabanes, M. ; Enguehard, M. Representation theory of finite reductive groups. Book in preparation (Mars 2003).

[Vig1] Vignéras, M.-F. Representations of the p-adic group GL(2,F) modulo p. Institut de Mathématiques de Jussieu. Preprint 30 (2001). Compositio Mathematica. A paraître.

[Vig2] Vignéras, M.-F. On a numerical Langlands correspondence modulo p with the pro-p-Iwahori Hecke ring. Institut de Mathématiques de Jussieu. Preprint (Septembre 2003).